

УДК 519.179.1 + 519.174

DOI: 10.53815/20726759\_2021\_13\_3\_23

*М. Б. Ахмеджанова*

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

## Раскраски би-однородных гиперграфов

Рассматриваются би-однородные гиперграфы, т.е. такие гиперграфы, в которых размеры ребер бывают двух типов. Для гиперграфа  $H$  пусть  $f(H)$  равно математическому ожиданию количества одноцветных ребер, когда синий и красный цвет присваивается каждой вершине независимо с вероятностью  $1/2$ . Известно, что если минимальный размер ребра в неоднородном гиперграфе равен  $k$  и  $f(H) < C \log k$ , то такой гиперграф  $H$  можно правильно раскрасить в два цвета. В работе мы улучшаем оценку на функцию  $f(H)$  рассматривая раскраску, при которой в би-однородном гиперграфе  $H = (V, E_1, E_2)$  нет красных ребер из  $E_1$  и одновременно нет синих ребер из  $E_2$ .

**Ключевые слова:** гиперграф, правильная раскраска, неоднородные гиперграфы.

*М. В. Akhmedjanova*

Moscow Institute of Physics and Technology

## Biuniform hypergraph coloring

The paper deals with biuniform hypergraphs, i.e. hypergraphs of which edges are of two sizes. For the hypergraph  $H$ , let  $f(H)$  be an expected value of the number of monochromatic edges when blue and red colors are assigned to each vertex independently with probability  $1/2$ . It is known that if the minimum edge size is at least  $k$  and  $f(H) < C \log k$ , then the proper coloring for  $H$  exists. In this paper, we consider  $f(H)$  for a coloring of the biuniform hypergraph  $H = (V, E_1, E_2)$  when there are no either red edges from  $E_1$  or blue ones from  $E_2$ .

**Key words:** hypergraph, proper coloring, biuniform hypergraph.

### 1. Введение

#### 1.1. Основные определения

$n$ -однородным гиперграфом называется гиперграф, в котором все ребра имеют размер, равный  $n$ , т.е. в каждом ребре ровно  $n$  вершин. Би-однородным гиперграфом  $H = (V, E_1, E_2)$  называют гиперграф, в котором все ребра из  $E_1$  имеют один размер ребра, а все ребра из  $E_2$  – другой. Ребро  $e$  гиперграфа  $H$  называется одноцветным, если все его вершины окрашены в один цвет. Правильной раскраской назовем раскраску множества вершин, при которой каждое ребро не является одноцветным. Хроматическим числом гиперграфа,  $\chi(H)$ , называется минимальное число цветов, требуемое для правильной раскраски.

## 1.2. Математического ожидание и хроматическое число

Одним из классических примеров задачи теории раскрасок гиперграфов является задача Эрдеша–Хайнала о нахождении величины  $m(n)$ , равной минимально возможному количеству ребер гиперграфа в классе  $n$ -однородных гиперграфов с хроматическим числом больше двух [5]. На сегодняшний день лучшими оценками величины  $m(n)$  являются оценка Радхакришнана–Сринивасана [9]  $c_1 \sqrt{\frac{n}{\log n}} 2^n < m(n)$  и оценка Эрдеша [4]  $m(n) < \frac{e \log 2}{4} n^2 2^n$ .

Эрдеш и Ловас [6] заметили, что поиск величины  $m(n)$  связан с нахождением минимума функции  $f(H) = \sum_{e \in E} 2^{-n+1}$  по всем гиперграфам  $H$ , у которых  $\chi(H) > 2$ .

В случае правильных двухцветных раскрасок неоднородных гиперграфов изучается функция  $f(H) = \sum_{e \in E} 2^{-|e|+1}$ . Так, впервые Беку [1] удалось доказать, что *если минимальный размер неоднородного гиперграфа  $H$  хотя бы  $k$  и  $f(H) < \Theta(\log^* k)$ , то  $H$  можно правильно раскрасить в два цвета*. В формулировке Бека [1]  $\log^* k$  обозначает обратную функцию по отношению к функции  $2 \uparrow k$  (башня из  $k$  двоек). В 2008 году Лу анонсировал доказательство оценки  $\frac{\log k}{\log \log k}$ , но, к сожалению, в нем нашли ошибку. В 2018 году Дюрай, Гутовский и Козик [2] доказали оценку  $C \log k$ , и на сегодняшний день она самая наилучшая из известных для общего случая. В частном случае для простых неоднородных гиперграфов известна оценка  $\sqrt{k}$ , доказанная Шабановым [10].

Другим интересным направлением является получение верхних оценок для функции  $f(H)$ . Из результата Эрдеша [4] следует, что существует  $k$ -однородный гиперграф с  $\chi(H) > 2$ , у которого математическое ожидание количества одноцветных ребер равно  $Ck^2$ . Данную оценку пытались улучшить много лет, но пока никому не удалось. Некоторые исследователи выдвигали гипотезу, что данную оценку можно улучшить, если рассматривать неоднородные гиперграфы. Однако на сегодняшний день пока таких результатов не известно. Дюрай, Козик и Шабанов [3] недавно показали, что случайный однородный гиперграф с числом ребер  $|E| < (1-\varepsilon) \frac{e \ln(2)}{4} k^2 2^k$  почти наверное является 2-раскрашиваемым, т.е. имеет хроматическое число, равное двум. Среди явных конструкций гиперграфов, которые нельзя правильно раскрасить в два цвета, известны оценка Гебауэр [7]  $2^{k+\Theta(k^{2/3})}$  и впоследствии немного улучшенная на основе оценки Гебауэр оценка Гутовского, Дюрая и Козика [2]  $2^{k+\Theta((k \log(k))^{1/2})}$ .

## 1.3. Постановка задачи и наш результат

Поскольку над задачей оценивания функции  $f(H)$  работало много известных математиков, но нижних оценок лучше логарифма, а верхних оценок лучше квадратичной функции получено не было, мы решили рассмотреть очень естественное обобщение правильной раскраски на случай би-однородных гиперграфов.

По аналогии с задачами из теории Рамсея, раскраску вершин би-однородного гиперграфа  $H = (V, E_1, E_2)$  мы решили называть *рамсеевской*, если нет красных ребер из  $E_1$  и одновременно нет синих ребер из  $E_2$ . Для данного типа раскрасок нами получен следующий результат.

**Теорема 1.** Пусть  $H = (V, E_k, E_n)$  – би-однородный гиперграф с размерами ребер  $k$  и  $n$ , соответственно. Пусть выполнено следующее соотношение:

$$\frac{|E_k|}{2^k} + \frac{|E_n|}{2^n \sqrt{n} / \log^3 n} < 0.2 \cdot \frac{\log n}{\log \log n}.$$

Если  $2 \leq k < \frac{n}{\log^2 n}$ , то для  $H$  существует рамсеевская раскраска.

**Следствие 2.** Пусть  $H = (V, E_k, E_n)$  – би-однородный гиперграф, с размерами ребер  $k$  и  $n$ , соответственно, и пусть существует  $p \in (\frac{100 \log \log n}{k}, 1 - \frac{100 \log n}{n})$ , для которого

$$\frac{|E_k|}{p^k} + \frac{|E_n|}{(1-p)^n \sqrt{n} / \log^2 n} < \log n.$$

Если  $2 \leq k < \frac{n}{\log^2 n}$ , то для  $H$  существует рамсеевская раскраска.

## 2. Алгоритм раскраски

### Этап 1. Случайная раскраска

Присвоим каждой вершине независимо от остальных вес  $\sigma(v)$ , где  $\sigma(v)$  – случайная величина с равномерным распределением  $U(0, 1)$ . С вероятностью 1 нет двух вершин с одинаковыми весами. Все вершины, вес которых меньше, чем  $1/2$ , покрасим в красный цвет, а все вершины, вес которых не меньше, чем  $1/2$ , покрасим в синий цвет. Получившуюся раскраску обозначим через  $C_1$ .

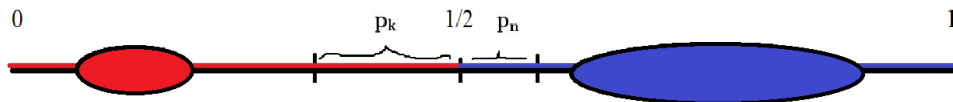


Рис. 1. Короткие красные  $e \in E_k$  и синие  $f \in E_n$  ребра в раскраске  $C_1$

Введем понятие «коротких ребер». Пусть  $p_k$  и  $p_n$  – некоторые функции, которые мы определим позже. Назовем ребро  $e \in E_k$  (аналогично  $f \in E_n$ ) *коротким*, если все его вершины имеют вес меньше, чем  $1/2 - p_k$  (больше, чем  $1/2 + p_n$ ). Назовем ребро  $e \in E_k$  *почти красным*, если все, кроме может быть одной вершины, покрашены в красный цвет. Соответственно, *красными из  $E_k$  (синими из  $E_n$ ) ребрами* мы называем  $e \in E_k$  ( $f \in E_n$ ) ребра, все вершины которых покрашены в красный (синий) цвет.

### Этап 2. Перекраска красных ребер из $E_k$

Пусть  $v_1, v_2, \dots, v_m$  – вершины гиперграфа, записанные в порядке  $\sigma$ , т.е.  $\sigma(v_1) < \sigma(v_2) < \dots < \sigma(v_m)$ . Мы перебираем вершины, начиная с  $v_1$ , и если текущая вершина, назовем ее  $v_{cur}$ , лежит в одноцветном в текущей раскраске красном ребре  $e \in E_k$ , все остальные вершины которого имеют вес меньше, чем  $\sigma(v_{cur})$ , то перекрашиваем  $v_{cur}$  в синий цвет и переходим к следующей вершине. Ребро  $e$ , из-за которого была перекрашена  $v_{cur}$ , будем называть *причиной для перекраски  $v_{cur}$* . Обозначим раскраску, получившуюся после этапа 2, через  $C_2$ .

### Этап 3. Перекраска синих ребер из $E_n$

В каждом синем ребре  $e \in E_n$  перекрашиваем в красный из неперекрашенных на этапе 2 самую легкую из вершин.

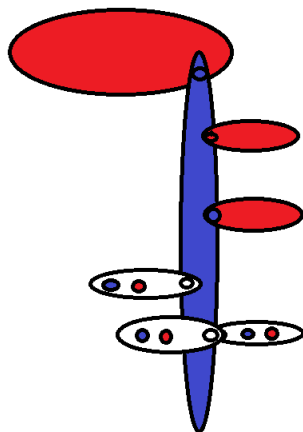


Рис. 2. Красное в раскраске  $C_3$  ребро  $e \in E_k$  и ребро  $f \in E_n$ , которое стало причиной для перекраски самой тяжелой из перекрашенных вершин в  $e$

Далее мы опишем конструкцию, которая была предложена Гутовским, Дюраем и Козиком в их совместной работе [2]. В дальнейшем данная конструкция позволит нам оценить вероятность появления одноцветных синих ребер.

### 3. Вспомогательный гиперграф

**Утверждение 1.** Пусть на втором этапе алгоритма оказалось так, что  $|f \cap e| > 1$  и ребро  $e$  является причиной для перекраски некоторой вершины  $v \in f \cap e$ . Тогда  $f \in E_n$  никогда не станет синим.

*Доказательство.* Согласно алгоритму,  $v$  является самой тяжелой вершиной в ребре  $e$ . Пусть  $w$  – любая другая вершина из пересечения  $f \cap e$ . Тогда если ребро  $f$  стало синим, то  $w$  должна была перекраситься в синий раньше, чем  $v$ , но в таком случае ребро  $e$  не может быть причиной для перекраски  $v$ . Противоречие.  $\square$

*Вспомогательный гиперграф.* Утверждение 3 позволяет нам рассмотреть следующую конструкцию. Для каждого ребра  $f \in E_n$  определим  $(k-1)$ -однородный гиперграф  $H_f$  на множестве вершин  $V \setminus f$ . Для каждого ребра  $e \in E_k$ , имеющего ровно одну общую вершину с  $f$  (т. е.  $|f \cap e| = 1$ ), мы кладем  $e_f = e \setminus (f \cap e)$ . Таким образом, мы определяем набор ребер  $H_f$  как множество  $\{e_f : e \in E_k, |f \cap e| = 1\}$ . Поскольку  $e_f$  может совпадать с  $e'_f$ , для разных ребер  $e$  и  $e'$ , то  $H_f$  является мультигиперграфом.

Обратим внимание, что всякий раз когда мы фиксируем цвета вершин в  $H_f$ , предполагая, что ребро  $f$  стало синим в раскраске  $C_2$ , то в ребре  $f$  мы можем однозначно выбрать множество вершин, которые заведомо были синими в изначальной раскраске  $C_1$ . Почему так?

Назовем вершину  $v \in f$  *опасной для ребра  $f$* , если существует  $e_f \in H_f : (e_f \cup v) \in E_k$  и  $e_f$  красного цвета. Только опасные вершины могли не быть синими в раскраске  $C_1$ .

Для каждого ребра  $f$  будем обозначать множество его опасных вершин через  $\mathcal{R}_f$ .

### 4. Доказательство Теоремы 1

Пусть  $H = (V, E_k, E_n)$  – би-однородный гиперграф, с  $|E_k| = \frac{1}{5}e_k 2^k$  и  $|E_n| = \frac{1}{5}e_n 2^n$ . Значение  $e_k$  и  $e_n$  будет определено позже, пока лишь будем требовать, чтобы  $k \cdot \frac{\log e_n}{n} < \frac{\log 2}{2}$ . Применим к  $H$  Алгоритм из раздела 2 с  $p_k = \frac{\log e_k}{2k}$  и  $p_n = \frac{\log e_n}{2n}$ . Несложно посчитать, что математическое ожидание почти красных ребер не превосходит  $\frac{k \cdot e_k}{5}$ . Далее заметим, что с вероятностью не меньше, чем  $\frac{1}{5}$  в случайной равномерной раскраске не будет коротких ребер и почти красных ребер будет не больше, чем  $\frac{k \cdot e_k}{2}$ . Далее будем рассматривать только такие исходы.

Предположим, что алгоритм не сработал. Несложно проверить, что в этом случае на этапе 3 должны были появиться красные ребра из  $E_k$ . Пусть  $e$  – одно из таких ребер. Согласно алгоритму, в ребре  $e$  есть перекрашенные на этапе 2 вершины, выберем среди них самую тяжелую вершину, вершину  $v$ . Для данной вершины  $v$  возьмем синее в раскраске  $C_2$  ребро  $f \in E_n$ , которое стало причиной для перекраски  $v$ . Назовем такую пару ребер  $(e, f)$  *опасной*. Рассмотрим гиперграф  $H_f$ . Зафиксируем некоторую раскраску  $H_f$ . Как только мы зафиксировали раскраску, мы можем определить опасные и не опасные вершины в ребре  $f$ , что позволяет нам оценить условную вероятность того, что пара ребер  $(e, f)$  опасная при условии, что количество опасных вершин в ребре  $f$  равно  $r$  и  $\sigma(v) = y$ :

$$\left(\frac{1}{2} + p_n\right)^{k-1} \left(\frac{1-y}{2}\right)^{n-r-1} \left(\frac{1}{2} + p_k\right)^r. \quad (1)$$

В (1) мы также воспользовались тем, что алгоритм построен таким образом, что если в финальной раскраске нет коротких ребер, то тогда вес всех опасных вершин сильно

ограничен. Интегрируя (1) по всех  $y \in (0, p_2)$ , мы получаем следующую оценку условной вероятности:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((e, f) \text{ опасная пара} \mid |\mathcal{R}_f| = r) &\leq \int_0^{p_n} \left(\frac{1}{2} + p_n\right)^{k-1} \left(\frac{1-y}{2}\right)^{n-r-1} \left(\frac{1}{2} + p_k\right)^r dy \leq \\ &\leq \frac{p_n \cdot e^{2kp_n} e^{2p_k r}}{2^{k+n-2}} = \frac{\log e_n \cdot e^{\frac{r \log e_k}{k}}}{n \cdot 2^{n+k-2}}, \end{aligned}$$

где в конце мы воспользовались тем, что  $2kp_n < \log 2$ .

Количество опасных вершин не может быть больше, чем количество почти красных ребер, имеющих с ребром  $f$  ровно одну вершину. Отсюда,  $\mathbb{E}|\mathcal{R}_f| \leq \frac{ek}{5}$ . С другой стороны, мы установили, что с большой вероятностью всех почти красных ребер, не только которые пересекаются с ребром  $f$ , не больше, чем  $\frac{ke_k}{2}$ . Поэтому для перехода от условной вероятности к безусловной достаточно просуммировать по всем  $r \leq \frac{ke_k}{2}$ . Итак,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((e, f) \text{ опасная пара}) &= \sum_{r \leq \frac{ke_k}{2}} \frac{\log e_n \cdot e^{\frac{r \log e_k}{k}}}{n \cdot 2^{n+k-2}} \cdot \mathbb{P}(|\mathcal{R}_f| = r) \leq \\ &\leq \frac{\log e_n}{n \cdot 2^{n+k-2}} \cdot \mathbb{E} \left( e^Y \mid Y < \frac{ek \log e_k}{2} \right), \quad \text{где} \quad Y = \frac{|\mathcal{R}_f| \log e_k}{k}. \end{aligned}$$

Математическое ожидание  $e^Y$  может быть оценено в силу выпуклости функции экспоненты и условия, что  $\mathbb{E}Y = \frac{\log e_k \cdot \mathbb{E}|\mathcal{R}_f|}{k} \leq \frac{ek \log e_k}{5k}$ . Окончательно получаем, что

$$\mathbb{P}(e \in E_k \text{ красное}) \leq \sum_{f \in E_n} \frac{\log e_n}{n \cdot 2^{k+n-2}} \cdot \frac{\exp\{\frac{ek \log e_k}{2}\}}{k} \leq \frac{e_n \log e_n \exp\{\frac{ek \log e_k}{2}\}}{5n \cdot 2^{k-2} k}. \quad (2)$$

Подставляя  $e_k = \frac{\log(n)}{\log \log n}$  и  $e_n = \frac{\sqrt{n}}{\log^2 n}$ , мы получаем, что искомая вероятность в (2) меньше, чем  $\frac{1}{5|E_k|}$ , следовательно, с положительной вероятностью существует рамсеевская раскраска. Теорема 1 доказана.

Поскольку мы могли красить на этапе 1 необязательно равномерно, то константа  $1/2$  может быть заменена на любое  $p \in (0, 1)$ . Также правая часть в Теореме 1 может быть улучшена до  $\log n$ . Таким образом, имеет место быть следующее утверждение, которое мы приводим здесь без доказательства.

**Следствие 3.** Пусть  $H = (V, E_k, E_n)$  – би-однородный гиперграф, с размерами ребер  $k$  и  $n$  соответственно, и пусть существует  $p \in (\frac{100 \log \log n}{k}, 1 - \frac{100 \log n}{n})$ , для которого:

$$\frac{|E_k|}{p^k} + \frac{|E_n|}{(1-p)^n \sqrt{n} / \log^2 n} < \log n.$$

Если  $2 \leq k < \frac{n}{\log^2 n}$ , то для  $H$  существует рамсеевская раскраска.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90029. Автор является победителем конкурса «Молодая математика России» и выражает благодарность его спонсорам и жюри.

## Литература

1. Beck J. On three-chromatic hypergraphs // Discrete Math. 1978. N 29. P. 127–137.
2. Duraj L., Gutowski G., Kozik J. A note on two-colorability of nonuniform hypergraphs // ICALP. 2018. N 46. P. 1–13.

3. *Duraj L., Kozik J., Shabanov D.* Random hypergraphs and property B // Eur. J. Comb. 2021. N 91. P. 103205.
4. *Erdős P.* On a combinatorial problem. II // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1964. N 15:3–4. P. 445–447.
5. *Erdős P., Hajnal A.* On a property of families of sets // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1961. N 12:1–2. P. 87–123.
6. *Erdős P., Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and Finite Sets, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. 10, Amsterdam : North Holland, 1973. P. 609–627.
7. *Gebauer H.* On the construction of 3-chromatic hypergraphs with few edges // Journal of Combinatorial Theory. Series A. 2013. N 120:7. P. 1483–1490.
8. *Kozik J.* Improving Gebauer’s Construction of 3-Chromatic Hypergraphs with Few Edges // Proceedings of the 48th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, 2021.
9. *Radhakrishnan J., Srinivasan A.* Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring // Random Structures and Algorithms. 2000. N 16:1. P. 4–32.
10. *Shabanov D.* Around Erdős-Lovasz problem on colorings of non-uniform hypergraphs // Discrete Math. 2015. N 338:11. P. 1976–1981.

## References

1. *Beck J.* On three-chromatic hypergraphs. Discrete Math. 1978. N 29. P. 127–137.
2. *Duraj L., Gutowski G., Kozik J.* A note on two-colorability of nonuniform hypergraphs. ICALP. 2018. N 46. P. 1–13.
3. *Duraj L., Kozik J., Shabanov D.* Random hypergraphs and property B. Eur. J. Comb. 2021. N 91. P. 103205.
4. *Erdős P.* On a combinatorial problem. II. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1964. N 15:3–4. P. 445–447.
5. *Erdős P., Hajnal A.* On a property of families of sets. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1961. N 12:1–2. P. 87–123.
6. *Erdős P., Lovász L.* Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions. Infinite and Finite Sets, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. 10, Amsterdam : North Holland, 1973. P. 609–627.
7. *Gebauer H.* On the construction of 3-chromatic hypergraphs with few edges. Journal of Combinatorial Theory. Series A. 2013. N 120:7. P. 1483–1490.
8. *Kozik J.* Improving Gebauer’s Construction of 3-Chromatic Hypergraphs with Few Edges. Proceedings of the 48th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, 2021.
9. *Radhakrishnan J., Srinivasan A.* Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring. Random Structures and Algorithms. 2000. N 16:1. P. 4–32.
10. *Shabanov D.* Around Erdős-Lovasz problem on colorings of non-uniform hypergraphs. Discrete Math. 2015. N 338:11. P. 1976–1981.

Поступила в редакцию 30.07.2021