

УДК 531.36

М. А. Муницына

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН

Динамика кельтского камня при малом трении

Рассматривается задача о движении кельтского камня на плоскости с вязким трением. Определяются такие параметры задачи, при которых в течение движения возможна смена направления вращения.

Ключевые слова: вязкое трение, кельтский камень, устойчивость.

М. А. Munitsyna

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

Celt dynamics in the case of low friction

The problem of the motion of a Celt on a plane with viscous friction is considered. The parameters of the problem at which the direction of rotation can be changed during the movement are determined.

Key words: viscouse friction, celt, stability.

Введение

Хорошо известно [1], что при вращении кельтского камня вокруг вертикальной оси направление этого вращения может изменяться в процессе движения. В большинстве работ, посвященных этому свойству, рассматривается неголономная постановка задачи (см., например, [2, 3]). Однако, например, в работе [4] указывается на физическую необоснованность данной постановки.

В настоящей работе продолжается исследование [2], в котором предполагается, что со стороны плоскости на камень действует сила классического вязкого трения. Эта модель трения позволяет провести не только численные [5], но и аналитические исследования.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении тяжелого выпуклого твердого тела на неподвижной горизонтальной плоскости. Пусть \mathbf{v} – скорость центр масс тела, $\boldsymbol{\omega}$ – его угловая скорость, а $\boldsymbol{\gamma}$ – единичный вектор восходящей вертикали. Тогда радиус-вектор точки контакта тела и плоскости определяется равенством $\boldsymbol{\gamma} = -\text{grad } f(\mathbf{r})/|\text{grad } f(\mathbf{r})|$, $f(\mathbf{r}) = 0$ – уравнение поверхности тела, а скорость этой точки имеет вид $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$.

Будем считать, что на тело действуют сила тяжести $-mg\boldsymbol{\gamma}$, нормальная компонента реакции опорной плоскости $\mathbf{N} = N\boldsymbol{\gamma}$ и сила вязкого трения $\mathbf{F} = -\kappa\mathbf{u}$. Уравнения движения тела, записанные в главных центральных осях тела ($\mathbb{J} = \text{diag}(A_1, A_2, A_3)$ – соответствующий тензор инерции), имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = (N - mg)\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r}, N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}], \quad (2)$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0, \quad (3)$$

$$(\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (1) выражает теорему о движении центра масс тела, (2) – теорему об изменении кинетического момента относительно центра масс, (3) – условие постоянства вектора восходящей вертикали, а (4) – условие контакта тела с плоскостью.

Заметим, что если в процессе движения величина N изменит знак с положительного на отрицательный, то произойдет отрыв тела от опорной плоскости. В этом случае в качестве уравнений движения следует рассматривать (1)–(3), положив в них $N = 0$ и $\mathbf{F} = 0$ и добавив к ним уравнение $\dot{z} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})$ (в момент отрыва и при возвращении на контакт $z = 0$). В случае же контакта тела с плоскостью из системы (1)–(4) определяется величина нормальной реакции

$$N = m (g + ([\mathbf{r}, \dot{\boldsymbol{\omega}}] + [\dot{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\omega}], \boldsymbol{\gamma}) + ([\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}], [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}])), \quad (5)$$

что позволяет считать систему (1)–(3) замкнутой относительно переменных \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\gamma}$.

Будем считать, что положительная полуось Ox_3 перпендикулярна поверхности тела. Тогда система (1)–(3) с учетом (5) имеет решения вида

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega \quad (\omega \in R), \quad (6)$$

на которых величина нормальной реакции опорной плоскости равна весу тела. Им соответствуют равномерные вращения тела вокруг перпендикулярной его поверхности главной оси инерции, совпадающей с вертикалью. Уравнение поверхности тела при $\gamma_3 = 1$ можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}) = x_3 + a_3 - \frac{(x_1 \cos \delta + x_2 \sin \delta)^2}{2a_1} - \frac{(x_1 \sin \delta - x_2 \cos \delta)^2}{2a_2} + O_3(x_1, x_2), \quad (7)$$

где a_1 , a_2 – главные радиусы кривизны поверхности тела в точке контакта, a_3 – высота центра масс, δ – угол между векторами главных кривизн и главными осями. Рассматриваемое тело является кельтским камнем [2], если выполнены соотношения $A_1 \neq A_2$, $a_1 \neq a_2$, $\delta \neq 0 \pmod{\pi/2}$.

Хорошо известны [2, 3] условия устойчивости решений (6) в случае неголономной постановки задачи, одним из которых является отрицательное направление вращения. В случае произвольного коэффициента вязкого трения линеаризованные уравнения возмущенного движения системы в окрестности решений (6) довольно громоздки [2] и аналитический анализ условий устойчивости затруднителен. Однако соответствующие области устойчивости при фиксированных параметрах задачи могут быть построены численно [5].

2. Движения в окрестности устойчивых равновесий

Будем считать, что параметры кельтского камня таковы, что соответствующие (6) равновесия устойчивы, т.е. без ограничения общности будем считать, что выполнены соотношения [2]:

$$a_1 > a_2 > a_3, \quad J_1 < J_2 < J_3. \quad (8)$$

Тогда при любом коэффициенте вязкого трения в некоторой окрестности значения $\omega_3 = 0$ существует область устойчивости вращений (6). Например, для кельтского камня с параметрами

$$\begin{aligned} A_1 &= 0.0706 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad A_2 = 0.443 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2, \quad A_3 = 0.49 \cdot 10^{-3} \text{ кг}\cdot\text{м}^2 \\ a_1 &= 0.74 \text{ м}, \quad a_2 = 0.0666 \text{ м}, \quad a_3 = 0.00765 \text{ м}, \quad m = 0.1 \text{ кг}, \quad \delta = 0.7 \end{aligned} \quad (9)$$

эта область представлена на рис. 1.

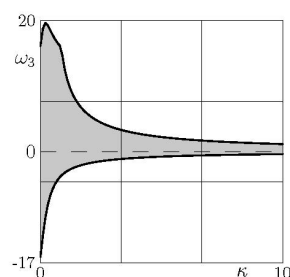


Рис. 1

Рассмотрим движение в окрестности устойчивых равновесий, считая движение безотрывным. Тогда уравнения (1)–(3) с учетом (5) допускают интеграл (4) и геометрический интеграл $(\gamma, \gamma) = 1$, позволяющие исключить переменные v_3 и γ_3 и соответствующие им уравнения. Остальные уравнения запишем в виде

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_1 &= -\omega_2 + \Gamma_1, \\ \dot{\gamma}_2 &= \omega_1 + \Gamma_2, \\ \dot{\omega}_1 &= \frac{mg}{A_1} (\gamma_2 a_3 - b_3 \gamma_1 - b_2 \gamma_2) - \frac{\kappa a_3}{A_1} (\omega_1 a_3 + v_2) + \Omega_1, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{mg}{A_2} (-\gamma_1 a_3 + b_3 \gamma_2 + b_1 \gamma_1) - \frac{\kappa a_3}{A_2} (\omega_2 a_3 - v_1) + \Omega_2, \\ \dot{v}_1 &= \frac{\kappa}{m} (a_3 \omega_2 - v_1) + V_1, \\ \dot{v}_2 &= -\frac{\kappa}{m} (a_3 \omega_1 + v_2) + V_2,\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_3 &= \frac{A_1 - A_2}{A_3} \omega_2 \omega_1 + \frac{mg}{A_3} (b_3 (\gamma_1^2 - \gamma_2^2) - (b_1 - b_2) \gamma_2 \gamma_1) + \\ &+ \frac{\kappa \omega_3}{A_3} \left(\frac{a_1 a_2 (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) (b_1^2 + b_2^2)}{(a_1 + a_2)^2} - (b_1 \gamma_1^2 + b_2 \gamma_2^2) (b_1 + b_2) - 2 b_3 (a_1 + a_2) \gamma_1 \gamma_2 \right) + \\ &+ \frac{\kappa b_3}{A_3} (a_3 (\omega_2 \gamma_1 + \omega_1 \gamma_2) - (v_1 \gamma_1 - v_2 \gamma_2)) + \\ &+ \frac{\kappa}{A_3} (a_3 (b_1 \omega_1 \gamma_1 + b_2 \omega_2 \gamma_2) + b_1 v_2 \gamma_1 - b_2 v_1 \gamma_2),\end{aligned}\tag{11}$$

где

$$b_1 = a_1 \cos^2 \delta + a_2 \sin^2 \delta, \quad b_2 = a_1 \sin^2 \delta + a_2 \cos^2 \delta, \quad b_3 = (a_1 - a_2) \sin \delta \cos \delta,$$

а Γ_i , Ω_i и V_i ($i = 1, 2$) функции, разложения которых по степеням переменных системы (10), (11) содержит только члены не ниже второго порядка этих переменных, а Ω_3 – члены не ниже четвертого.

Система (10) в случае $\Gamma_i = 0$, $\Omega_i = 0$ и $V_i = 0$ ($i = 1, 2$) замкнута и при $\kappa = 0$ описывает малые колебания кельтского камня на абсолютно гладкой плоскости. Частоты этих колебаний ($\xi_1 > \xi_2 > 0$) являются корнями уравнения

$$A_1 A_2 \xi^4 + mg (A_1 (b_1 - a_3) + A_2 (b_2 - a_3)) \xi^2 + m^2 g^2 (a_1 - a_3) (a_3 - a_2) = 0.$$

Рассмотрим замену переменных вида

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \rho_1 \cos \varphi_2 - \frac{mg b_3}{mg (b_1 - a_3) - A_2 \xi_1^2} \rho_2 \sin \varphi_2, \\ \gamma_2 &= -\frac{mg b_3}{mg (b_2 - a_3) - A_1 \xi_2^2} \rho_1 \cos \varphi_2 + \rho_2 \sin \varphi_1, \\ \omega_1 &= \frac{mg \xi_2 b_3}{mg (b_2 - a_3) - A_1 \xi_2^2} \rho_1 \sin \varphi_2 + \xi_1 \rho_2 \cos \varphi_1, \\ \omega_2 &= \xi_2 \rho_1 \sin \varphi_2 + \frac{mg \xi_1 b_3}{mg (b_1 - a_3) - A_2 \xi_1^2} \rho_2 \cos \varphi_1,\end{aligned}$$

считая малым отклонение от равновесий ($\rho_i \ll 1$, $\omega_3/\xi_i \ll 1$ ($i = 1, 2$)) и коэффициент трения ($\kappa/(m\xi_i) \ll 1$ ($i = 1, 2$)). Тогда в системе (10), (11), записанной в новых переменных без учета слагаемых Γ_i , Ω_i , V_i ($i = 1, 2$) и Ω_3 , переменные ρ_1 и ρ_2 являются медленными, а φ_1 и φ_2 – быстрыми. Величина ω_3 при этом также является медленной переменной, т.к. в отсутствие трения решения уравнений движения выпуклого тела на гладкой плоскости являются условно-периодическими функциями времени [6] и первое слагаемое правой части (11) в среднем не меняется.

Считая нерезонансными значения ξ_1 и ξ_2 и осредняя указанные уравнения по быстрым переменным получим

$$\dot{\rho}_1 = -\alpha_1 \rho_1, \quad \dot{\rho}_2 = -\alpha_2 \rho_2, \quad \dot{\omega}_3 = -(\beta_1 \rho_1^2 + \beta_2 \rho_2^2) \omega_3,\tag{12}$$

где постоянные коэффициенты α_i , β_i ($i = 1, 2$) определяются равенствами

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{\kappa a_3^2}{2A_{3-i}} \left(1 + \frac{m^2 g^2 b_3^2 (A_i - A_{3-i})}{A_1 A_2 \xi_1^2 \xi_2^2 - mg (A_1 \xi_2^2 (b_1 - a_3) + A_2 \xi_1^2 (b_2 - a_3)) + m^2 g^2 (a_1 - a_3) (a_3 - a_2)} \right), \\ \beta_i &= \left[(a_i^2 \cos^2 \delta + a_{3-i}^2 \sin^2 \delta) A_i^2 \xi_{3-i}^4 + (a_1^2 a_2^2 - 2a_1 a_2 a_3 b_i + a_3^2 (a_i^2 \sin^2 \delta + a_{3-i}^2 \cos^2 \delta)) m^2 g^2 + \right. \\ &\left. + 2 (a_3 (a_i^2 \cos^2 \delta + a_{3-i}^2 \sin^2 \delta) - 2a_1 a_2 b_i) A_i \xi_{3-i}^2 gm \right] / (2A_3 (mg (b_{3-i} - a_3) - A_i \xi_{3-i}^2)^2).\end{aligned}$$

Поскольку уравнения (12) не содержат переменных v_1 и v_2 , соответствующие уравнения не приводятся. Решая систему (12), получим

$$\begin{aligned} \rho_1(t) &= \rho_1(0) \exp(-\alpha_1 t), \quad \rho_2(t) = \rho_2(0) \exp(-\alpha_2 t), \\ \omega_3(t) &= \omega_3(0) \exp\left(-\frac{\beta_1}{2\alpha_1}(\rho_1(0)^2 - \rho_1(t)^2) - \frac{\beta_2}{2\alpha_2}(\rho_2(0)^2 - \rho_2(t)^2)\right). \end{aligned} \quad (13)$$

На рис. 2 представлены зависимости величины ω_3 от времени при интегрировании уравнений (10), (11) (серые кривые) для кельского камня с параметрами (9) на плоскости с коэффициентом трения $\kappa = 0.4$ кг/с при начальных условиях

$\gamma_3(0) = 0.99$, $\gamma_1(0) = 0$, $\omega_3(0) = \pm 15$ рад/с, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$, $\mathbf{v}(0) = 0$ (величина $\gamma_1(0)$ определялась геометрическим интегралом) и соответствующая зависимость (13) (черные кривые).

На рис. 3 представлены те же результаты для меньшего значения начальной угловой скорости ($\omega_3(0) = \pm 1$ рад/с). Как и следовало ожидать, решение точной системы представляет собой сумму плавно меняющейся медианы, хорошо совпадающей с решением осредненной системы и быстро осциллирующей затухающие компоненты. Заметим, что изменение абсолютной величины ω_3 в решении осредненной системы не зависит от ее знака, и существенных отличий в решениях точной системы при противоположных начальных направлениях вращения не наблюдается.

Следует отметить, что возможно отклонение среднего значения точного решения от решения осредненной системы (на величину первого порядка малости). Для тех же параметров задачи отклонение наблюдается (см. рис 4, 5) при начальных условиях

$$\gamma_3(0) = 0.97, \quad \omega_3(0) = \pm 1 \text{ рад/с}, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \quad \mathbf{v}(0) = 0,$$

где значения $\gamma_1(0)$ и $\gamma_2(0)$ определяются равенствами $\rho_1(0) = 0$ (рис. 4) и $\rho_2(0) = 0$ (рис. 5).

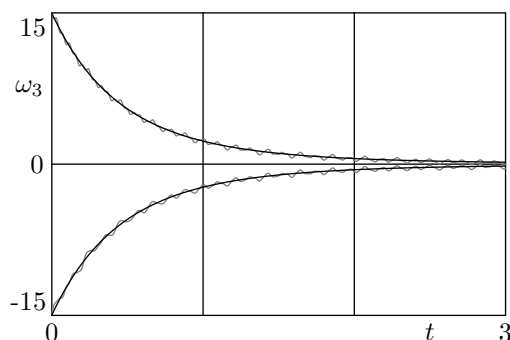


Рис. 2

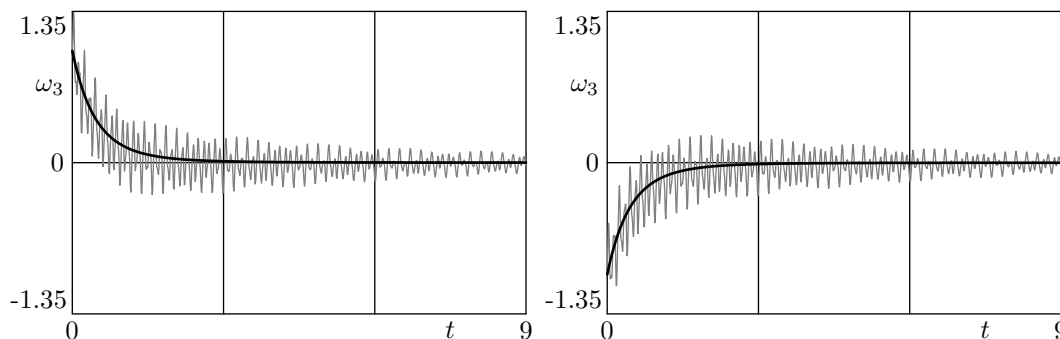


Рис. 3

Таким образом, несмотря на то, что финальное значение ω_3 решения усредненной системы (13) совпадает по знаку с начальным, соответствующее решение полной системы (10), (11) может поменять знак как с положительного на отрицательный, так и наоборот.

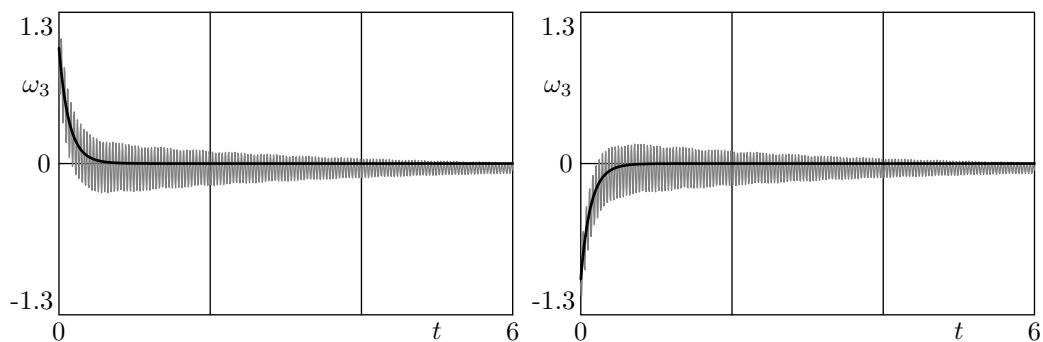


Рис. 4

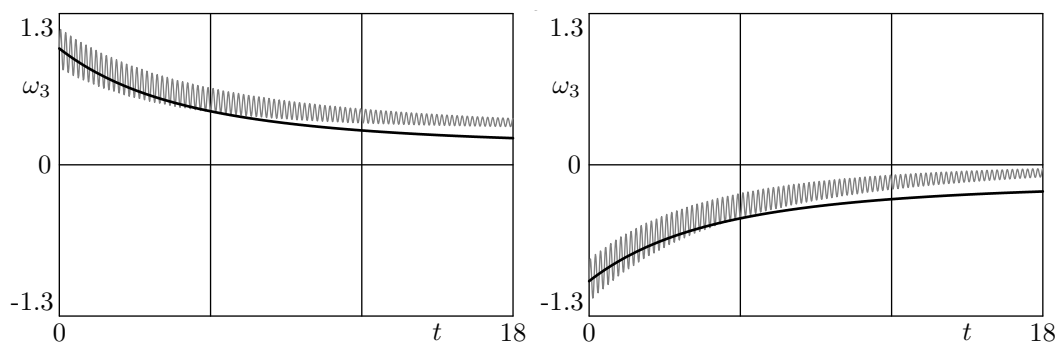


Рис. 5

Соответствующие результаты при тех же начальных условиях, что и в предыдущем случае, но при $\kappa = 1$ кг/с представлены на рис. 6.

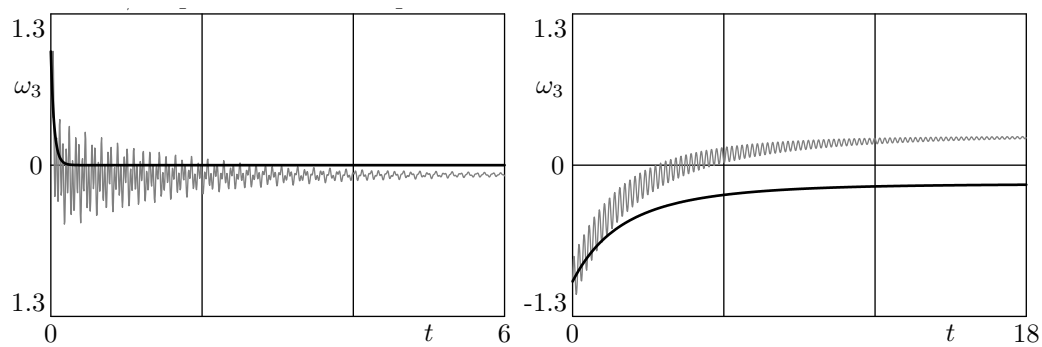


Рис. 6

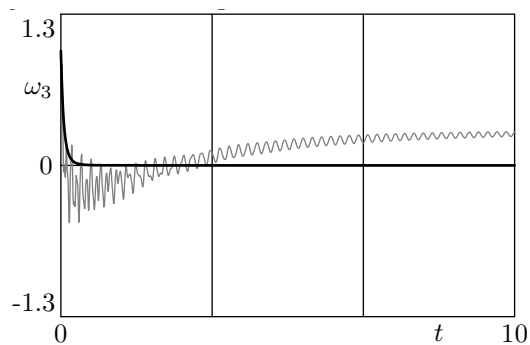


Рис. 7

Кроме того, при интегрировании точных уравнений движения (10), (11) может наблюдаться несколько смен знака не только величины ω_3 , но и ее среднего значения. Соответствующее решение при $\kappa = 3$ кг/с представлено на рис. 7.

В заключение заметим, что при выполнении неравенств (8) резонанс $\xi_1 = \xi_2$ невозможен. Но существуют такие параметры задачи, при которых величины ξ_1 и ξ_2 принимают относительно близкие значения, что позволяет при некотором классе начальных условий оценить финальное значение решения точной системы [7]. Кроме того, возможны случаи $\xi_1/\xi_2 \in \mathbb{Q}$. Тогда осредненная система имеет аналогичный (12) вид и качественно динамика совпадает с рассмотренным случаем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00140, 18-01-00335) и Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники».

Литература

1. Walker J. The mysterious «ratterback»: a stone spins in one direction and then reverses // Scientific american. 1979. № 10. P. 144–149.
2. Карпетян А.В. Устойчивость стационарных движений. Москва : Эдиториал УРСС , 1998. 168 с.
3. Маркеев А.П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. Москва : Наука, Физматлит, 1992. 336 с.
4. Климов Д.М., Журавлёв В.Ф. Глобальное движение кельтского камня // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. Т. 43, № 3. С. 8–16.
5. Муницына М.А. Численное исследование динамики кельтского камня на плоскости с вязким трением // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 1. С. 137–142.
6. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London : Macmillan, 1884. 343 p.
7. Муницына М.А. Динамика кельтского камня на плоскости с вязким трением // Автоматика и телемеханика (направлено в редакцию).

References

1. Walker J. The mysterious «ratterback»: a stone spins in one direction and then reverses // Scientific american. 1979. № 10. P. 144–149. (in Russian).
2. Karapetyan A.V. Stability of steady motions. Moscow : Editorial URSS, 1998. (in Russian).
3. Markeev A.P. The dynamics of the body osculating with a solid surface. Moscow : Nauka, Fizmatlit, 1992. (in Russian).
4. Klimov D.M., Zhuravlev V.P. Global motion of the celt. Izvestia RAS. Mechanics of Solids. 2008. V. 43, N 3. P. 8–16.
5. The numerical study of dynamics of the celt on a horizontal plane with viscous friction. Proceedings of MIPT. 2020. V. 12, N 1. P. 137–142. (in Russian).
6. Routh E.J. The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies. London : Macmillan, 1884. 343 p.
7. Munitsyna M.A. Dynamics of the celt on a horizontal plane with viscous friction. Avtomatika i Telemekhanika (sent to the editors). (in Russian).