

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

Кафедра теоретической механики

МЕТОДЫ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ПУАНКАРЕ И БИРКГОФА

Учебно-методическое пособие
по курсу
Аналитическая механика

Составитель *А. В. Сахаров*

МОСКВА
МФТИ
2022

УДК 531.011; 517.933; 517.938; 517.928.7(075)
ББК 22.213.2; 22.161.615; 22.161.617я73
М54

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент *А. Б. Батхин*

М54 Методы нормальных форм Пуанкаре и Биркгофа :
учеб.-метод. пособие по курсу *Аналитическая механика*
/ сост. А. В. Сахаров. – Москва : МФТИ, 2022. – 28 с.

Пособие посвящено двум аналитическим методам исследования динамики нелинейных систем в окрестности положения равновесия: методу нормальных форм Пуанкаре и методу нормализации гамильтонианов Биркгофа. Первый из них применяется для исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитической правой частью, а второй – для исследования динамики гамильтоновых систем.

Предназначено для студентов и аспирантов, углубленно изучающих курс классической механики и теории динамических систем, а также для специалистов и преподавателей по соответствующим специальностям.

УДК 531.011; 517.933; 517.938; 517.928.7(075)
ББК 22.213.2; 22.161.615; 22.161.617я73

Содержание

1. Введение	4
2. Метод нормальной формы Пуанкаре	5
3. Метод Биркгофа нормализации гамильтониана .	14
Литература	26

1. Введение

Часто использование дифференциальных уравнений, основного математического инструмента классической механики, встречает ряд трудностей, связанных с ограниченными возможностями получения и анализа их решений. Соответствующая теория хорошо развита для линейных систем, классические результаты которой широко используются в стандартных университетских курсах дифференциальных уравнений и классической механики. В то же время сформулировать общие подходы для анализа решений систем нелинейных уравнений не удастся. В связи с этим основной упор зачастую делается лишь на исследовании локальных свойств, справедливых в некоторой окрестности фазового пространства системы. Одним из таких фундаментальных утверждений является теорема о выпрямлении векторного поля: если окрестность фазового пространства системы дифференциальных уравнений не содержит особых точки, то любое векторное поле в ней выпрямляемо с помощью некоторого диффеоморфизма [1].

Методы исследования, которым посвящено данное пособие, напротив, применяются в окрестности особых точек системы. Метод нормальной формы Анри Пуанкаре (1854–1912) применяется для исследования решений произвольных систем дифференциальных уравнений с аналитической правой частью, записанных в нормальной форме Коши, а метод нормализации Джорджа Биркгофа (1884–1944) требует гамильтоновости рассматриваемой системы. Суть обоих методов состоит в максимальном упрощении системы, приведению ее к так называемой нормальной форме, используя при этом класс полиномиальных преобразований. Исследование локальных свойств решений систем в нормальной форме может быть значительно проще, что позволяет оценить влияние оставшихся нелинейных слагаемых, убрать которые по некоторым причинам уже не удастся. При необходимости, используя обратные преобразования, можно перейти к исходным переменным системы.

2. Метод нормальной формы Пуанкаре

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T, \quad \mathbf{f} = [f_1, \dots, f_n]^T. \quad (1)$$

Переменные $\mathbf{x} \in X$, где X — фазовое пространство системы (1), функции $\mathbf{f}$ аналитические и не зависят явно от времени. Считаем также, что $\mathbf{x} = 0$ — положение равновесия системы: $\mathbf{f}(0) = 0$.

Идея метода нормальных форм состоит в том, чтобы последовательно, используя обратимые аналитические преобразования $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} \rightarrow \dots$, упростить систему (1), оставив в ней минимально возможное количество слагаемых до любого порядка разложения функций $\mathbf{f}$ в ряд в окрестности положения равновесия. Задачу максимум можно было бы сформулировать так: попробуем найти такую последовательность преобразований, которая приведет систему (1) к набору n независимых линейных уравнений: $\dot{x}_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i = \text{const}$. Тогда без труда интегрируя каждое уравнение и применяя обратные преобразования, можно было бы найти решение исходной системы в окрестности положения равновесия. Далее предпринимается попытка реализации этой идеи.

При помощи разложения в ряд Тейлора функций $\mathbf{f}$ в окрестности положения равновесия выделим в правой части (1) линейные слагаемые:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{g} = [g_1, \dots, g_n]^T, \\ g_i(\mathbf{x}) &= \sum_{k_1, \dots, k_n} g_{k_1, \dots, k_n}^i x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}, \quad k_i \geq 0, \quad k_1 + \dots + k_n \geq 2. \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{A}$ — матрица с постоянными коэффициентами размера $n \times n$, $g_{k_1, \dots, k_n}^i$ — постоянные коэффициенты в полиноме g_i , сумма $k = k_1 + \dots + k_n$ называется *порядком* монома $g_{k_1, \dots, k_n}^i x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$.

Начнем реализацию метода с упрощения линейной части. Пусть $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \dots, \lambda_n]^T$ — собственные значения матрицы $\mathbf{A}$. Перейдем к новым переменным $\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$, в которых матрица $\mathbf{A}$

примет диагональный вид¹:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}. \quad (2)$$

Пусть k — минимальный порядок мономов, содержащихся в $\tilde{\mathbf{g}}$ (тильду над полиномами и их коэффициентами в дальнейшем опускаем). Попробуем исключить из правой части равенства (2) все слагаемые порядка k . Для этого используем преобразование $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{y}$, отличающееся от тождественного на однородные полиномы этого же порядка:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \mathbf{y} + \mathbf{p}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{p}(\mathbf{y}) = [p_1, \dots, p_n]^T, \\ p_i(\mathbf{y}) &= \sum_{k_1, \dots, k_n} p_{k_1, \dots, k_n}^i y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}, \quad k_i \geq 0, \quad k_1 + \dots + k_n = k. \end{aligned} \quad (3)$$

Полином $p_i(\mathbf{y})$ содержит C_{n+k-1}^k мономов с постоянными коэффициентами $p_{k_1, \dots, k_n}^i$, которые требуется подобрать так, чтобы слагаемые порядка k исчезли из правой части равенства (2). Заметим, что рассматриваемое преобразование не добавляет слагаемых порядка ниже k в правую часть уравнения (2). Непосредственной подстановкой замены (3) в (2) получим

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T} \right) \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{p} + \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{p}), \\ \dot{\mathbf{y}} &= \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T} \right)^{-1} (\mathbf{\Lambda} \mathbf{y} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{p} + \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{p})), \end{aligned}$$

где $\mathbf{E}$ — единичная матрица размера $n \times n$. Разложим последнее уравнение в ряд по степеням $\mathbf{y}$, оставляя только слагаемые порядка не выше k . Слагаемые порядка k в функциях $\mathbf{g}$ обозначим как $\mathbf{g}^k$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \left(\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T} \right) (\mathbf{\Lambda} \mathbf{y} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{p} + \mathbf{g}(\mathbf{y} + \mathbf{p})) + \dots = \\ &= \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{p} + \mathbf{g}^k(\mathbf{y}) - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}^T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{y} + \dots \end{aligned}$$

¹В общем случае матрица $\mathbf{A}$ приводится не к диагональной, а к жордановой форме. Тем не менее, с некоторыми оговорками, сказанное далее справедливо и в случае представления матрицы $\mathbf{A}$ в жордановой форме [7].

Отбрасывание слагаемых порядка выше k , обозначенных в последней формуле троеточием, справедливо лишь в том случае, если мы ограничиваемся попыткой устранения слагаемых до порядка k включительно. Если же мы хотим продолжить процедуру до порядка $k+1$ и выше, соответствующие слагаемые необходимо учитывать на следующей итерации метода. Коэффициенты полиномов $p_{k_1, \dots, k_n}^i$ подбираются так, чтобы в полученной системе слагаемые порядка k исчезли. Следовательно,

$$\Lambda p - \frac{\partial p}{\partial y^T} \Lambda y = -g^k.$$

Полученное уравнение называют *гомологическим*. Запишем его в скалярном виде:

$$\lambda_i p_i - \sum_{j=1}^n \frac{\partial p_i}{\partial y_j} \lambda_j y_j = -g_i^k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Это уравнение линейно относительно p_i . В силу этого можно рассматривать задачу об исключении каждого слагаемого, входящего в полином p_i отдельно. Оставим в левой и правой частях уравнения моном с одинаковым набором показателей: $p_{k_1, \dots, k_n}^i y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}$ и $g_{k_1, \dots, k_n}^i y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}$. Тогда

$$(\lambda_i - k_1 \lambda_1 - \dots - k_n \lambda_n) p_{k_1, \dots, k_n}^i y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n} = -g_{k_1, \dots, k_n}^i y_1^{k_1} \dots y_n^{k_n}.$$

Отсюда получаем выражение для коэффициентов:

$$p_{k_1, \dots, k_n}^i = \frac{g_{k_1, \dots, k_n}^i}{k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n - \lambda_i}. \quad (4)$$

Разумеется, это решение существует, только если знаменатель не равен нулю. В таком случае мы получаем формулу, определяющую коэффициенты полиномов p таким образом, что замена $\tilde{x} \rightarrow y$ убирает слагаемые порядка k в системе (2).

Нелинейные слагаемые системы (2), показатели $k_1, \dots, k_n \geq 0$ которых таковы, что выполняется

$$\lambda_i = k_1 \lambda_1 + \dots + k_n \lambda_n, \quad k_1 + \dots + k_n = k \geq 2.$$

называются *резонансными*. В таком случае говорят, что система (или собственные значения λ) находится в *резонансе порядка k* .

В соответствии с описанным выше алгоритмом все нерезонансные слагаемые могут быть исключены из правой части системы (2) при помощи последовательно применяемых полиномиальных замен. В то же время резонансные слагаемые не могут быть ими исключены, ни каким-либо образом преобразованы.

Нормальной формой системы (1) называется форма, содержащая лишь линейные и резонансные слагаемые. *Нормализующим преобразованием* (вплоть до порядка k) называется последовательность преобразований (3) с полиномиальными коэффициентами (4), приводящих систему к ее нормальной форме (вплоть до слагаемых порядка k).

Важное следствие: количество резонансных слагаемых, а также их показатели определяются исключительно собственными значениями λ матрицы $\mathbf{A}$, образующей линейную часть. Если же дополнительно требуется определение коэффициентов при резонансных слагаемых, необходимо проделать описанные выше преобразования.

Таким образом справедлива **теорема Пуанкаре–Дюлака**: *с помощью полиномиальных преобразований систему (1) можно привести к форме, содержащей лишь линейные и резонансные слагаемые.*

Пример 1. Приведем дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \lambda x + gx^2, \quad \lambda, g = \text{const}, \quad (5)$$

к нормальной форме с точностью до слагаемых второго порядка.

Воспользуемся заменой $x = y + py^2$, где p — искомый коэффициент. Продифференцируем это выражение, после чего подставим $\dot{x}(y, \dot{y})$ и $x(y)$ в (5):

$$\begin{aligned} (1 + 2py)\dot{y} &= \lambda(y + py^2) + g(y + py^2)^2 = \\ &= \lambda y + (\lambda p + g)y^2 + gpy^3 + gp^2y^4. \end{aligned}$$

Разделим уравнение на $1 + 2py$ и разложим его в ряд:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= (1 - 2py + 4p^2y^2 - \dots) (\lambda y + (\lambda p + g)y^2 + gpy^3 + gp^2y^4) = \\ &= \lambda y + (g - \lambda p)y^2 + (2\lambda p - g)py^3 + \dots \end{aligned}$$

Принимая $p = g/\lambda$, исключаем слагаемое второго порядка. Нормальная форма (5) до третьего порядка и нормализующая заме-

на:

$$\dot{y} = \lambda y + \frac{g^2}{\lambda} y^3, \quad x = y + \frac{g}{\lambda} y^2.$$

Упражнение. В указанном выше примере найдите нормальную форму и нормализующую замену вплоть до четвертого порядка.

Пример 2. Дана система уравнений

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + g_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 + g_2(x_1, x_2),$$

где g_1 и g_2 — полиномы порядка два и выше. Какие из соотношений обеспечивают резонанс: 1) $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0$, 2) $\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$, 3) $3\lambda_1 - 4\lambda_2 = 0$? Для каждого случая укажем нормальные формы в новых переменных $x_1, x_2 \rightarrow y_1, y_2$.

1) Резонанс второго порядка: $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Единственное резонансное слагаемое в первом уравнении имеет показатели $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, во втором уравнении резонансных слагаемых нет. Нормальная форма:

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + g_{0,2}^1 y_2^2, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2.$$

2) Минимальный порядок резонанса — четыре: $\lambda_1 = 2\lambda_1 + 2\lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_1 + 3\lambda_2$. Резонансные слагаемые в первом и втором уравнениях находятся из условий $k_2 = 2k_1 - 2$ и $k_2 = 2k_1 + 1$ соответственно. Нормальная форма:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + g_{2,2}^1 y_1^2 y_2^2 + g_{3,4}^1 y_1^3 y_2^4 + \dots, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2 + g_{1,3}^2 y_1 y_2^3 + g_{2,5}^2 y_1^2 y_2^5 + \dots \end{aligned}$$

3) Резонансных слагаемых нет, нормальная форма приводится к линейному виду

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2.$$

Упражнение. Укажите резонансные слагаемые в системе

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 + x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$$

и выпишите ее нормальную форму вплоть до слагаемых третьего порядка.

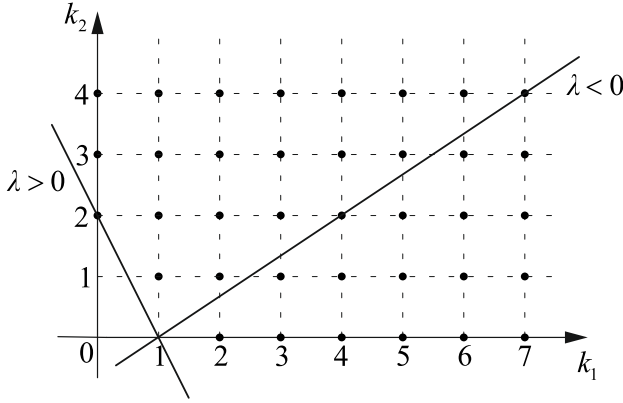


Рис. 1. Прямая $k_2 = \lambda(1 - k_1)$ на плоскости k_1, k_2

Выведем теперь общее правило нахождения резонансных слагаемых для случая двух уравнений ($n = 2$). Резонансные условия в первом и втором уравнениях соответственно:

$$\lambda_1 = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2, \quad \lambda_2 = k_1 \lambda_1 + k_2 \lambda_2.$$

Пусть $\lambda_2 \neq 0$. Для новой переменной $\lambda = \lambda_1 / \lambda_2$ получим эквивалентные условия:

$$k_2 = \lambda(1 - k_1), \quad k_2 = 1 - \lambda k_1.$$

Эти уравнения задают две прямые на плоскости k_1, k_2 , проходящие через точки $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Угол наклона прямых определяется отношением λ . Изобразим на плоскости k_1, k_2 целочисленную решетку, узлы которой удовлетворяют условиям $k_1, k_2 \geq 0, k_1 + k_2 \geq 2$ (рис. 1). Для прямой $k_2 = \lambda(1 - k_1)$ рассмотрим все возможные варианты.

1) λ — комплексное число с ненулевой мнимой частью. Тогда единственное решение $k_1 = 1$ и $k_2 = 0$, следовательно, резонансов нет.

2) $\lambda > 0$. Если $\lambda = m$ — натуральное число большее единицы (рис. 1), то в первом уравнении присутствует резонансное слагаемое порядка $m \geq 2$. Нормальная форма:

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + g_{m,0}^1 y_2^m.$$

Если λ — не целое число, резонансных слагаемых нет.

3) $\lambda \leq 0$. Если λ — рациональное число, то есть представимо в виде $\lambda = -p/q$, где p — целое неотрицательное, а q — натуральное числа, то в первом уравнении присутствует бесконечное количество резонансных слагаемых с показателями $k_1 = 1 + mq$, $k_2 = mp$, где m — произвольное натуральное число. Нормальная форма:

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1 + g_{1+q,p}^1 y_1^{1+q} y_2^p + g_{1+2q,2p}^1 y_1^{1+2q} y_2^{2p} + \dots$$

Случай $\lambda = 0$ соответствует значениям $p = 0$, $q = 1$. Если λ — иррациональное число, прямая пройдет в сколь угодно близкой окрестности бесконечного количества узлов решетки, но ни один узел не пересечет. Поэтому резонансных слагаемых нормальная форма содержать не будет.

Рассуждая аналогичным образом по отношению к прямой $k_2 = 1 - \lambda k_1$, получим, что резонансные слагаемые присутствуют в нормальной форме второго уравнения, только если:

1) $\lambda = 1/m$, где m — произвольное натуральное число, большее единицы:

$$\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + g_{m,0}^2 y_1^m.$$

2) $\lambda = -p/q$, где p — целое неотрицательное, а q — натуральное числа. Тогда нормальная форма второго уравнения имеет бесконечное количество резонансных слагаемых с показателями $k_1 = mq$, $k_2 = 1 + mp$, где m — произвольное натуральное число:

$$\dot{y}_2 = \lambda_2 y_2 + g_{q,1+p}^2 y_1^q y_2^{1+p} + g_{2q,1+2p}^2 y_1^{2q} y_2^{1+2p} + \dots$$

Случаю $\lambda = 0$ отвечают значения $p = 0$, $q = 1$.

Пример 3. С помощью метода нормальных форм найдем поправку к амплитуде и частоте колебаний гармонического осциллятора, возникающие при учете кубической нелинейности (осциллятор Дюффинга):

$$\ddot{x} + \omega^2 x + \alpha x^3 = 0, \quad \omega, \alpha = \text{const.}$$

Представим это уравнение в форме Коши:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega^2 x - \alpha x^3. \quad (6)$$

Собственные значения матрицы, образующей линейную форму: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, i — мнимая единица. Если ограничиться линейным приближением ($\alpha = 0$), система имеет общее решение

$$x(t) = ce^{i\omega t} + \bar{c}e^{-i\omega t}, \quad y(t) = i\omega (ce^{i\omega t} - \bar{c}e^{-i\omega t}),$$

где c — константа интегрирования, $\bar{c}$ — константа, комплексно-сопряженная к c . При $\alpha \neq 0$ эти решения уже не подходят, однако будем далее отталкиваться от них. Сделаем замену $z = ce^{i\omega t}$. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} x &= z + \bar{z}, \quad y = i\omega (z - \bar{z}), \\ z &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{i}{\omega} y \right), \quad \bar{z} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{i}{\omega} y \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Дифференцируя последние два уравнения, подставляя в них равенства (6), а затем выражая правые части через z и $\bar{z}$, приводим систему (6) к форме (2):

$$\dot{z} = i\omega z + \frac{i\alpha}{2\omega} (z + \bar{z})^3, \quad \dot{\bar{z}} = -i\omega \bar{z} - \frac{i\alpha}{2\omega} (z + \bar{z})^3.$$

Так как $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, верно и $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_1 + 2\lambda_2$. Следовательно, имеются два резонансных монома третьего порядка с показателями $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ и $k_1 = 1$, $k_2 = 2$. По теореме Пуанкаре–Дюлака нормальная форма первого уравнения (слагаемые выше третьего порядка здесь и далее отброшены):

$$\dot{\zeta} = i\omega \zeta + \frac{3i\alpha}{2\omega} \zeta^2 \bar{\zeta}. \quad (8)$$

Приведение к форме обеспечивается заменой $z \rightarrow \zeta$:

$$z = \zeta + \frac{\alpha}{4\omega^2} \zeta^3 + p_{2,1}^1 \zeta^2 \bar{\zeta} - \frac{3\alpha}{4\omega^2} \zeta \bar{\zeta}^2 - \frac{\alpha}{8\omega^2} \bar{\zeta}^3, \quad (9)$$

коэффициент $p_{2,1}^1$ может быть выбран произвольно.

Здесь удобно проиллюстрировать, почему нелинейный моном в (8) называется резонансным. Попробуем решить уравнение методом последовательных приближений. Без учета нелинейности имеем решение $\zeta(t) = ce^{i\omega t}$. Подставим его в нелинейную часть:

$$\dot{\zeta} = i\omega \zeta + \frac{3i\alpha}{2\omega} c^2 \bar{c} e^{i\omega t}.$$

Решением этого уравнения является функция

$$\zeta(t) = ce^{i\omega t} + \frac{3i\alpha}{2\omega} c^2 \bar{c} t e^{i\omega t}.$$

Второе слагаемое называется *секулярным*. Оно неограниченно растет во времени, что соответствует резонансу, и явно противоречит идее об уточнении решения, получившегося из линейного приближения. Более того, присутствие неограниченно растущего слагаемого противоречит постановке задачи и физической природе исходного уравнения.

Получение адекватного решения возможно путем учета изменения амплитуды и частоты колебаний. Будем искать его в виде $\zeta(t) = c(t)e^{i\omega t}$. Тогда

$$\dot{c} = \frac{3i\alpha}{2\omega} c^2 \bar{c}.$$

Представим комплексную функцию $c(t)$ в показательной форме:

$$c(t) = \frac{r(t)}{2} e^{i\varphi(t)}.$$

Тогда уравнение разделяется на мнимую и действительную части:

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\varphi} = \frac{3\alpha r^2}{8\omega}.$$

Получаем решение

$$\zeta(t) = \frac{r_0}{2} e^{i(\omega t + \varphi)}, \quad \varphi(t) = \frac{3\alpha r_0^2}{8\omega} t + \varphi_0, \quad r_0, \varphi_0 = \text{const.} \quad (10)$$

Используя первое уравнение (7) и преобразование (9), в котором примем $p_{2,1}^1 = 0$, выразим x через ζ и $\bar{\zeta}$:

$$x = \zeta + \bar{\zeta} + \frac{\alpha}{8\omega^2} (\zeta^3 + \bar{\zeta}^3) - \frac{3\alpha}{4\omega^2} (\zeta^2 \bar{\zeta} + \zeta \bar{\zeta}^2). \quad (11)$$

Подставим сюда решение (10):

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{r_0}{2} (e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}) + \\ & + \frac{\alpha r_0^3}{64\omega^2} (e^{3i(\omega t + \varphi)} + e^{-3i(\omega t + \varphi)}) - \frac{3\alpha r_0^3}{32\omega^2} (e^{i(\omega t + \varphi)} + e^{-i(\omega t + \varphi)}), \end{aligned}$$

после чего, при помощи формулы Эйлера, получим

$$x = r_0 \left(1 - \frac{\dot{\varphi}}{2} \right) \cos((\omega + \dot{\varphi})t + \varphi_0) + \\ + \frac{\dot{\varphi}}{12} \cos(3(\omega + \dot{\varphi})t + 3\varphi_0), \quad \dot{\varphi} = \frac{3\alpha r_0^2}{8\omega}.$$

Упражнение. Используя метод нормальных форм, оцените характер затухания колебаний осциллятора:

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x}^3 + \omega^2 x = 0, \quad \omega, \alpha = \text{const.}$$

3. Метод Биркгофа нормализации гамильтониана

Пусть на симплектическом $2n$ -мерном многообразии M задана гамильтонова система с гамильтонианом $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \quad (12)$$

где $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$, $\mathbf{p} = [p_1, \dots, p_n]^T$ — канонические переменные на M в окрестности положения равновесия $\mathbf{q} = 0$, $\mathbf{p} = 0$ системы (12).

Разложим гамильтониан H в ряд по степеням сопряженных переменных в окрестности положения равновесия:

$$H = H_2 + H_*. \quad (13)$$

Здесь H_2 — квадратичная часть разложения, H_* — полином, содержащий слагаемые разложения более высоких порядков. Несущественная для уравнений движения (12) константа принята за ноль, линейная часть отсутствует в силу того, что разложение проводится в окрестности положения равновесия. Слагаемое H_* можно рассматривать как возмущение, наложенное на линейную систему.

Предполагается, что квадратичная часть H_2 определяет линейную колебательную систему в окрестности положения равновесия². Тогда существуют главные координаты $\boldsymbol{\theta}$ и соответству-

²Это случай общего положения. Однако метод нормализации Биркгофа применим и в тех случаях, когда это не так [9, 10].

ющие им сопряженные импульсы $\mathbf{p}_\theta$, в которых H_2 принимает вид [8]:

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n p_{\theta j}^2 + \omega_j^2 \theta_j^2,$$

где ω_j — частоты главных колебаний. Каноническое преобразование $\boldsymbol{\theta}, \mathbf{p}_\theta \rightarrow \mathbf{q}, \mathbf{p}$

$$q_j = \frac{p_{\theta j}}{\sqrt{\omega_j}} + i\sqrt{\omega_j}\theta_j, \quad p_j = \frac{p_{\theta j}}{\sqrt{\omega_j}} - i\sqrt{\omega_j}\theta_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad (14)$$

масштабирует переменные и переводит их в комплексную плоскость. Это преобразование имеет валентность $c = 2i$, где i — мнимая единица, и приводит квадратичную часть разложения гамильтониана к наиболее удобному для дальнейшего изложения виду:

$$H'_2 = cH_2 = i \sum_{j=1}^n \omega_j q_j p_j.$$

Штрих над гамильтонианом для удобства далее опустим.

Если бы гамильтониан H состоял только из квадратичной части H_2 , то соответствующие ему уравнения Гамильтона были бы представлены в виде системы независимых линейных уравнений и легко интегрировались. Получаемые при этом решения были бы гармоническими колебаниями. Попробуем избавиться от как можно большего количества слагаемых, входящих в H_* . При этом будем использовать канонические полиномиальные преобразования, не меняющие в гамильтониане H слагаемые более низких порядков.

Пусть H_k — однородный полином минимального порядка $k \geq 3$, содержащийся в H_* :

$$H_k = \sum_{i_1, \dots, j_n} h_{i_1, \dots, j_n} q_1^{i_1} \dots q_n^{i_n} p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n}, \quad i_1 + \dots + j_n = k, \quad (15)$$

где $h_{i_1, \dots, j_n}$ — постоянные коэффициенты. Попробуем исключить из гамильтониана H все мономы, входящие в H_k . Для этого будем использовать унивалентное каноническое преобразование

$\mathbf{q}, \mathbf{p} \rightarrow \tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$, получаемые при помощи производящей функции $S(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})$:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}, \quad \tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) = H(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}), \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})), \quad (16)$$

где $\tilde{H}$ — гамильтониан в новых канонических переменных $\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}$.

Возьмем производящую функцию $S = \mathbf{q}\tilde{\mathbf{p}} + S_k(\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{p}})$, где функция S_k — однородный полином порядка k :

$$S_k = \sum_{i_1, \dots, j_n} s_{i_1, \dots, j_n} q_1^{i_1} \dots q_n^{i_n} \tilde{p}_1^{j_1} \dots \tilde{p}_n^{j_n}, \quad i_1 + \dots + j_n = k. \quad (17)$$

Постоянные коэффициенты $s_{i_1, \dots, j_n}$ подберем так, чтобы гамильтониан (13) в новых канонических переменных не содержал слагаемые порядка k . Преобразование (16) отличается от тождественного лишь на слагаемые порядка $k - 1$:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \frac{\partial S_k}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}, \quad \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} + \frac{\partial S_k}{\partial \mathbf{q}}.$$

По теореме о неявной функции у него существует обратное, которое можно представить в виде рядов

$$\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{q}} - \frac{\partial S_k(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})}{\partial \tilde{\mathbf{p}}} + \dots, \quad \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{p}} + \frac{\partial S_k(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} + \dots,$$

троеточием обозначены слагаемые порядка k и выше. Подставляя эту замену в формулу (13), получим

$$\begin{aligned} \tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}) &= i \sum_{j=1}^n \omega_j \tilde{q}_j \tilde{p}_j + \\ &+ i \sum_{j=1}^n \omega_j \left(\tilde{q}_j \frac{\partial S_k}{\partial \tilde{q}_j} - \tilde{p}_j \frac{\partial S_k}{\partial \tilde{p}_j} \right) + H_k(\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}}), \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{p}})) + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

Троеточием обозначены слагаемые выше порядка k .

Для того чтобы в новом гамильтониане $\tilde{H}$ не было слагаемых порядка k , должно выполняться равенство

$$H_k = -i \sum_{j=1}^n \omega_j \left(\tilde{q}_j \frac{\partial S_k}{\partial \tilde{q}_j} - \tilde{p}_j \frac{\partial S_k}{\partial \tilde{p}_j} \right).$$

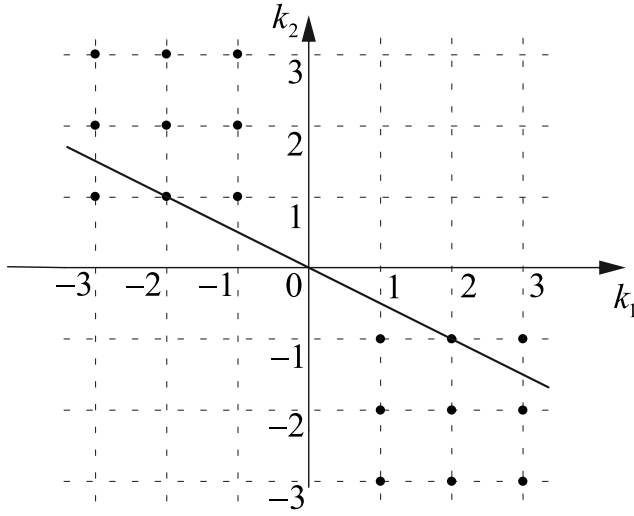


Рис. 2. Прямая $k_2 = -\omega_1 k_1 / \omega_2$ на плоскости k_1, k_2

Это уравнение линейно относительно мономов, входящих в полиномы (15) и (17). Поэтому решение можно искать для каждого монома в отдельности:

$$ih_{i_1, \dots, j_n} \tilde{q}_1^{i_1} \dots \tilde{p}_n^{j_n} = s_{i_1, \dots, j_n} \sum_{j=1}^n \omega_j \left(\tilde{q}_j \frac{\partial \tilde{q}_1^{i_1} \dots \tilde{p}_n^{j_n}}{\partial \tilde{q}_j} - \tilde{p}_j \frac{\partial \tilde{q}_1^{i_1} \dots \tilde{p}_n^{j_n}}{\partial \tilde{p}_j} \right).$$

Выполняя операцию частного дифференцирования и сокращая на $\tilde{q}_1^{i_1} \dots \tilde{p}_n^{j_n}$, получим решение

$$s_{i_1, \dots, j_n} = \frac{ih_{i_1, \dots, j_n}}{\omega_1 (i_1 - j_1) + \dots + \omega_n (i_n - j_n)}, \quad (19)$$

которое существует, только если выражение в знаменателе не обращается в ноль. В противном случае в классе полиномиальных канонических преобразований избавиться от монома с соответствующими показателями нельзя.

Система с гамильтонианом (13) называется *нерезонансной* до порядка k включительно, если для всех целых $k_1, \dots, k_n$ выполняется

$$k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n \neq 0, \quad 0 < |k_1| + \dots + |k_n| \leq k.$$

В противном случае говорят о наличии *резонанса*. Таким образом, решение (19) не существует в двух случаях: если $i_1 = j_1, \dots, i_n = j_n$, то есть моном представляется полиномиальной функцией от переменных $q_1 p_1, \dots, q_n p_n$, или если для некоторых целых $k_1, \dots, k_n$ выполняется *резонансное уравнение*

$$k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0, \quad 0 < |k_1| + \dots + |k_n| = k.$$

Минимальное число k , удовлетворяющее этому уравнению, называется *порядком резонанса*. *Кратностью резонанса* называется число линейно независимых решений резонансного уравнения при указанных условиях.

В качестве примера резонанса рассмотрим случай $n = 2$. Резонансное уравнение записывается в виде

$$k_2 = -\frac{\omega_1}{\omega_2} k_1.$$

Оно выполняется только в том случае, если отношение частот $\omega_1/\omega_2 > 0$ является рациональным числом. На рис. 2 приведен случай отношения частот $\omega_1/\omega_2 = 1/2$, что соответствует резонансу третьего порядка.

Заметим, что вторая сумма в формуле (18) может быть записана в виде скобки Пуассона:

$$\{S_k, \tilde{H}_2\} = i \sum_{j=1}^n \omega_j \left(\tilde{q}_j \frac{\partial S_k}{\partial \tilde{q}_j} - \tilde{p}_j \frac{\partial S_k}{\partial \tilde{p}_j} \right),$$

а значит, решение (19) существует только в случае, если функция S_k не является первым интегралом гамильтоновой системы с гамильтонианом $\tilde{H}_2$. Говоря иначе, из разложения (13) нельзя исключить только те мономы, которые являются первыми интегралами системы с гамильтонианом $\tilde{H}_2$.

Гамильтониан (13) приведен к *нормальной форме Биркгофа* с точностью до слагаемых четного порядка k включительно, если

$$\tilde{H} = \sum_{j=1}^{k/2} \tilde{H}_{2j} + \tilde{H}_* + \dots, \quad \{\tilde{H}_*, \tilde{H}_2\} = 0,$$

где $\tilde{H}_{2j}$ — однородный полином порядка j от переменных $q_1 p_1, \dots, q_n p_n$, слагаемое H_* содержит только резонансные мо-

номы до порядка k включительно, троеточием обозначены слагаемые порядка $k + 1$ и выше.

В силу того что все слагаемые в $\tilde{H}_{2j}$ зависят только от произведения сопряженных переменных, удобно сделать каноническую замену $\tilde{q}, \tilde{p} \rightarrow \varphi, \mathbf{I}$ с валентностью $c = -i$:

$$q_j = \sqrt{I_j} e^{i\varphi_j}, \quad p_j = \sqrt{I_j} e^{-i\varphi_j}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (20)$$

где переменные φ определены от 0 до 2π . Тогда гамильтониан $\tilde{H}$, записанный в нормальной форме Биркгофа, перейдет в гамильтониан $\hat{H} = c\tilde{H}$:

$$\hat{H}(\varphi, \mathbf{I}) = \sum_{j=1}^{k/2} \hat{H}_{2j}(\mathbf{I}) + \hat{H}_*(\varphi, \mathbf{I}) + \dots$$

Если в системе нет резонансов, а слагаемые выше порядка k отбросить, то гамильтониан $\hat{H}$ будет зависеть только от обобщенных импульсов $\mathbf{I}$. Тогда сопряженные переменные $\varphi, \mathbf{I}$ являются для него переменными действие–угол [7, 8]:

$$\dot{\mathbf{I}} = - \sum_{j=1}^{k/2} \frac{\partial \hat{H}_{2j}}{\partial \varphi} = 0, \quad \dot{\varphi} = \sum_{j=1}^{k/2} \frac{\partial \hat{H}_{2j}}{\partial \mathbf{I}} = \omega(\mathbf{I}) = \text{const.}$$

Наличие резонансных слагаемых приводит к появлению углов φ в гамильтониане $\hat{H}$, что затрудняет интегрирование системы.

Представление гамильтониана в нормальной форме можно использовать для приближенного аналитического интегрирования уравнений Гамильтона в окрестности положения равновесия. Рассмотренный метод Биркгофа нормализации гамильтонианов не лишен недостатков, главным из которых является процедура обращения рядов. Более продвинутым методом нормализации является, например, метод Депри–Хори [12].

Пример 1. Рассмотрим слабозмущенный гармонический осциллятор

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^{m-1} = 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

считая, что 1) $m = 3$, 2) $m = 4$. Приведем гамильтониан этой системы к нормальной форме Биркгофа до слагаемых порядка m включительно, а также оценим частоту и период колебаний нелинейного осциллятора.

Гамильтониан системы

$$H_x(x, p_x) = \frac{p_x^2 + x^2}{2} + \frac{\varepsilon x^m}{m}.$$

Каноническим преобразованием $x, p_x \rightarrow q, p$ (14):

$$q = p_x + ix, \quad p = p_x - ix$$

с валентностью $c = 2i$ он приводится к виду

$$H(q, p) = i \left(qp + \frac{\varepsilon(q + p)^m}{2^{m-1}m} \right).$$

Система не имеет резонансных слагаемых, следовательно, гамильтониан в нормальной форме Биркгофа, записанный вплоть до порядка m , будет зависеть только от действия I .

1) Нормальная форма Биркгофа вплоть до слагаемых порядка три:

$$\tilde{H} = i\tilde{q}\tilde{p} + \dots,$$

где троеточием обозначены слагаемые выше третьего порядка. Преобразованием (20) гамильтониан приводится к виду

$$\hat{H} = I + \dots$$

Следовательно, частота и период осциллятора с точностью до рассматриваемого порядка не меняются:

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = 1, \quad T_1 = 2\pi.$$

2) Нормальная форма вплоть до слагаемых четвертого порядка:

$$\tilde{H} = i \left(\tilde{q}\tilde{p} + \frac{3\varepsilon}{16}(\tilde{q}\tilde{p})^2 + \dots \right), \quad \hat{H} = I + \frac{3\varepsilon}{16}I^2 + \dots,$$

где троеточием обозначены слагаемые выше порядка четыре. Отбрасывая их, запишем каноническое уравнение для угла:

$$\dot{\varphi} = \omega_2(I) = 1 + \frac{3\varepsilon}{8}I.$$

Оценка частоты и периода колебаний для случая $m = 4$:

$$\omega_2 = 1 + \frac{3\varepsilon}{8}I, \quad T_2 = 2\pi \left(1 - \frac{3\varepsilon}{8}I \right).$$

Упражнение. Выпишите нормальную форму гамильтониана, получите оценку частоты и периода колебаний осциллятора в предыдущем примере для случая $m = 6$.

Пример 2. Математический маятник длины l и массы m вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\Omega < \sqrt{g/l}$. Приведем гамильтониан системы к нормальной форме в окрестности нижнего положения равновесия вплоть до слагаемых четвертого порядка малости, а также укажем нормализующее преобразование.

Гамильтониан маятника имеет вид

$$H_\varphi(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos \varphi) - \frac{m\Omega^2 l^2 \sin^2 \varphi}{2}.$$

Разложим его в окрестности положения равновесия вплоть до слагаемых четвертого порядка малости:

$$H_\varphi = \frac{1}{2ml^2} (p_\varphi^2 + \omega_\varphi^2 \varphi^2) + \lambda \varphi^4 + \dots, \\ \omega_\varphi^2 = m^2 g l^3 \left(1 - \frac{\Omega^2 l}{g}\right), \quad \lambda = \frac{m\Omega^2 l^2}{6} \left(1 - \frac{g}{4\Omega^2 l}\right).$$

Каноническое преобразование $\varphi, p_\varphi \rightarrow q, p$ (14)

$$q = \frac{p_\varphi}{\sqrt{\omega_\varphi}} + i\sqrt{\omega_\varphi}\varphi, \quad p = \frac{p_\varphi}{\sqrt{\omega_\varphi}} - i\sqrt{\omega_\varphi}\varphi$$

приводит квадратичную часть к нормальной форме:

$$H = i\omega qp + i\alpha (q - p)^4 + \dots, \quad \omega = \frac{\omega_\varphi}{ml^2}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{8\omega_\varphi^2}.$$

Так как резонансов в системе нет, нормальная форма до четвертого порядка будет выглядеть так:

$$\tilde{H} = i\omega \tilde{q}\tilde{p} + 6i\alpha (\tilde{q}\tilde{p})^4 + \dots$$

При этом замена, нормализующая гамильтониан до четвертого порядка:

$$\begin{aligned} S_4(\tilde{q}, \tilde{p}) &= -\frac{\alpha}{4\omega} (\tilde{q}^4 - 8\tilde{q}^3\tilde{p} + 8\tilde{q}\tilde{p}^3 - \tilde{p}^4), \\ q &= \tilde{q} - \frac{\partial S_4}{\partial \tilde{p}} = \tilde{q} - \frac{\alpha}{\omega} (2\tilde{q}^3 - 6\tilde{q}\tilde{p}^2 + \tilde{p}^3), \\ p &= \tilde{p} + \frac{\partial S_4}{\partial \tilde{q}} = \tilde{p} - \frac{\alpha}{\omega} (\tilde{q}^3 - 6\tilde{q}^2\tilde{p} + 2\tilde{p}^3). \end{aligned}$$

Коэффициенты в функции S_4 определены по формуле (19).

Упражнение. Уравнение движения светового луча в метрике Шварцшильда может быть записано в виде уравнения Бине [13]:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u - \frac{3}{2}au^2 = 0,$$

где $u = 1/r$ — переменная Бине, r, φ — полярные координаты, центр которых совпадает с центром притягивающего тела, $a = \text{const}$ — радиус Шварцшильда. Получите гамильтониан этой системы и приведите его к нормальной форме Биркгофа до слагаемых четвертого порядка малости включительно. Получите нормализующее преобразование.

Пример 3. Рассмотрим систему, состоящую из двух связанных осцилляторов, с гамильтонианом $H = H_2 + H_*$, где

$$H_2(q_1, q_2, p_1, p_2) = \frac{p_1^2 + \omega^2 q_1^2}{2} + \frac{p_2^2 + \omega^2 q_2^2}{2}, \quad \omega = \text{const},$$

$H_*(q_1, q_2, p_1, p_2)$ — часть гамильтониана, содержащая слагаемые более высоких порядков [14]. Приведя гамильтониан к нормальной форме Биркгофа до слагаемых четвертого порядка включительно, построим фазовый портрет системы и определим влияние нелинейных слагаемых на динамику осцилляторов.

Квадратичная часть H_2 преобразованием (14)

$$q_1, q_2, p_1, p_2 \rightarrow q'_1, q'_2, p'_1, p'_2$$

приводится к виду

$$H'_2 = i\omega (q'_1 p'_1 + q'_2 p'_2).$$

Выполняется резонансное соотношение

$$k_1\omega + k_2\omega = 0, \quad |k_1| + |k_2| > 0, \quad k_1 = i_1 - j_1, \quad k_2 = i_2 - j_2.$$

Так как $|k_1| = |k_2|$, резонансные мономы имеют четный порядок. Определим показатели канонических переменных в резонансных мономах четвертого (минимального) порядка. Они удовлетворяют двум уравнениям:

$$\begin{aligned} i_1 - j_1 + i_2 - j_2 &= 0, & i_1 + j_1 + i_2 + j_2 &= 4, \\ |i_1 - j_1| + |i_2 - j_2| &> 0, & i_1, i_2, j_1, j_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем систему

$$i_1 + i_2 = 2, \quad j_1 + j_2 = 2,$$

имеющую с учетом указанных неравенств восемь решений, приведенных в таблице.

i_1	2	2	2	1	1	0	0	0
i_2	0	0	0	1	1	2	2	2
j_1	2	1	0	2	0	2	1	0
j_2	0	1	2	0	2	0	1	2

Гамильтониан $H' = H'_2 + H'_*$ приводится к нормальной форме Биркгофа вплоть до слагаемых четвертого порядка малости при помощи унивалентного канонического преобразования $q'_1, q'_2, p'_1, p'_2 \rightarrow \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$:

$$\tilde{H} = \tilde{H}_2 + \tilde{H}_4 + \tilde{H}_* + \dots$$

Для более удобной записи нормализованного гамильтониана выполним каноническое преобразование $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 \rightarrow \varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2$ (20), а слагаемые, обозначенные выше троеточием, отбросим:

$$\begin{aligned} \hat{H}(\varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2) &= \omega I_1 + \omega I_2 + aI_1^2 + bI_1I_2 + cI_2^2 + \\ &+ dI_1I_2 \cos 2(\varphi_1 - \varphi_1) + (eI_1 + fI_2) \sqrt{I_1I_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты a, b, c, d, e, f — некоторые константы. Слагаемые в этой формуле сгруппированы так, чтобы гамильтониан $\hat{H}$ имел наиболее общий действительный вид.

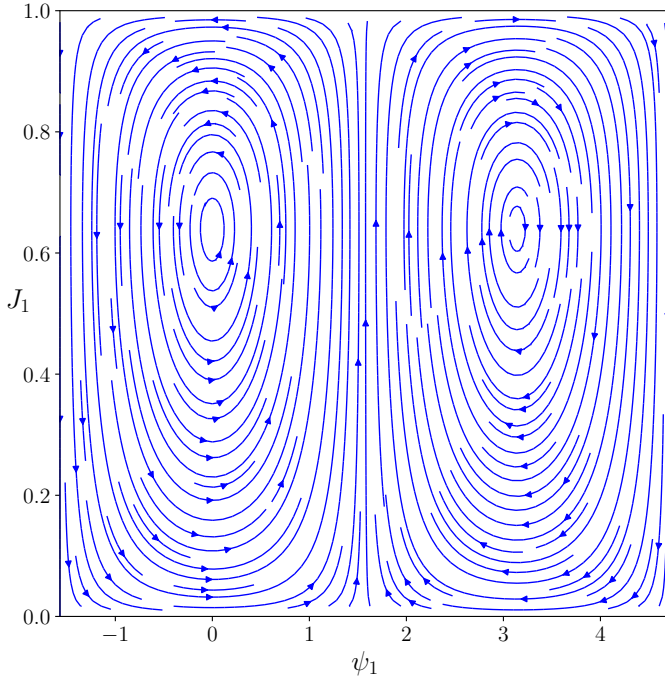


Рис. 3. Фазовый портрет системы с гамильтонианом $\hat{H}'$

Важным является обстоятельство, что гамильтониан $\hat{H}$, кроме импульсов I_1, I_2 , зависит лишь от разности углов $\varphi_1 - \varphi_2$, так называемой резонансной фазы. Это позволяет понизить порядок системы до одной степени свободы, выполнив еще одно унивалентное каноническое преобразование $\varphi_1, \varphi_2, I_1, I_2 \rightarrow \psi_1, \psi_2, J_1, J_2$:

$$\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_2, \quad \psi_2 = \varphi_2, \quad J_1 = I_1, \quad J_2 = I_1 + I_2.$$

Окончательно получаем гамильтониан

$$\begin{aligned} \hat{H}'(\psi_1, \psi_2, J_1, J_2) = & \omega J_2 + a' J_1^2 + b' J_1 J_2 + c' J_2^2 + \\ & + d' J_1 (J_2 - J_1) \cos 2\psi_1 + (e' J_1 + f' J_2) \sqrt{J_1 (J_2 - J_1)} \cos \psi_1, \end{aligned}$$

где a', b', c', d', e', f' — вновь некоторые константы.

Координата ψ_2 в гамильтониане $\hat{H}'$ циклическая, следовательно, сопряженный ей импульс J_2 — первый интеграл системы. Величины J_2 и J_1 можно интерпретировать как суммарную энергию двух осцилляторов и энергию первого осциллятора соответственно. Выберем уровень интеграла $J_2 = 1$. Тогда импульсы находятся в диапазоне $0 \leq J_1, J_2 \leq 1$. Для численного построения примера типичного фазового портрета системы зафиксируем константы:

$$a' = b' = d' = 0, \quad e' = f' = 1.$$

В результате получаем гамильтониан системы с одной степенью свободы:

$$\hat{H}'(\psi_1, J_1) = (J_1 + 1)\sqrt{J_1(1 - J_1)} \cos \psi_1.$$

Ему соответствуют уравнения Гамильтона:

$$\dot{\psi}_1 = \frac{(1 + J_1 - 4J_1^2) \cos \psi_1}{2\sqrt{J_1(1 - J_1)}}, \quad \dot{J}_1 = (J_1 + 1)\sqrt{J_1(1 - J_1)} \sin \psi_1.$$

Фазовый портрет этой системы изображен на рис. 3. Координата ψ_1 интерпретируется как разность фаз осцилляторов, а импульсы $I_1 = J_1, I_2 = 1 - J_1$ как их энергии. По фазовому портрету видно, что переменная $I_1 = J_1$ при определенных уровнях энергии $\hat{H}'$ меняется от значений $J_1 \approx 0$ к значениям $J_1 \approx 1$ — имеют место нелинейные биения, заключающиеся в перекачке энергии от одного осциллятора к другому. При этом происходит смена разности фаз от $-\pi/2$ к $\pi/2$. Заметим, что в системе также присутствует положение равновесия, соответствующее точке $\psi_1 = 0, J_1 = \left(1 + \sqrt{17}\right)/8$.

Упражнение. Приведите гамильтониан $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$ системы, состоящей из двух связанных осцилляторов, к нормальной форме Биркгофа до слагаемых четвертого порядка включительно:

$$H = H_2 + H_*, \quad H_2 = \frac{p_1^2 + \omega^2 q_1^2}{2} + \frac{p_2^2 + 3\omega^2 q_2^2}{2}, \quad \omega = \text{const.}$$

Литература

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва : МЦНМО, 2012. 344 с.
2. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2002. 561 с.
3. *Nayfeh Ali H.* The Method of Normal Forms. 2nd, Updated and Enlarged Edition. WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2011. 342 p.
4. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1978. 304 с.
5. *Брюно А.Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. Москва : Наука, 1979. 252 с.
6. *Ахмеров Р.Р., Садовский Б.Н.* Очерки по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. <http://w.ict.nsc.ru/books/textbooks/akhmerov/code/>
7. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. 3-е изд. Москва : Физматлит, 2008. 304 с.
8. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Москва–Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2007. 592 с.
9. *Журавлев В.Ф., Петров А.Г., Шундерюк М.М.* Избранные задачи гамильтоновой механики. Изд. стереотип. Москва : URSS, 2021. 304 с.
10. *Маркеев А.П.* О преобразовании Биркгофа в случае полного вырождения квадратичной части функции Гамильтона // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11, № 2. С. 343–352.
11. *Барбашова Т.Ф., Кугушев Е.И., Попова Т.В.* Теоретическая механика в задачах. Лагранжева механика. Гамильтонова механика : учебное пособие. Москва : МЦНМО, 2013. 391 с.
12. *Гребеников Е.А.* Метод усреднения в прикладных задачах. Москва : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 256 с.
13. *Ханукаев Ю.И.* Введение в теоретическую механику : учебное пособие. Москва : МФТИ, 2017. 240 с.
14. *Dario Bambusi* An introduction to Birkhoff normal form. Department of Mathematics, University of Milan. 2014. 15 с. <http://users.mat.unimi.it/users/bambusi/pedagogical.pdf>

Учебное издание

МЕТОДЫ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ПУАНКАРЕ И БИРКГОФА

Учебно-методическое пособие
по курсу
Аналитическая механика

Составитель
Сахаров Александр Вадимович

Редактор *И. А. Волкова*. Корректор *Н. Е. Кобзева*

Подписано в печать 25.07.2022. Формат $60 \times 84 \frac{1}{16}$. Усл. печ. л. 1,75.
Уч.-изд. л. 1,25. Тираж 20 экз. Заказ № 130.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru

Для заметок