

УДК 656.021

*Д. О. Волков, С. Н. Гаричев, Р. А. Горбачев, Н. Н. Мороз*

Московский физико-технический институт (государственный университет)

## Математическое моделирование загрузки транспортной сети для определения целесообразности строительства новых видов транспортных систем

Рассмотрены методы построения, калибровки и оценки математических моделей транспортных сетей. Разработана математическая модель оценки плотности и скорости транспортного потока. Получены результаты применения данной модели для оценки загруженности участка транспортной сети Красногорского района Московской области и оценки эффективности строительства перспективной транспортной системы типа H-Bahn в этом районе.

**Ключевые слова:** математическая модель, прогнозирование транспортных потоков, оценка эффективности транспортной системы, макроскопическая модель, транспортный граф, микроскопическая модель «следования за лидером».

*D. O. Volkov, S. N. Garichev, R. A. Gorbachev, N. N. Moroz*

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

## Mathematic simulation of transport network load with a view to assessing viability of building new types of network systems

Methods of construction, calibration and validation of mathematical models of transport network are considered. A mathematical model for evaluating the density and speed of traffic is developed. The results are obtained by applying the model to estimating the transport network workload of the Krasnogorsk district of the Moscow region and assessing the effectiveness of building the perspective transport system of H-Bahn type in the area.

**Key words:** mathematical model, traffic forecast, effectiveness evaluation of transport system, macroscopic model, traffic graph, microscopic model of «follow the leader».

### 1. Введение

В настоящее время в большинстве развитых государств мира наблюдается серьезный дисбаланс спроса и предложения в сфере транспорта: объемы движения, в особенности крупных мегаполисов, приближаются к пределам пропускной способности существующих магистралей, а в час пик иногда и превосходят их. Работа по удовлетворению транспортного спроса представляет собой набор мероприятий, ведущихся в двух направлениях: экстенсивном и интенсивном.

Длительное время фактически монопольным путем решения проблемы был экстенсивный путь, нацеленный на расширение существующей инфраструктуры. Однако в настоящее время этот вариант не является рациональным [1], на его место приходят наукоемкие подходы, подразумевающие строительство принципиально новых видов транспорта. Оценка эффективности и надежности подобных систем является важной задачей на этапе проектирования. Окончательное решение о строительстве принимается только после создания и всестороннего изучения математической модели всей транспортной сети. Однако несмотря на то, что моделирование транспортных потоков крупных городов ведется во всем мире уже более пятидесяти лет и в этом направлении наработан большой теоретический и практический материал, непосредственный перенос западного опыта на российскую почву очень затруднен [2], [3].

## 2. Постановка задачи

Целью работы являются исследование методов построения, калибровки и оценки математических моделей транспортных сетей, построение математической модели для определения средней нагрузки транспортной сети, апробация модели для прогнозирования транспортных потоков Красногорского района Московской области и оценки целесообразности строительства нового вида транспорта типа *H-Bahn* в этом районе.

Разрабатываемая модель должна предоставлять информацию о средней нагрузке транспортной сети, текущих и средних значениях скорости и плотности транспорта, а также обеспечивать возможность прогнозирования и расчета усредненных требуемых характеристик движения при изменении в транспортной сети или размещении в ней до 20 объектов.

## 3. Построение математической модели

Исходя из существующих методов математического моделирования транспортных сетей [2], [4], [5], [6] и целей работы к разрабатываемой математической модели предъявим следующие требования:

- 1) модель должна быть прогнозной;
- 2) модель должна быть макроскопической, то есть формулироваться в терминах плотности и скорости движения автомобилей как функций времени и точки транспортной сети;
- 3) модель должна описывать движение транспорта по ориентированному графу (там, где движение двустороннее, будет два противоположных ребра между точками). В вершинах графа находятся перекрестки и изменения числа полос дороги. На ребрах перекрестков нет, но есть источники и стоки автотранспорта, то есть съезды на дороги, не включенные в модель и въезд с дорог, не включенных в модель.

Кроме того, модель должна учитывать следующие эффекты: при малой плотности автотранспорта для каждой фазы автотранспорта текущая скорость равна предпочтительной для данной фазы транспорта; при увеличении плотности скорость монотонно уменьшается; можно определить линейную комбинацию плотностей фаз автотранспорта, определяющую уменьшение скорости, и положить, что, когда данная линейная комбинация равна единице, наступает насыщение, скорости всех фаз равны нулю, плотность далее увеличиваться не может.

Исходными данными для модели будет транспортный поток в контрольных точках как функция времени.

Для макроскопических моделей, начиная с LW-модели, справедливо уравнение неразрывности для каждой фазы транспортного потока [2], [6], [7], [8]:

$$\rho_l' + (\rho_l V_l)' = Q_l, \quad (1)$$

где  $\rho_l$  — одномерная плотность  $l$ -й фазы транспорта (число транспортных средств (ТС) на длину дороги),  $V_l$  — одномерная скорость  $l$ -й фазы транспорта (проекция скорости на положительные направления ребра графа),  $Q_l$  — источник  $l$ -й фазы транспорта (соотнесенное к единице длины дороги количество ТС  $l$ -й фазы, въезжающих за единицу времени с участков, не включенных в модель, минус количество ТС  $l$ -й фазы, съезжающих за единицу времени с дороги на участки, не включенных в модель).

Для замыкания модели на ребре возьмем связь предпочтительной скорости и плотности для однополосного движения:

$$V_{el}(\rho_l) = V_{0l} \left(1 - \frac{\rho_l}{\rho_{0l}}\right), \quad (2)$$

где  $V_{0l}$  — скорость автомобиля при отсутствии других автомобилей, выражение в скобке — учет времени, которое тратится на обгон других ТС.

Запишем уравнение (2) в виде

$$V_{el}(\rho_l) = V_{0l}(1 - A(\rho_1, \dots, \rho_L))B(x, t)_l, \quad (3)$$

где  $0 \leq A \leq 1$ ,  $0 \leq B \leq 1$ ,  $A = \sum_l a_l \rho_l$  учитывает понижение скорости за счет затрат времени на обгоны и пробки,  $B(x, t)_l$  учитывает снижение скорости при поворотах, съездах, а также изменении числа полос.

Связь между истинной скоростью и предпочтительной получена на основе решения микроскопической модели «следования за лидером» [9]:

$$V'_{lt} + V_l V'_{lx} = \frac{1}{2\tau} \frac{\delta V_{el}}{\delta \rho} \frac{1}{\rho} \rho'_x + \frac{1}{\tau} (V_{el}(\rho) - V_l). \quad (4)$$

Уравнения (1), (3), (4) должны выполняться для каждой фазы транспортного потока.

К полученному точному решению применим приближенный подход, ориентированный на специфику наших задач. Положим, что нас интересуют только квазистационарные процессы (любая зависимость от времени обусловлена только изменением внешних данных), следовательно:

$$\frac{\delta V_l}{\delta t} = 0, \quad \frac{\delta \rho_l}{\delta t} = 0. \quad (5)$$

От набора фаз перейдем к усредненной фазе, учитывающей все фазы потока и описываемой усредненной плотностью и скоростью:

$$\rho_{all} = \frac{\sum_l a_l \rho_l}{\sum_l a_l}, \quad V_{all} = \frac{\sum_l a_l \rho_l V_l}{\sum_l a_l \rho_l}. \quad (6)$$

Тогда из (1), (3), (4) при (6) получим замкнутую систему уравнений для определения скорости и плотности транспорта на ребре транспортного графика:

$$(\rho_{all} V_{all})'_x = Q_{all}, \quad (7)$$

$$V_{eall}(\rho_{all}) = V_{0all}(1 - A_{all}\rho_{all})B(x, t)_{all}, \quad (8)$$

$$V_{all} V'_{allx} = \frac{1}{2\tau_{all}} \frac{\delta V_{eall}}{\delta \rho_{all}} \frac{1}{\rho_{all}} \rho'_{allx} + \frac{1}{\tau_{all}} (V_{eall}(\rho_{all}) - V_{all}). \quad (9)$$

После ряда упрощений получим на ребре графика «почти тривиальное» решение уравнения 3 системы:

$$V_{all} = V_{eall}, \quad (10)$$

то есть

$$V_{all}\rho_{all} = V_{0all}(1 - A_{all}\rho_{all})B(x, t)_{all}. \quad (11)$$

Для определения усредненной плотности и скорости транспорта как функции координаты вдоль ребра проинтегрируем уравнение (7) по  $x$ :

$$\rho_{all}(x)V_{all}(x) = F(x), \quad (12)$$

где  $F(x) = \rho_{all}(0)V_{all}(x)(0) + \int_0^x Q(x)dx$ .

Обозначив  $f = \frac{F}{V_0}$ ,  $v = \frac{V_{all}}{V_0}$  и подставив их в уравнения (11), (12), получим систему, решения которой имеют вид

$$\rho_{all} = \frac{1}{2A_{all}}(1 \pm \sqrt{1 - 4A_{all}f/B_{all}}), \quad v = \frac{B}{2}(1 \mp \sqrt{1 - 4A_{all}f/B_{all}}). \quad (13)$$

Выражения (13) позволяют найти плотность и скорость транспортного потока внутри ребра. Интегрирование вдоль ребра выражения 2 (13) позволяет найти время прохождения транспортным средством ребра графа.

#### 4. Применение построенной математической модели для определения целесообразности строительства транспортной системы типа Н-Bahn в Красногорском районе Московской области

В рамках работы разрабатывается и исследуется модель загрузки транспортных сетей в направлении от станции московского метрополитена «Мякинино» к строящемуся микрорайону Ильинское-Усово (Красногорский район Московской области). Помимо существующих магистралей, при анализе транспортного предложения учитывается перспективная пилотная надземная транспортная система Н-Bahn, которая может быть проложена по трассе, соединяющей эти две точки (рис. 1). Зона моделирования охватывает территорию Москвы и Московской области, ограниченную Волоколамским, Новорижским, Ильинским шоссе и МКАД от пересечения с Волоколамским шоссе до пересечения с Новорижским шоссе [10].



Рис. 1. Схема расположения и остановочные пункты системы Н-Bahn

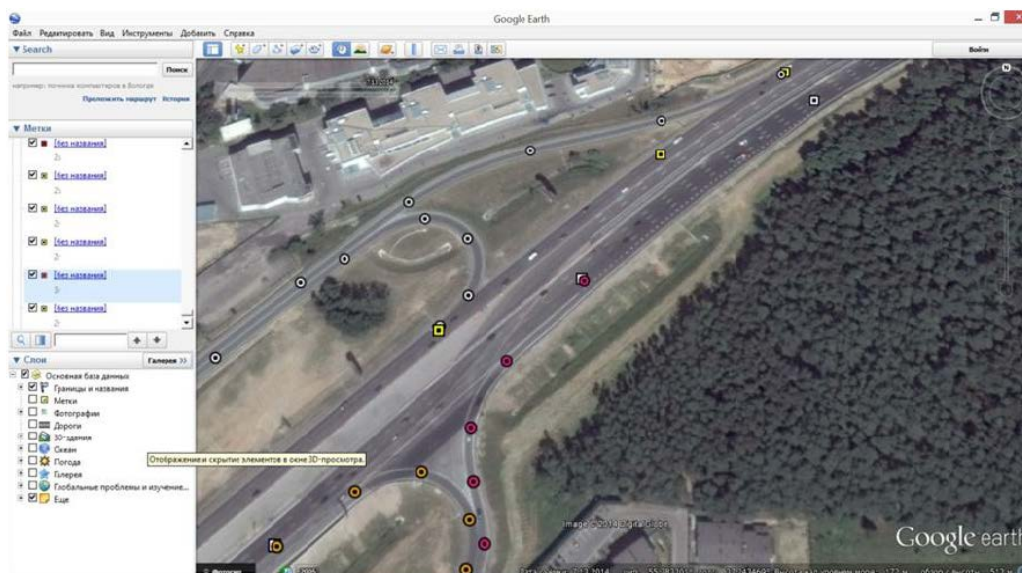


Рис. 2. Пример стыковки элементов графа дорожной сети

В качестве входных данных для математической модели используются геометрия дорожной сети и организация дорожного движения. Граф дорожной сети создается с помощью ГИС, источником информации о детальной структуре дорожной сети являются спутниковые снимки высокого разрешения. Каждый фрагмент дорожной сети вводится последовательно с соблюдением реального направления дорожного движения. При этом каждая вершина графа имеет несколько параметров (координаты, высота, число полос и

др.), а при ее описании принята определенная терминология. На рис. 2 приведен пример стыковки элементов графа дорожной сети.

Для нормирования модели используются записанные в течение некоторого времени данные о количестве транспортных средств, проследовавших в единицу времени на ключевых магистралях в окрестности моделируемой трассы. На рис. 3 изображены точки фиксации дорожного трафика в исследуемом районе. На рис. 4 приведен пример данных, получаемых в каждой точке фиксации дорожного трафика в зависимости от времени и дня недели.

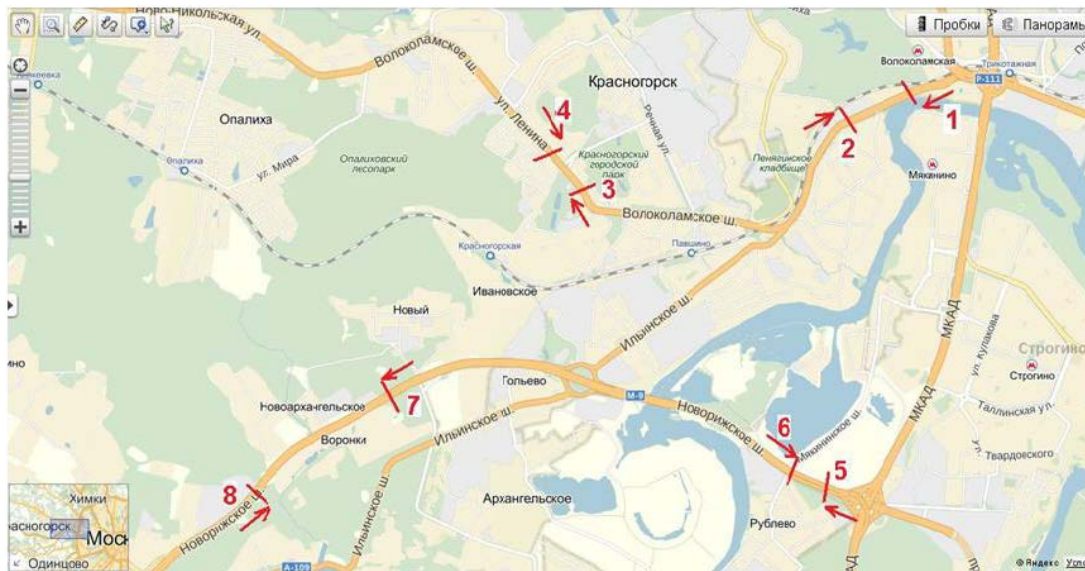


Рис. 3. Расположение точек фиксации дорожного трафика

Точка № 4: Волоколамское шоссе → центр		Время															
День недели	Число	7:00–8:00	8:01–9:00	9:01–10:00	10:01–11:00	11:01–12:00	12:01–13:00	13:01–14:00	14:01–15:00	15:01–16:00	16:01–17:00	17:01–18:00	18:01–19:00	19:01–20:00	20:01–21:00	21:01–22:00	22:01–23:00
Пн.	06.10.2014	935	993	1220	1264	1072	1235	1306	1101	1189	987	1163	874	609	765	600	514
Вт.	06.10.2014	817	1190	1135	982	1166	976	1183	1234	987	1113	1058	1065	874	965	695	658
Ср.	06.10.2014	807	827	1145	1286	1185	1023	1105	1367	1143	935	1064	895	875	435	766	808
Чт.	06.10.2014	922	1047	1080	1298	1382	1205	1031	925	1023	1055	984	1093	664	666	875	544
Пт.	06.10.2014	788	1121	1102	1011	1205	964	1298	1114	819	1019	857	874	955	847	501	329
Сб.	06.10.2014	654	911	1069	941	783	872	892	706	856	973	874	734	965	677	650	203
Вс.	06.10.2014	553	609	805	912	813	993	866	1086	1298	1322	1138	1190	932	844	839	987

Рис. 4. Дорожный трафик в различных узлах транспортного графа

Разработанная модель позволяет полностью рассчитать потоки транспортной сети исследуемого района и отразить распределение скоростей потоков в сечениях транспортного графа. Для того чтобы оценить целесообразность строительства линии подвешенного монорельса, необходимо в районе предполагаемого расположения новой системы рассчитать среднюю скорость на составленном из ребер графа маршруте и сравнить с действительной скоростью вагонов этой транспортной системы.

На рис. 5 представлен скриншот работы программы, реализующей разработанную математическую модель. На рисунке показан результат моделирования загрузки транспортной сети исследуемого района для четверга 11:00. Кроме того, приведен расчет времени, необходимого для перемещения между микрорайоном Ильинское–Усово и станцией метропо-

литена «Мякинино» на автомобиле/автобусе и с использованием подвесной транспортной системы Н-Bahn.

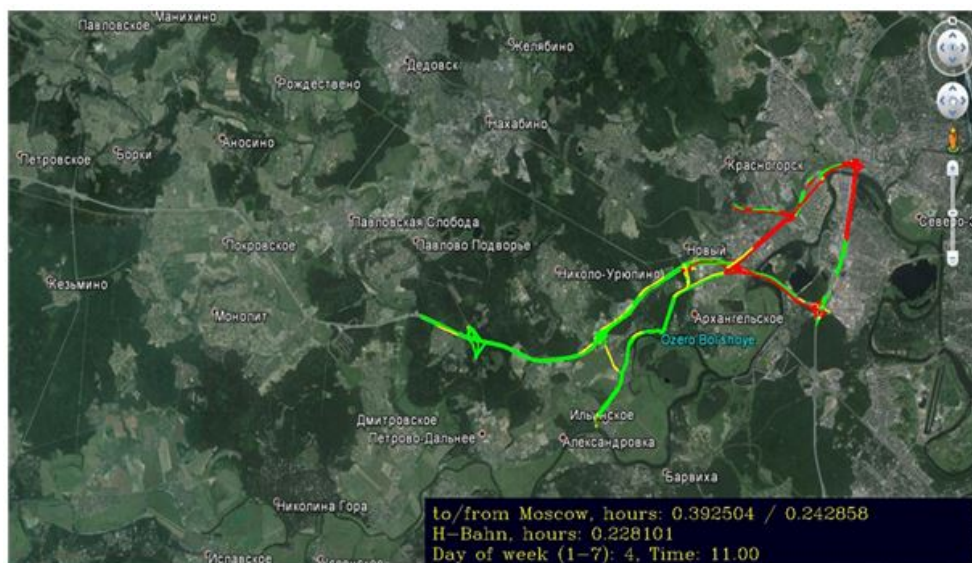


Рис. 5. Скриншот работы программы; результат моделирования: четверг, 11:00

На рис. 6 представлена «суммирующая» диаграмма результатов работы компьютерной программы, моделирующей загрузку автомагистралей общего пользования по направлению от станции московского метрополитена «Мякинино» до строящегося поселка Ильинское-Усово с использованием разработанной математической модели.

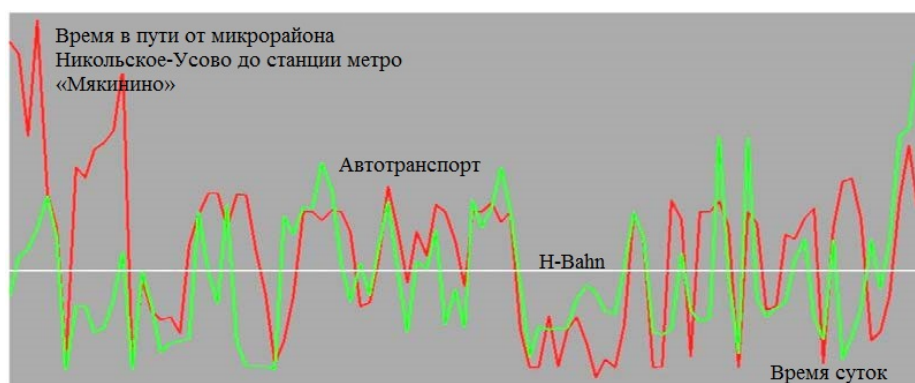


Рис. 6. К оценке выбора режимов движения

По оси абсцисс отложены 96 точек, соответствующих наблюдениям дорожной загрузки, проведенным в различные дни недели и в разное время суток (с 7:00 до 24:00), по оси ординат – время в пути от микрорайона Никольское-Усово до станции метро «Мякинино» (показано красным цветом) и в обратном направлении (показано зеленым цветом). Белая линия на графике соответствует времени движения в системе Н-Bahn. Анализ диаграммы показывает: несмотря на разброс значений, большая часть точек лежит выше опорной прямой, откуда следует, что большая часть поездок будут совершены быстрее с помощью монорельсовой системы Н-Bahn, нежели по любому другому пути.

## 5. Заключение

Целью проведенных исследований являлась разработка прогнозной модели загрузки транспортных сетей и ее апробация для участка транспортной системы Ильинское-Усово – станция метро «Мякинино», включая перспективную монорельсовую надземную транс-

портную систему H-Bahn. Разработанная математическая модель позволяет полностью рассчитать транспортные потоки и отразить распределение скоростей потоков в сечениях транспортного графа. Точность представления выходной информации определяется точностью входных данных о характеристиках транспортной сети, базирующихся на спутниковых снимках, и потокообразующих факторах. Разработанная модель дает возможность проанализировать текущую загрузку улично-дорожной сети в зоне моделирования и проследить реакцию транспортных сетей на возможные изменения транспортного спроса (строительство новых потокообразующих объектов) и транспортного предложения (введение в строй автодорог, системы H-Bahn и пр.). Также созданный разработчиками задел при условии последующей модификации программного обеспечения модели позволяет поставить задачу оптимизации функционирования транспортной системы с учетом имеющихся финансовых ресурсов. Результатом апробации модели стало моделирование транспортной системы заявленного района, которое показало, что скорость перемещения с использованием транспортной системы типа H-Bahn выше, чем при передвижении на других видах транспорта в заданном районе. Таким образом, строительство данной транспортной системы является целесообразным.

---

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки, уникальный идентификатор № RFMEFI58214X0003.

## Литература

1. *Иносе Х.* Управление дорожным движением. М.: Транспорт, 1983. 248 с.
2. *Семенов В.В.* Математическое моделирование динамики транспортных потоков мегаполиса. М.: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2004. 44 с.
3. *Хабаров В.И.* Марковская модель транспортных корреспонденций // Доклады ТУСУРа. 2012. № 1. С. 113–117.
4. *Якимов М.Р.* Транспортное планирование: создание транспортных моделей городов: монография. М.: Логос, 2013. 188 с.
5. *Гасников А.В., Кленов С.Л., Нурминский Е.А., Холодов Я.А., Шамрай Н.Б.* Введение в математическое моделирование транспортных потоков. М.: МФТИ, 2010. 362 с.
6. *Швецов В.И.* Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2003. № 11. С. 3–46.
7. *Морозов И.И.* Численное исследование транспортных потоков на основе гидродинамических моделей // Компьютерные исследования и моделирование. 2011. Т. 3, № 4. С. 389–412.
8. *Lighthill M.J., Whitham G.B.* On kinematic waves: II. A theory of traffic on long crowded roads // Proc. Roy. Soc. London. 1955. V. 229. P. 317–345.
9. *Payne H.J.* Models of freeway traffic and control // Mathematical Models of Public Systems. CA.: Simulation Council, 1971. P. 51–61.
10. *Garichev S.N., Gorbachev R.A., Volkov D.O.* Construction of Automatic Control System above Ground Transport by H-Bahn Technology: Concept, Initial Data and Statement Objectives // Труды конференции «Engineering and Telecommunication (EnT)», сборник IEEE. 2014. С. 59–62.

## References

1. *Inose H.* Road traffic control. Tokyo: University of Tokyo Press, 1975. 120 p.

2. *Semenov V.V.* Mathematical modeling of the dynamics of traffic megalopolis. M.: Keldysh Institute of Applied Mathematics, 2004. 44 p.
3. *Habarov V.I.* Markov model of transport correspondences. TUSUR Reports. 2012. N 1. P. 113–117.
4. *Yakimov M.R.* Transport planning: creation of transport models of cities: monograph. M.: Logos, 2013. 188 p.
5. *Gasnikov A.V., Klenov S.L., Nurminskiy E.A., Holodov Y.A., Shamray N.B.* Introduction to the mathematical modeling of traffic flows: a tutorial. M.: MIPT, 2010. 362 p.
6. *Shvetsov V.I.* Mathematical traffic modeling. Automation and Remote Control. 2003. N 11. P. 3–46.
7. *Morozov I.I.* Numerical study of traffic flows on the basis of hydrodynamic models. Computer Research and Modeling. 2011. V.3, N 4. P. 389–412.
8. *Lighthill M.J., Whitham G.B.* On kinematic waves: II. A theory of traffic on long crowded roads. Proc. Roy. Soc. London. 1955. V.229. P. 317–345.
9. *Payne H.J.* Models of freeway traffic and control. Mathematical Models of Public Systems. CA.: Simulation Council, 1971. P. 51–61.
10. *Garichev S.N., Gorbachev R.A., Volkov D.O.* Construction of Automatic Control System above Ground Transport by H-Bahn Technology: Concept, Initial Data and Statement Objectives. Proc. of the conference «Engineering and Telecommunication (EnT)», IEEE reports. 2014. P. 59–62.

*Поступила в редакцию 21.09.2015.*