Амелькин Н. И.

Канонические преобразования в гамильтоновых системах

Для гамильтоновой системы с n степенями свободы уравнения движения, записанные в векторно-матричной форме, имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} = \partial H/\partial \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\partial H/\partial \mathbf{q} \end{cases} \Leftrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \tag{1}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^T = -\mathbf{J}, \quad \det \mathbf{J} = 1. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x}$ – вектор-столбец фазовых переменных, $H(\mathbf{x},t)$ – гамильтониан, $\mathbf{E}_n$ – единичная матрица размера $n \times n$, $\mathbf{J}$ – *симплектическая единица*.

Уравнения Лагранжа, как известно, *ковариантны* по отношению к любым невырожденным преобразованиям обобщенных координат. Уравнения Гамильтона свойством ковариантности по отношению к *произвольным* преобразованиям переменных $\mathbf{q},\mathbf{p}$ не обладают, т.е. гамильтонова система в результате преобразования может оказаться не гамильтоновой.

Определение. *Каноническими называются невырожденные преобразования фазовых переменных*

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) \\ \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) \end{cases} \Leftrightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x},t); \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

переводящие любую гамильтонову систему снова в гамильтонову систему, т.е. $\forall H(\mathbf{x},t)\ \exists\ \tilde{H}(\mathbf{y},t)$, такая, что уравнения (1) и в новых переменных будут иметь каноническую форму

$$\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \partial\tilde{H}/\partial\tilde{\mathbf{p}}, \ \dot{\tilde{\mathbf{p}}} = -\partial\tilde{H}/\partial\tilde{\mathbf{q}} \ \Leftrightarrow \ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{J}\,\partial\tilde{H}/\partial\mathbf{y} . \tag{4}$$

Таким образом, каноническими называются все преобразования, относительно которых ковариантны канонические уравнения Гамильтона.

Канонические преобразования применяются для упрощения уравнений движения гамильтоновых систем. При использовании таких преобразований задача определения конкретного вида уравнений движения в новых переменных сводится к нахождению одной функции – функции Гамильтона в новых переменных. Для произвольных (не канонических) преобразований такого простого алгоритма, позволяющего получить уравнения движения в новых переменных, нет.

Теорема 1 (критерий каноничности в терминах производящих функций). *Для каноничности преобразования* (3) *необходимо и достаточно существования производящей функции* $F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ *и постоянной* (*валентности*) $c\neq 0$, *удовлетворяющих уравнению*

$$\delta\tilde{\mathbf{q}}^T\tilde{\mathbf{p}} - c\,d\mathbf{q}^T\mathbf{p} = -\delta F(\mathbf{q},\mathbf{p},t). \tag{5}$$

Здесь символом δ обозначены изохронные дифференциалы функций, т.е.

$$\delta\tilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{q}^T}d\mathbf{q} + \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{p}^T}d\mathbf{p} = d\tilde{\mathbf{q}} - \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial t}dt, \qquad \delta F = \frac{\partial F}{\partial\mathbf{q}^T}d\mathbf{q} + \frac{\partial F}{\partial\mathbf{p}^T}d\mathbf{p} = dF - \frac{\partial F}{\partial t}dt\,.$$

Символом d обозначаются полные дифференциалы функций. Для независимых переменных операции δ и d совпадают.

Эквивалентная форма записи условия (5) выглядит так:

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial\mathbf{q}}\tilde{\mathbf{p}} - c\mathbf{p} = -\frac{\partial F}{\partial\mathbf{q}}, \qquad \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial\mathbf{p}}\tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial F}{\partial\mathbf{p}}. \tag{5*}$$

Функция $F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ определена с точностью до аддитивной функции времени (как и гамильтониан системы).

При $c=1$ каноническое преобразование называется *унивалентным*.

Теорема 2 (локальный критерий каноничности). *Для каноничности преобразования* (3) *необходимо и достаточно выполнения матричного тождества*

$$\mathbf{M}^T\mathbf{J}\mathbf{M} = c\mathbf{J}, \quad c\neq 0; \qquad \mathbf{M} = \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}^T} \tag{6}$$

Здесь $\mathbf{M}$ – матрица Якоби преобразования (3).

При доказательстве сформулированных теорем будут использоваться следующие известные факты:

1) Теорема об *условиях интегрируемости* (критерий потенциальности векторного поля) [2]: для существования скалярной функции $\Phi(\mathbf{x},t)$,

удовлетворяющей уравнению $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=\partial\Phi/\partial\mathbf{x}$, необходимо и достаточно, чтобы матрица $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}^T$ была симметрической, т.е. $\partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}^T-\partial\mathbf{f}^T/\partial\mathbf{x}=0$.

2) Правило дифференцирования билинейной формы [2]:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\mathbf{f}^T\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}\right)=\frac{\partial\mathbf{f}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}+\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{A}^T\mathbf{f}\ . \qquad (7)$$

Здесь $\mathbf{A}$ – постоянная матрица.

3) Тождество:

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}^T}\left(\frac{\partial\mathbf{f}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}\right)-\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\mathbf{f}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}\right)^T=\frac{\partial\mathbf{f}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{A}\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\mathbf{x}^T}-\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{A}^T\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}^T}\ . \qquad (8)$$

Для доказательства тождества (8) запишем выражение в скобках в виде

$$\frac{\partial\mathbf{f}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}=\sum_{s=1}^{2n}\frac{\partial f_s}{\partial\mathbf{x}}(\mathbf{A}\boldsymbol{\psi})_s\ .$$

Тогда при учете (7) получим для левой части (8) следующее выражение:

$$\frac{\partial\mathbf{f}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{A}\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\mathbf{x}^T}-\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{A}^T\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}^T}+\sum_{s=1}^{2n}\left(\frac{\partial^2 f_s}{\partial\mathbf{x}^T\partial\mathbf{x}}-\frac{\partial^2 f_s}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{x}^T}\right)(\mathbf{A}\boldsymbol{\psi})_s\ .$$

Отсюда ввиду симметричности матрицы вторых производных от любой скалярной функции f_s следует тождество (8).

4) Канонические уравнения (1) можно записать с помощью функции

$$L=\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{p}-H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) \quad \Leftrightarrow \quad L=\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{J}\mathbf{x}/2-H(\mathbf{x},t) \qquad (9)$$

в форме уравнений Лагранжа следующим образом [1]:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}}=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{p}}}-\frac{\partial L}{\partial\mathbf{p}}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{x}}}-\frac{\partial L}{\partial\mathbf{x}}=0. \qquad (1^*)$$

Здесь имеется в виду, что уравнения (1*) *инвариантны* уравнениям (1), т.е. после вычисления оператора Эйлера от функции (9) из (1*) получаются уравнения, *тождественно* совпадающие с уравнениями (1).

Уравнения Лагранжа (1*) записаны в $4n$-мерном пространстве переменных $\mathbf{x},\dot{\mathbf{x}}$. В них переменные $\mathbf{q},\mathbf{p}$ играют роль координат, а $\dot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{p}}$ – роль скоростей. Возможность записи $2n$ канонических уравнений (1) первого порядка в форме (1*) основывается на том, что для линейных по скоростям функций вида $L=\dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{f}(\mathbf{x},t)+\Phi(\mathbf{x},t)$ уравнения Лагранжа представляют собой тоже систему из $2n$ уравнений первого порядка:

$$\left(\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}^T}-\frac{\partial\mathbf{f}^T}{\partial\mathbf{x}}\right)\dot{\mathbf{x}}+\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial t}-\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}}=0\,.$$

Для функций L, определяемых выражением (9), эти уравнения принимают вид канонических уравнений (1): $\mathbf{J}\dot{\mathbf{x}}=-\partial H/\partial\mathbf{x} \;\;\Rightarrow\;\; \dot{\mathbf{x}}=\mathbf{J}\,\partial H/\partial\mathbf{x}$.

Аналогичным образом и канонические уравнения (4) записываются в форме уравнений Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\tilde{\mathbf{q}}}}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\tilde{\mathbf{q}}}=0,\;\; \frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\tilde{\mathbf{p}}}}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\tilde{\mathbf{p}}}=0 \qquad\Leftrightarrow\;\; \frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\dot{\mathbf{y}}}-\frac{\partial\tilde{L}}{\partial\mathbf{y}}=0\,. \tag{4*}$$

Здесь

$$\tilde{L}=\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T\tilde{\mathbf{p}}-\tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}},t) \qquad\Leftrightarrow\;\; \tilde{L}=\dot{\mathbf{y}}^T\mathbf{J}\mathbf{y}/2-\tilde{H}(\mathbf{y},t)\,. \tag{10}$$

Запись канонических уравнений (1) и (4) в форме уравнений Лагранжа (1*) и (4*) удобна тем, что в рамках лагранжева формализма преобразование (3) трактуется как преобразование координат. Это позволяет использовать свойство *ковариантности* уравнений Лагранжа по отношению к преобразованиям координат (уравнения Лагранжа преобразуются в уравнения Лагранжа, а «новый» лагранжиан представляет собой «старый» лагранжиан, выраженный через новые переменные), а также свойство *калибровочной инвариантности* (уравнения, определяемые функциями $L(\dot{\mathbf{x}},\mathbf{x},t)$ и $cL+\dot{F}(\mathbf{x},t)$, где постоянная $c\neq 0$, тождественно совпадают).

Доказательство достаточности условий (5), (6) *каноничности преобразования* (3). Пусть система в исходных переменных является гамильтоновой и выполняется условие (5). Тогда уравнения (1) этой системы можно записать с помощью функции $L=\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{p}-H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ в форме уравнений Лагранжа (1*). Определив функцию $\tilde{H}$ формулой

$$\tilde{H}=cH+\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial t}\tilde{\mathbf{p}}\,, \tag{11}$$

равенство (5) можно переписать в виде

$$d\tilde{\mathbf{q}}^T\tilde{\mathbf{p}}-\tilde{H}dt=c[d\mathbf{q}^T\mathbf{p}-Hdt]-dF \;\Leftrightarrow\; \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^T\tilde{\mathbf{p}}-\tilde{H}=c[\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{p}-H]-\dot{F}\,. \qquad (12)$$

Отсюда следует, что в результате преобразования (3) лагранжиан системы в новых переменных принимает вид $L=(\tilde{\mathbf{p}}^T\dot{\tilde{\mathbf{q}}}-\tilde{H}+\dot{F})/c$. С учетом свойства калибровочной инвариантности это означает, что уравнения движения в новых переменных, записанные в форме уравнений Лагранжа (4*), тождественно совпадают с каноническими уравнениями Гамильтона (4), т.е. в результате преобразования (3) гамильтонова система переходит в гамильтонову, а «новый» гамильтониан определяется по формуле (11).

Равенство (12) называется *основным тождеством*. Оно включает и критерий каноничности (5) и формулу преобразования гамильтониана (11).

Доказательство достаточности тождества (6) сводится к определению условий существования функции F в критерии (5). При учете формул

$$\delta\mathbf{x}^T\mathbf{J}\mathbf{x}=2\delta\mathbf{q}^T\mathbf{p}-\delta(\mathbf{q}^T\mathbf{p}), \quad \delta\mathbf{y}^T\mathbf{J}\mathbf{y}=2\delta\tilde{\mathbf{q}}^T\tilde{\mathbf{p}}-\delta(\tilde{\mathbf{q}}^T\tilde{\mathbf{p}}), \quad \delta\mathbf{y}=\mathbf{M}d\mathbf{x} \qquad (13)$$

условие (5) переписывается в виде

$$\delta\mathbf{y}^T\mathbf{J}\mathbf{y}-c\delta\mathbf{x}^T\mathbf{J}\mathbf{x}=-2\delta F^*; \qquad F^*=F+(\tilde{\mathbf{q}}^T\tilde{\mathbf{p}}-c\mathbf{q}^T\mathbf{p})/2 \qquad (14)$$

и эквивалентно уравнению

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\mathbf{y}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{J}\mathbf{y}-c\frac{\mathbf{J}\mathbf{x}}{2}=-\frac{\partial F^*}{\partial\mathbf{x}}\,. \qquad (15)$$

По теореме об условиях интегрируемости для существования функции $F^*(\mathbf{x},t)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}^T}\left(\frac{\partial\mathbf{y}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{J}\mathbf{y}-c\mathbf{J}\mathbf{x}\right)-\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left(\frac{\partial\mathbf{y}^T}{\partial\mathbf{x}}\mathbf{J}\mathbf{y}-c\mathbf{J}\mathbf{x}\right)^T=0\,. \qquad (16)$$

При учете тождества (8) это условие сводится к матричному равенству (6):

$$\mathbf{M}^T\mathbf{J}\mathbf{M}-c\mathbf{J}=\left(\mathbf{M}^T\mathbf{J}\mathbf{M}-c\mathbf{J}\right)^T \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{M}^T\mathbf{J}\mathbf{M}=c\mathbf{J}\,.$$

Доказательство необходимости условий (5), (6) *каноничности преобразования* (3). Пусть преобразованием (3) *произвольная* гамильтонова система переходит в гамильтонову. Тогда уравнения (4) в новых переменных можно записать в форме (4*), используя функцию (10). В результате преобразования эта функция выразится через старые переменные в виде

$$\tilde{L} = \dot{\mathbf{y}}^T \mathbf{J}\mathbf{y}/2 - \tilde{H}(\mathbf{y},t) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{f}(\mathbf{x},t) + \Phi(\mathbf{x},t), \tag{17}$$

где

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{M}^T \mathbf{J}\mathbf{y}(\mathbf{x},t)}{2}, \qquad \Phi = \frac{\partial \mathbf{y}^T(\mathbf{x},t)}{\partial t}\frac{\mathbf{J}\mathbf{y}(\mathbf{x},t)}{2} - \tilde{H}(\mathbf{y}(\mathbf{x},t),t). \tag{18}$$

Записывая уравнения Лагранжа, определяемые функцией (17), и учитывая гамильтоновость системы в исходных переменных, получим уравнение

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}}\right)\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}}. \tag{19}$$

Это уравнение должно удовлетворяться для *любых* функций $H(\mathbf{x},t)$. По теореме 5.1 [2] необходимые и достаточные условия существования функции $\Phi(\mathbf{x},t)$, удовлетворяющей уравнению (19) при любой $H(\mathbf{x},t)$, описываются матричным равенством

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial \mathbf{f}^T}{\partial \mathbf{x}} = c\mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^T}\left(\frac{\mathbf{M}^T \mathbf{J}\mathbf{y}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\mathbf{M}^T \mathbf{J}\mathbf{y}}{2}\right)^T = c\mathbf{J} \tag{20}$$

Отсюда, учитывая тождество (8), приходим к равенству (6): $\mathbf{M}^T \mathbf{J}\mathbf{M} = c\mathbf{J}$.

Условие $c \neq 0$ обусловлено требованием о невырожденности преобразования (3), т.к. якобиан преобразования определяется формулой

$$(\det \mathbf{M})^2 = c^{2n} . \tag{21}$$

В заключение заметим, что условие (20) совпадает с условием (16) и является критерием существования функции $F^*(\mathbf{x},t)$, удовлетворяющей уравнению (14), которое при учете формул (13) приводится к виду (5).

Теоремы 1 и 2 *доказаны*.

Отметим, что если каноническое преобразование (3) не зависит явно от времени, то и производящая функция не будет явно зависеть от времени. В таких случаях формула преобразования гамильтониана принимает наиболее простой вид: $\tilde{H}(\mathbf{y},t) = cH(\mathbf{x}(\mathbf{y}),t)$.

Умножив равенство (6) слева на матрицу $(\mathbf{M}^T)^{-1}$, а справа на матрицу $\mathbf{M}^{-1}$, и учитывая перестановочность операций обращения и транспонирования матриц, получим

$$(\mathbf{M}^{-1})^T \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{J}/c .$$

Отсюда следует, что матрица $\mathbf{M}^{-1}$ обратного преобразования удовлетворяет критерию (6), а валентность обратного преобразования равна $1/c$.

Обращением обеих частей последнего равенства критерий каноничности приводится к следующему виду:

$$\mathbf{M}\mathbf{J}\mathbf{M}^T = c\mathbf{J} . \tag{6*}$$

Рассмотрим последовательность двух канонических преобразований $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\mathbf{y}, t)$ с валентностями c_1 и c_2, соответственно. Матрица Якоби результирующего преобразования определяется выражением

$$\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{x}^T} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{y}^T} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^T} = \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1$$

Подставляя это выражение в критерий (6), получим

$$\mathbf{M}^T \mathbf{J}\mathbf{M} = \mathbf{M}_1^T \mathbf{M}_2^T \mathbf{J}\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 = c_2 \mathbf{M}_1^T \mathbf{J}\mathbf{M}_1 = c_2 c_1 \mathbf{J} ,$$

т.е. результирующее преобразование является каноническим, а его валентность равна $c = c_2 c_1$.

Приведем несколько примеров канонических преобразований.

Тождественное преобразование является унивалентным ($c = 1$) каноническим преобразованием с производящей функцией $F = 0$.

Преобразование

$$\tilde{q}_j = p_j , \tilde{p}_j = -q_j ; \quad j = 1,...,m$$

$$\tilde{q}_k = q_k , \tilde{p}_k = p_k ; \quad k = m+1,...,n$$

является каноническим с производящей функцией $F = \sum_{j=1}^{m} q_j p_j$ и валентностью $c = 1$. *С помощью такого преобразования можно поменять ролями координаты и импульсы в любой паре сопряженных переменных* q_j, p_j.

Преобразование *растяжения* $\tilde{\mathbf{q}}=\alpha\mathbf{q},\ \tilde{\mathbf{p}}=\beta\mathbf{p}$ является каноническим с валентностью $c=\alpha\beta$ и производящей функцией $F=0$.

Линейное преобразование $\tilde{\mathbf{q}}=\mathbf{A}\mathbf{q}+\mathbf{B}\mathbf{p},\ \tilde{\mathbf{p}}=\mathbf{C}\mathbf{q}+\mathbf{D}\mathbf{p}$ является каноническим при условиях

$$\mathbf{A}^T\mathbf{C}-\mathbf{C}^T\mathbf{A}=0,\quad \mathbf{B}^T\mathbf{D}-\mathbf{D}^T\mathbf{B}=0,\quad \mathbf{A}^T\mathbf{D}-\mathbf{C}^T\mathbf{B}=c\mathbf{E}_n;\quad c\neq 0.$$

Важный пример канонического преобразования дает нижеследующая *теорема о фазовом потоке гамильтоновой системы*:

Теорема 3. *Фазовый поток любой гамильтоновой системы* $\mathbf{x}=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}_0,t)$ (закон движения в зависимости от времени и начальных условий) *представляет собой унивалентное каноническое преобразование начальных значений фазовых переменных* $\mathbf{x}_0$ *в текущие значения* $\mathbf{x}$.

Доказательство. Положим $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}(t_0)$. В момент времени t_0 преобразование тождественное и матрица Якоби $\mathbf{M}=\partial\mathbf{x}/\partial\mathbf{x}_0^T=\mathbf{E}_{2n}$ удовлетворяет критерию (6) при $c=1$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что матрица $\mathbf{F}=\mathbf{M}^T\mathbf{J}\mathbf{M}$ не меняется с течением времени.

Вычислим производную $\dot{\mathbf{F}}$ в силу канонических уравнений Гамильтона. В рассматриваемой задаче производные по времени от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{M}$ равны частным производным по времени от $\boldsymbol{\psi}$ и $\partial\boldsymbol{\psi}/\partial\mathbf{x}_0^T$. Поэтому, учитывая перестановочность операций $\partial/\partial\mathbf{x}_0$ и $\partial/\partial t$, будем иметь

$$\dot{\mathbf{x}}=\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t},\qquad \dot{\mathbf{M}}=\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial\mathbf{x}_0^T}\Big)=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_0^T}\Big(\frac{\partial\boldsymbol{\psi}}{\partial t}\Big)=\frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{x}_0^T},$$

а матрица $\dot{\mathbf{F}}$ запишется в виде

$$\dot{\mathbf{F}}=\frac{\partial\dot{\mathbf{x}}^T}{\partial\mathbf{x}_0}\mathbf{J}\mathbf{M}+\mathbf{M}^T\mathbf{J}\frac{\partial\dot{\mathbf{x}}}{\partial\mathbf{x}_0^T}=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_0}\left(\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}^T}\mathbf{J}^T\right)\mathbf{J}\mathbf{M}+\mathbf{M}^T\mathbf{J}\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_0^T}\left(\mathbf{J}\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}}\right).$$

Из формул для производных от сложных функций следует

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_0}\left(\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}^T}\right)=\frac{\partial\mathbf{x}^T}{\partial\mathbf{x}_0}\frac{\partial^2 H}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{x}^T}=\mathbf{M}^T\frac{\partial^2 H}{\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{x}^T},\qquad \frac{\partial}{\partial\mathbf{x}_0^T}\left(\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}}\right)=\frac{\partial^2 H}{\partial\mathbf{x}^T\partial\mathbf{x}}\mathbf{M}.$$

В итоге, учитывая симметричность матрицы $\partial^2 H/\partial\mathbf{x}\partial\mathbf{x}^T$, получаем

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{M}^T \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} - \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{x}^T \partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{M} \equiv 0 .$$

Теорема доказана.

Локальный критерий каноничности (6) позволяет проверить на каноничность любое преобразование, заданное в явной форме. Для построения канонических преобразований используются критерии, записанные в терминах производящих функций. Но, как можно убедиться на примерах, по заданной функции $F(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ и валентности $c \neq 0$ преобразование однозначно не определяется. Конструктивный алгоритм построения канонических преобразований удается получить при использовании производящих функций $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$, $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)$, $S(\tilde{\mathbf{q}},\mathbf{p},t)$, $S(\mathbf{p},\tilde{\mathbf{p}},t)$.

Ниже рассматриваются наиболее часто используемые преобразования, задаваемые первыми двумя из указанных видов функций.

Свободные канонические преобразования. *Преобразование* (3) *называется свободным, если в нем в качестве независимых можно выбрать переменные* $\{\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}}\}$, *т.е. формулы преобразования можно переписать в виде*

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t), \quad \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t) . \tag{22}$$

Преобразование (3) будет свободным, если

$$\det\left(\partial \tilde{\mathbf{q}} / \partial \mathbf{p}^T\right) \neq 0 . \tag{23}$$

В этом и только в этом случае из (3) можно выразить $\mathbf{p}$ и $\tilde{\mathbf{p}}$ через $\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t$.

Для свободных канонических преобразований основное тождество (12) записывается в виде

$$d\tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t) - c\, d\mathbf{q}^T \mathbf{p}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t) - (\tilde{H} - cH)dt = -dS(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t); \;\; c \neq 0 . \tag{24}$$

Здесь $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$ есть функция F, выраженная через переменные $\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t$.

Приравнивая в обеих частях тождества (24) коэффициенты при независимых вариациях $d\tilde{\mathbf{q}}, d\mathbf{q}$, получаем, что в терминах свободных преобразований (в $\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}}$ – описании) критерий каноничности принимает вид:

Свободное преобразование (22) *является каноническим, если существует производящая функция* $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$ *и валентность* $c \neq 0$, *такие, что*

$$\tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial S}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}, \quad c\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}. \tag{25}$$

В свою очередь, приравнивая в обеих частях равенства (24) коэффициенты при dt, получим *формулу преобразования гамильтониана*:

$$\tilde{H} = cH + \partial S/\partial t. \tag{26}$$

Для свободных преобразований (22) проверка условий каноничности (условий существования функции S) сводится к проверке тождеств

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}^T}{\partial \tilde{\mathbf{q}}} \equiv 0, \quad \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{q}^T} - \frac{\partial \mathbf{p}^T}{\partial \mathbf{q}} \equiv 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{q}^T} + c\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^T} \equiv 0; \quad c \neq 0. \tag{27}$$

Смысл термина *производящая функция* состоит в том, что по заданной функции $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$ и постоянной $c \neq 0$ соотношениями (25) однозначно определяются формулы преобразования в виде (22). Для того, чтобы эти формулы приводились к исходному виду (3), должно выполняться условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}\partial \tilde{\mathbf{q}}^T}\right) \neq 0. \tag{28}$$

Это условие обеспечивает возможность выразить из второй группы уравнений (25) переменные $\tilde{\mathbf{q}}$ через $\mathbf{q},\mathbf{p},t$, а затем из первой группы уравнений (25) найти зависимость $\tilde{\mathbf{p}}$ от $\mathbf{q},\mathbf{p},t$.

При условии (28) однозначно определяются и формулы обратного преобразования. При этом зависимость $\mathbf{q}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}},t)$ находится из первой группы уравнений (25), а затем из второй группы определяется $\mathbf{p}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}},t)$.

Таким образом, все множество *свободных* канонических преобразований можно получить на основе формул (25), рассматривая всевозможные функции $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$, удовлетворяющие условию (28), и постоянные $c \neq 0$.

Преобразования, допускающие $\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}}$ – описание. Рассмотрим преобразования (3), в которых в качестве независимых можно выбрать переменные $\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}}$, т.е. формулы преобразования можно переписать в виде

$$\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t), \quad \tilde{\mathbf{q}}=\tilde{\mathbf{q}}(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t) \ . \tag{29}$$

Преобразование (3) удовлетворяет этому условию, если $\det(\partial\tilde{\mathbf{p}}/\partial\mathbf{p}^T)\neq 0$.

Учитывая, что $d\tilde{\mathbf{q}}^T\tilde{\mathbf{p}}=d(\tilde{\mathbf{q}}^T\tilde{\mathbf{p}})-d\tilde{\mathbf{p}}^T\tilde{\mathbf{q}}$, основное тождество (12) можно переписать в виде

$$-d\tilde{\mathbf{p}}^T\tilde{\mathbf{q}}-\tilde{H}dt=c(d\mathbf{q}^T\mathbf{p}-Hdt)-dS(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)\,. \tag{30}$$

Приравнивая в обеих частях тождества (30) коэффициенты при независимых вариациях $d\tilde{\mathbf{p}}, d\mathbf{q}$ и dt, получим

$$\tilde{\mathbf{q}}=\frac{\partial S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)}{\partial\tilde{\mathbf{p}}}, \quad c\mathbf{p}=\frac{\partial S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)}{\partial\mathbf{q}}; \quad \tilde{H}=cH+\partial S/\partial t\,. \tag{31}$$

Первые два равенства (31) определяют условия каноничности преобразования в $\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}}$ – описании, а последнее – формулу преобразования гамильтониана. Для преобразований (29) проверка условий каноничности (условий существования функции $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)$) сводится к проверке тождеств

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial\tilde{\mathbf{p}}^T}-\frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}^T}{\partial\tilde{\mathbf{p}}}\equiv 0\,, \quad \frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\mathbf{q}^T}-\frac{\partial\mathbf{p}^T}{\partial\mathbf{q}}\equiv 0\,, \quad \frac{\partial\tilde{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{q}^T}-c\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\tilde{\mathbf{p}}^T}\equiv 0; \quad c\neq 0\,. \tag{32}$$

По заданной функции $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)$ и постоянной $c\neq 0$ соотношениями (31) однозначно определяются формулы преобразования в виде (29). Чтобы эти формулы приводились к виду (3), должно выполняться условие

$$\det\left(\frac{\partial^2 S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)}{\partial\mathbf{q}\partial\tilde{\mathbf{p}}^T}\right)\neq 0\,. \tag{33}$$

Таким образом, все множество канонических преобразований, *допускающих* $\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}}$ – *описание,* можно получить на основе формул (31), рассматривая всевозможные функции $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)$, удовлетворяющие условию (33), и постоянные $c\neq 0$.

Потребность использования помимо свободных и других типов канонических преобразований обусловлена тем, что не все преобразования являются свободными. Например, *тождественное преобразование не является свободным*. В теории возмущений используются преобразования, близкие к тождественным. Если их задавать с помощью производящих функций $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$ по формулам (25), то они будут близки к вырожденным, в то время как те же преобразования, задаваемые производящей функцией $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)$ формулами (31), таких особенностей не имеют.

Произвольное каноническое преобразование можно представить в виде комбинации унивалентного преобразования и преобразования растяжения. Ввиду того, что преобразование растяжения принципиально не меняет структуру функции Гамильтона, для целей упрощения уравнений движения ограничиваются унивалентными преобразованиями.

Литература:

1. *Гантмахер Ф.Р*. Лекции по аналитической механике. – М.: Физматлит, 2008. – 264 с.
2. *Амелькин Н.И.*. Лагранжева и гамильтонова механика. – М.: МФТИ, 2014. – 112 с.
3. *Маркеев А.П*. Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.