

ЭЛЕМЕНТЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ

ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.П.Иванов

1. **Основные понятия.** *Динамической системой* (с непрерывным временем) называют систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T \quad (1.1)$$

где функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Коши о существовании единственного решения при данных начальных условиях $x(t_0) = x_0$. В простейшем случае $n = 1$ уравнение (1.1) можно проинтегрировать и представить решение в неявной форме:

$$t = t_0 + \int_{x_0}^x \frac{dx}{f(x)}$$

В задачах механики полагают

$$x = (q_1, \dots, q_k, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_k)^T \quad (1.2)$$

где q_1, \dots, q_k - обобщенные координаты; при этом порядок системы (1.1) не меньше двух. Аналитическое построение общего решения возможно лишь в редких частных случаях, например, если правая часть линейна.

Качественное исследование включает отыскание частных решений и исследование их свойств при неограниченном росте времени.

1.1. *Положения равновесия* – это простейшие частные решения. Им отвечают решения алгебраического уравнения

$$f(x) = 0 \quad (1.3)$$

Если начальное значение $x(t_0) = x^*$ удовлетворяет этому уравнению, то $x(t) \equiv x^*$. Отметим, что для нелинейной функции $f(x)$ уравнение (1.3) может иметь несколько корней (в том числе бесконечно много) или быть неразрешимым.

1.2. *Периодические траектории* характеризуются соотношением

$$x(t + \tau) = x(t), \quad \forall t \geq t_0$$

где величина периода τ - некоторое положительное число. В фазовом пространстве R^n системы (1.1) положения равновесия изображаются единственной точкой, а периодические траектории – замкнутыми кривыми (рис. 1 а, б).

• а

б

в

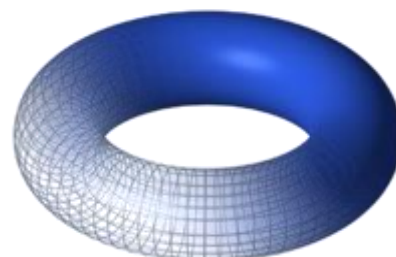
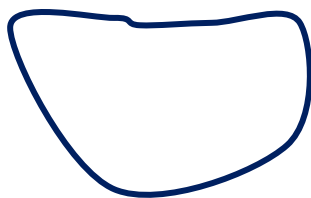


Рис.1. Регулярные решения: а) равновесие; б) периодическое; в) условно периодическое

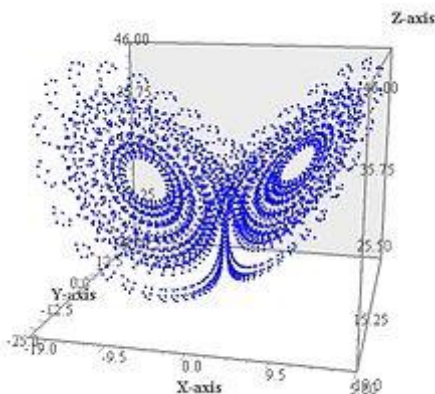


Рис.2. Странные аттракторы

1.3. *Ограниченные траектории.* Свойство ограниченности траектории означает, что ее можно накрыть некоторым шаром. В задачах механики ограниченность часто обусловлена диссипативностью, т.е. невозрастанием механической энергии. Условно периодическая траектория характеризуется набором рационально несоизмеримых частот $\omega_1, \dots, \omega_s$ и функцией $\varphi(\omega_1 t, \dots, \omega_s t)$ со значениями в R^n , 2π -периодической по каждому из аргументов. Эта траектория незамкнута и всюду плотно обматывает тор (рис.1, в). На практике типичны более сложные хаотические траектории, образующие причудливые геометрические формы (рис.2). Хаотической динамике присуща сверхчувствительность решения задачи Коши к изменению начальных условий («эффект бабочки»). При численном моделировании такой системы можно построить весь маршрут (так называемый «странный аттрактор»), но нельзя предсказать, когда именно мы попадем в ту или иную его часть.

Примеры. 1. Для математического маятника длины l положим x_1 равным углу между стержнем и вертикалью, $x_2 = \dot{x}_1$. Уравнения (1.1) выглядят так:

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\omega^2 \sin x_1, \quad \omega = \sqrt{g/l} \quad (1.4)$$

Положения равновесия определяем из условия (1.3):

$$x_1^* = \pi l, \quad x_2^* = 0, \quad l \in Z \quad (1.5)$$

Нижнее положение (l четное) окружено периодическими орбитами, причем период зависит от амплитуды. При стремлении последней к нулю имеем $\tau \rightarrow 2\pi / \omega$.

2. В системе двух одинаковых математических маятников, не связанных друг с другом, движение будет периодическим или условно периодическим в зависимости от того, будет ли отношение периодов τ_1 / τ_2 рациональным числом.
3. Если связать маятники пружинкой, сохранятся два семейства периодических движений, для которых углы отклонения маятников равны либо противоположны. Этим динамика системы далеко не исчерпывается: в ней также имеются условно периодические и хаотические движения.
4. Задача о конвекции морской воды в плоском слое в некотором приближении описывается системой

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = x(r - z) - y, \quad \dot{z} = xy - bz \quad (1.6)$$

где σ, r, b - физические параметры. Уравнения (1.6) были численно исследованы американским математиком и метеорологом Э.Лоренцом (1917-2008), который обнаружил при определенных значения параметров наличие странного аттрактора (справа на рис.2). Благодаря этому синоптики могут строго обосновать невозможность успешных долгосрочных прогнозов погоды.

2. **Устойчивость равновесия.** В повседневной жизни устойчивостью называют сохранение каких-либо свойств при наличии неблагоприятных факторов. Наука об устойчивости восходит к труду Архимеда «О плавании тел» (3-й век до н.э.). Современный вид теория устойчивости приобрела во многом благодаря выдающемуся российскому ученому А.М.Ляпунову, сформулировавшему в своей диссертации (1892) основные понятия и методы исследования.

Определение 1. Положение равновесия x^* системы (1.1) называется *устойчивым (по Ляпунову)*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x(t_0) - x^*| < \delta$ следует $|x(t) - x^*| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0$.

Здесь $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ - евклидова норма.

Определение 2. Положение равновесия x^* называется *притягивающим*, если

найдется такое $\delta > 0$, что из неравенства $|x(t_0) - x^*| < \delta$ следует $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*$.

Определение 3. Положение равновесия x^* системы (1.1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчивое и притягивающее.

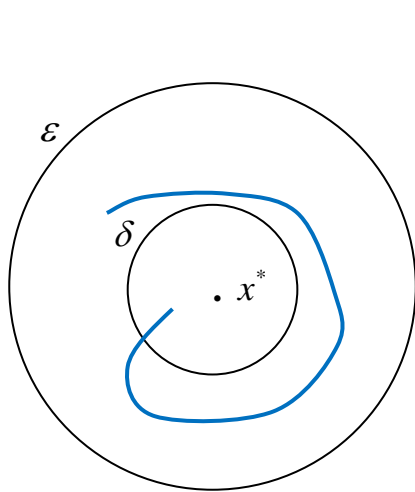


Рис.3. Геометрическая интерпретации устойчивости

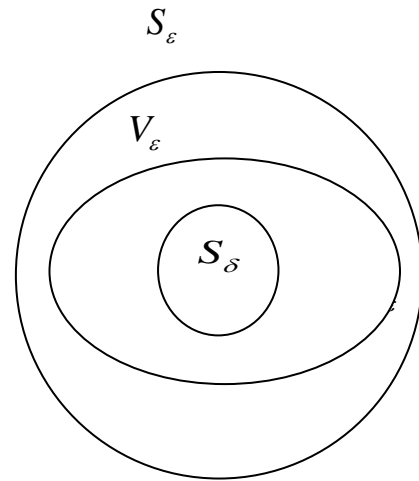


Рис.4. К доказательству теоремы Ляпунова об устойчивости

Геометрический смысл устойчивости (рис.3): траектория, стартующая из δ - окрестности положения равновесия, не покидает затем его ϵ - окрестности.

3. Метод функций Ляпунова. *Функцией Ляпунова* называют непрерывно дифференцируемую функцию $V : R^n \rightarrow R$, равную нулю в положении равновесия системы (1.1), строго положительную в некоторой его окрестности и невозрастающую на решениях системы. Построение таких функций лежит в основе второго метода Ляпунова исследования устойчивости. Не ограничивая общности, поместим начало координат в исследуемую точку x^* .

Теорема Ляпунова об устойчивости. Пусть существует функция $V : R^n \rightarrow R$, для которой $V(0) = 0$, в некоторой проколотой окрестности начала координат $V(x) > 0$, причем производная этой функции в силу уравнений (1.1) неположительна:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \leq 0 \quad (3.1)$$

Тогда $x = 0$ - устойчивое положение равновесия.

Доказательство можно провести геометрически (рис. 4). Для проверки определения 1 построим сферу S_ϵ произвольного радиуса ϵ с центром в начале. Непрерывная функция $V(x)$ достигает на S_ϵ минимума $m_\epsilon > 0$. Тогда множество $V_\epsilon = \{x | V(x) = m_\epsilon / 2\}$ представляет собой замкнутую поверхность, лежащую внутри S_ϵ

и окружающую начало. Вследствие (3.1) траектории не могут пересекать эту поверхность в направлении изнутри наружу. Поэтому в определении 1 достаточно выбрать число δ таким, чтобы сфера S_δ лежала внутри V_ε .

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости. Пусть существует функция $V : R^n \rightarrow R$, для которой $V(0) = 0$, в некоторой проколотой окрестности начала координат $V(x) > 0$, причем производная этой функции в силу уравнений (1.1) отрицательно определена, т.е. неравенство (3.1) для $x \neq 0$ – строгое. Тогда $x = 0$ – асимптотически устойчивое положение равновесия.

Для доказательства достаточно установить свойство притяжения, сформулированное в определении 2. В силу строгого неравенства (3.1) величина $V(x(t))$ строго монотонно убывает вдоль каждого решения $x(t) \neq 0$. По теореме Вейерштрасса, существует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t)) = A \geq 0$$

Очевидно неравенство $A > 0$ означало бы, что траектория отделена от нуля. Тогда по условию производная $dV/dt < 0$ также отделена от нуля, и значения $V(x(t))$ неограниченны снизу. Это противоречит положительности функции $V(x)$. Следовательно, $A = 0$, т.е. $x(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, что и требовалось.

Теорема Четаева о неустойчивости. Пусть существует функция $V : R^n \rightarrow R$, для которой в любой окрестности начала координат имеется непустая область, где $V(x) > 0$, причем производная (3.1) в этой области строго положительна, то положение равновесия неустойчиво.

Доказательство неустойчивости равносильно отысканию такого числа $\varepsilon > 0$, что найдутся траектории, начинающиеся сколь угодно близко к началу координат и покидающие через некоторое время внутренность S_ε . Для этого достаточно, чтобы сфера S_ε имела непустое пересечение с областью $V(x) > 0$: если траектория стартует из любой точки этой области, то при сделанных предположениях величина $V(x(t))$ монотонно растет, причем ее производная по времени отделена от нуля. Поэтому траектория не может сколь угодно долго оставаться внутри S_ε .

Пример. Уравнения динамики твердого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера имеют вид

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C - B)qr = 0 \\ B\dot{q} + (A - C)pr = 0 \\ C\dot{r} + (B - A)pq = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

где p, q и r проекции угловой скорости тела на его главные оси инерции. Система (5.6) допускает равновесное решение $p = q = 0, r = r_0 > 0$, соответствующее равномерному вращению тела вокруг главной оси. Допустим, что выполнено неравенство $(A - C)(C - B) > 0$, т.е. вращение происходит вокруг средней оси инерции. Возьмем функцию

$$V = pq \Rightarrow \dot{V} = (B - C)A^{-1}rq^2 + (C - A)B^{-1}rp^2 \quad (3.3)$$

Производная функции (3.3) при сделанных предположениях строго положительна в области $p > 0, q > 0$, если $A < B$, в достаточно малой окрестности исследуемого решения, из теоремы Четаева следует неустойчивость (в случае $A > B$ можно взять $V = -pq$). В случае, если $(B - C)(C - B) < 0$ (вращение происходит вокруг наибольшей или наименьшей оси инерции), Устойчивость можно доказать по теореме Ляпунова, полагая

$$V = A|A - C|p^2 + B|B - C|q^2 \quad (3.4)$$

Несложно проверить, что функция (3.4) является первым интегралом системы (3.2). При учете интеграла энергии

$$r = \left(r_0^2 - \frac{A}{C}p^2 - \frac{B}{C}q^2 \right)^{1/2} \quad (3.5)$$

Следовательно, поверхности уровня функции (3.4) окружают точку равновесия, откуда следует устойчивость. (Более формальное, но громоздкое доказательство можно построить, подставляя равенство (3.5) в первые два уравнения системы (3.2), а затем рассматривая функцию (3.4).)

4. Устойчивость по первому приближению. Теоремы предыдущего параграфа имеют общий характер, они не содержат рецепта построения функции Ляпунова. На практике распространен конструктивный алгоритм, основанный на линеаризации уравнений (1.1) в окрестности положения равновесия. Без ограничения общности, считаем $x^* = 0$ (этого можно добиться заменой $x \rightarrow x - x^*$, не изменяющей левую часть системы).

Наряду с данной системой (1.1) рассмотрим вспомогательную линейную систему

$$\dot{x} = Jx, \quad J = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^n \quad (4.1)$$

где частные производные вычисляются в начале координат. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что общее решение системы (4.1) является суммой квазимногочленов, т.е. функций вида

$$\phi_j(t) = P_{n_j}(t)e^{\lambda_j t} \quad (4.2)$$

Здесь λ_j - собственное значение матрицы J (вообще говоря, комплексное), $P_{n_j}(t)$ - многочлен, степень которого на единицу меньше кратности собственного значения, с коэффициентами, зависящими от начальных условий задачи Коши.

Для решения задачи об устойчивости системы (4.1) коэффициенты многочленов $P_{n_j}(t)$ несущественны: определяющую роль играют вещественные части собственных значений $\operatorname{Re} \lambda_j$. При помощи правила Лопиталья-Бернулли, несложно показать, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi_j(t) = \begin{cases} \infty, & \text{если } \operatorname{Re} \lambda_j > 0 \\ 0, & \text{если } \operatorname{Re} \lambda_j < 0 \end{cases}$$

Отсюда можно сделать вывод; нулевое решение системы (4.1) асимптотически устойчиво, если

$$\operatorname{Re} \lambda_j < 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (4.3)$$

и неустойчиво, если хотя бы одно из этих неравенств имеет противоположный смысл. Следующее утверждение связывает свойства устойчивости линейной системы (4.1) и исходной нелинейной системы (1.1).

Теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению. Если все неравенства (4.3) выполнены, то положение равновесия системы (1.1) асимптотически устойчиво. В случае, если хотя бы одно из этих неравенств имеет противоположный смысл – неустойчиво.

Замечание. Данная теорема не охватывает случаи, когда для части чисел λ_j выполнены условия (4.3), а для всех остальных чисел λ_j вещественные части равны нулю. Такие случаи называют *критическими*: здесь возможна как устойчивость, так и неустойчивость в зависимости от значений производных функции $f(x)$ старших порядков.

Для проверки условий (4.3) следует составить характеристический многочлен для матрицы J

$$\chi(J) = \det(J - \lambda E_n) \quad (4.4)$$

где E_n - единичная матрица соответствующего порядка. Далее можно воспользоваться теоремой Рауса – Гурвица (аналитический подход), а при решении практических задач высокой размерности - пакетом символьных вычислений для вычислений корней полинома (4.4).

5. Влияние структуры сил на устойчивость. В задачах механики в ряде случаев роль функции Ляпунова играет полная механическая энергия.

Теорема Лагранжа. Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия Π имеет строгий минимум, то такое положение равновесия устойчиво.

Доказательство. В консервативной системе кинетическая энергия T представляет собой квадратичную форму относительно обобщенных скоростей, коэффициенты которой не зависят явно от времени (могут зависеть от обобщенных координат). Известно, что такая система обладает интегралом энергии

$$E = T + \Pi = \text{const} \quad (5.1)$$

При сделанных предположениях функция $V(x) = T(x) + \Pi(q)$ с учетом обозначений (1.2) удовлетворяет условиям теоремы Ляпунова об устойчивости.

Важным частным случаем теоремы Лагранжа является принцип Торричелли: если система твердых тел находится в однородном поле тяжести, то наинизшее положение центра тяжести соответствует устойчивому равновесию. Заметим, что в случае консервативной системы устойчивость всегда неасимптотическая ввиду отсутствия свойства притяжения. Поэтому теорема из предыдущего раздела здесь не работает (критический случай).

Строго говоря, формальное обращение теоремы Лагранжа неверно. На практике достаточно следующего результата, принадлежащего Ляпунову.

Теорема 5.1. Если в положении равновесия консервативной системы потенциальная энергия Π не имеет минимума, и это можно усмотреть по членам второго порядка в ее разложении, то положение равновесия неустойчиво.

Доказательство. Воспользуемся методом линеаризации. Для консервативной системы

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad \Pi(q) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} q_i q_j + \dots \quad (5.2)$$

где многоточие заменяет остаток в формуле Тейлора. В терминах энергии линеаризация уравнений движения равносильна замене в формулах (5.2) $a_{ij}(q)$ на $a_{ij}(0)$ с отбрасыванием многоточия. При этом кинетическая и потенциальная энергии превратятся в квадратичные формы с матрицами A и C соответственно. Первая из

этих матриц всегда положительно определена, и можно воспользоваться теоремой о приведении пары форм к каноническому виду из линейной алгебры. Согласно этой теореме, существует такое невырожденное линейное преобразование

$$q = U\theta, \quad \theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T \quad (5.3)$$

что в новых обобщенных координатах

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\theta}_j^2, \quad \Pi_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \rho_j \theta_j^2 \quad (5.4)$$

Уравнения Лагранжа для системы (5.4) имеют простую форму

$$\ddot{\theta}_j + \rho_j \theta_j = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

По условию, среди чисел ρ_j есть отрицательные. Отсюда следует неустойчивость по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Пример. Для математического маятника нижнее положение равновесия $x_1^* = 0$ соответствует минимуму потенциальной энергии $\Pi = mgl(1 - \cos x_1)$ и устойчиво по теореме Лагранжа. Напротив, в верхнем положении $x_1^* = \pi$, при этом $\Pi''(\pi) < 0$ и из теоремы 5.1 следует неустойчивость.

Следующие теоремы были сформулированы Томсоном (Кельвин) и Тетом и строго доказаны Четаевым.

Теорема 5.2. Если положение равновесия устойчиво при одних потенциальных силах, то при добавлении произвольных гироскопических и диссипативных сил устойчивость сохраняется.

Теорема 5.3. Если изолированное положение равновесия устойчиво при одних потенциальных силах, то оно становится асимптотически устойчивым при добавлении произвольных гироскопических и диссипативных сил с полной диссипацией.

Доказательство теорем 5.2 и 5.3 сводится к проверке условий теорем Ляпунова об устойчивости и асимптотической устойчивости, в которых роль функции V играет полная энергия (5.1). Определенные технические трудности, обусловленные возможностью равенства $\dot{V} = 0$, можно преодолеть по аналогии с доказательством теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости.

В частности, данные теоремы утверждают, что выполнение условий теоремы Лагранжа обеспечивает устойчивость положения равновесия при наличии сил трения вне зависимости от их природы. Данный факт вполне согласуется с интуитивным понятием об устойчивости: сохранять равновесие на сухом асфальте легче, нежели на мокром льду. Гораздо более содержателен вопрос о возможности стабилизации

равновесия посредством добавления к консервативной системе непотенциальных сил. Ответ на этот вопрос каждый из нас знает с детства: для того, чтобы устойчиво поставить волчок-юлу в вертикальное положение, необходимо его раскрутить (гиростабилизация). Разумеется, наличие трения достаточно быстро остановит вращение волчка. Это свидетельствует о разрушении гиростабилизации вследствие трения. В практических целях бывает достаточно стабилизации на заданном конечном промежутке времени. Для этой цели оружейные стволы снабжают винтовой нарезкой.

С позиций динамики, для достижения гиростабилизации необходимо придать системе некоторое вращение: при этом возникают гироскопические кориолисовы силы инерции. Заманчивая идея универсальности такого метода была опровергнута вышеупомянутыми классиками.

Теорема 5.4. Если число отрицательных коэффициентов ρ_j в формулах (5.4) нечетно, то положение равновесия остается неустойчивым при добавлении произвольных гироскопических сил.

Теорема 5.5. Если положение равновесия с четным числом отрицательных коэффициентов ρ_j в формулах (5.4) стабилизировано при помощи некоторых гироскопических сил, то оно станет неустойчивым при добавлении произвольных сил сопротивления с полной диссипацией.

Пример. Рассмотрим динамически симметричное тяжелое твердое тело (волчок Лагранжа). Аналогично маятнику, имеется два положения равновесия: нижнее устойчивое и верхнее неустойчивое. Выясним возможность гиростабилизации. Как известно из курса динамики твердого тела, в случае Лагранжа уравнения движения при помощи первых интегралов могут быть сведены к единственному дифференциальному уравнению относительно переменной $u = \cos \theta$:

$$A\dot{u}^2 = f(u), \quad f(u) = (2h - Cr^2)(1 - u^2) - 2mglu(1 - u^2) - A^{-1}(k - Cru)^2 \quad (5.6)$$

где k, h и r - значения первых интегралов, определяемые начальными условиями. Границы изменения угла нутации θ определяются интервалом положительности функции $f(u)$. При верхнем положении центра тяжести имеем $u = 1$, откуда следует

$$k = Cr, \quad \dot{u} = 0, \quad h = \frac{1}{2}Cr^2 + mgl \quad (5.7)$$

Первое равенство (5.7) вытекает из условия неотрицательности правой части на действительном движении, а третье равенство выражает интеграл энергии через угловую скорость и высоту центра тяжести над неподвижной точкой. Поскольку

$$\begin{aligned} f'(u) &= -2u(2h - Cr^2) - 2mgl(1 - u^2) + 4mglu^2 + 2CrA^{-1}(k - Cru) \\ f''(u) &= -2(2h - Cr^2) + 12mglu - 2C^2r^2A^{-1} \end{aligned}$$

то при выполнении равенств (5.7) получаем

$$f'(1) = 0, \quad f''(1) = 8mgl - 2C^2 r^2 A^{-1} \quad (5.8)$$

Для проверки устойчивости по Ляпунову воспользуемся непосредственно определением 1. Если начальные условия выбраны δ - близкими к $\theta = 1, \dot{\theta} = 0$, то равенства (5.7) будут выполнены приближенно (с погрешностью порядка δ). При этом в формулах (5.8) величина $f'(1)$ будет отличаться от нуля (на величину порядка δ), а вторая производная $f''(1)$ сохранит свой знак (если только она не равна нулю). Возможно два случая (см. рис.5, где показаны примерные графики $f(u)$). а) Если $f''(1) > 0$, то в начальный момент $f(u_0) > 0, f(1) \leq 0$, поэтому один из нулей функции $f(u)$ лежит между u_0 и единицей, другой же нуль u_1 , необходимо лежащий в интервале $(-1, u_0)$, удален от u_0 на расстояние, не исчезающее вместе с δ . Такая ситуация свидетельствует о неустойчивости. б) Во втором случае $f''(1) < 0$, в начальный момент также $f(u_0) > 0, f(1) \leq 0$, однако вследствие неравенства $f''(u_0) < 0$ второй нуль удален от u_0 на расстояние порядка δ . Окончательно приходим к выводу: для устойчивости необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$C^2 r^2 > 4Amgl \quad (5.9)$$

известного как условие Маиевского. Заметим, что согласно теореме 5.5, вследствие трения волчок рано или поздно упадет. Это не препятствует широкому практическому использованию гироскопических устройств.

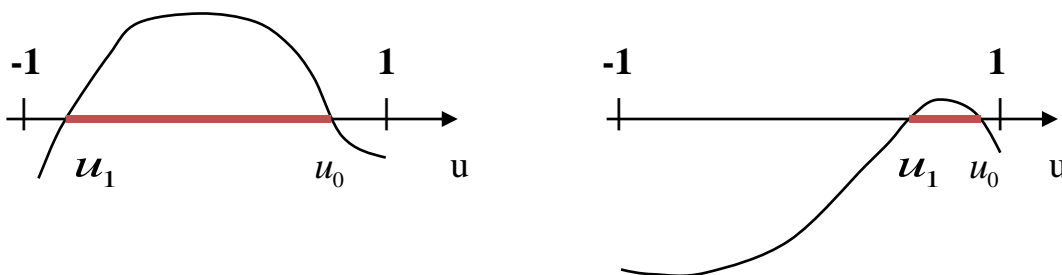


Рис. 5. Области возможного движения волчка
а) неустойчивый случай; б) устойчивый случай

6. Кривая равновесий. В реальных динамических системах правая часть зависит не только от переменных состояния x , но и от некоторого параметра α (или нескольких параметров). При изменении параметра может меняться количество корней уравнения (1.3), а также характер устойчивости соответствующих им положений равновесия системы (1.1). Надо иметь в виду,

что переменные состояния обычно допускают весьма точное измерение, тогда как некоторые внешние параметры (например, влажность или скорость ветра) скорее стоит считать не константами, а медленно меняющимися функциями времени. Как правило, эти плавные изменения параметров не меняют качественно картину движения, а вызывают лишь смещение положения равновесия без изменения его характера устойчивости.

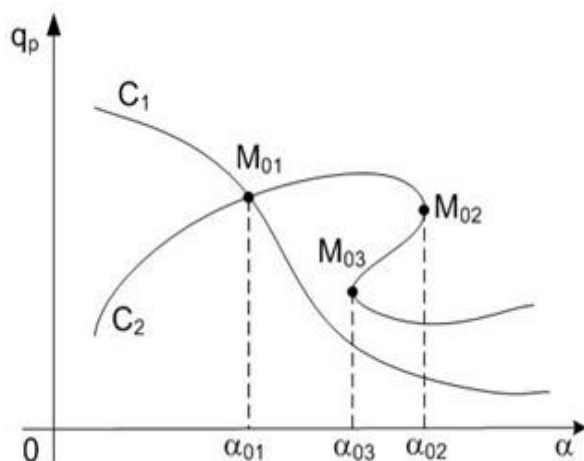


Рис. 6. Пример кривой равновесий

Однако имеются и ключевые значения параметра α , в окрестности которых динамика системы существенно неодинакова. Такие значения называют *бифуркационными*. Допустим, что при фиксированном значении $\alpha = \alpha_0$ нам удалось найти корень $x = x_0$ уравнения

$$f(x, \alpha) = 0 \tag{6.1}$$

Согласно теореме о неявной функции, если матрица Якоби J , определенная в (4.1), невырождена, то уравнение (6.1) в некоторой окрестности значения (x_0, α_0) имеет единственный корень $x = x(\alpha)$, зависящий от параметра непрерывно дифференцируемым образом. Следовательно, точка бифуркации определяется соотношением

$$\det \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|_{i,j=1}^n = 0 \tag{6.2}$$

Геометрическую интерпретацию кривой равновесий удобно дать для случая единственной переменной состояния (на рис. 6 она обозначена q_p). Здесь имеется три точки, где выполнено равенство (6.2), обозначенные α_{01} , α_{02} и α_{03} . Первая из точек соответствует пересечению двух ветвей кривой равновесий, две других – экстремумам функции $\alpha = \alpha(x)$.

7. Основные типы бифуркаций. Ветви кривой (6.1) разбивают плоскость (x, α) на несколько областей, в каждой из которых функция $f(x, \alpha)$ сохраняет знак (рис. 7).

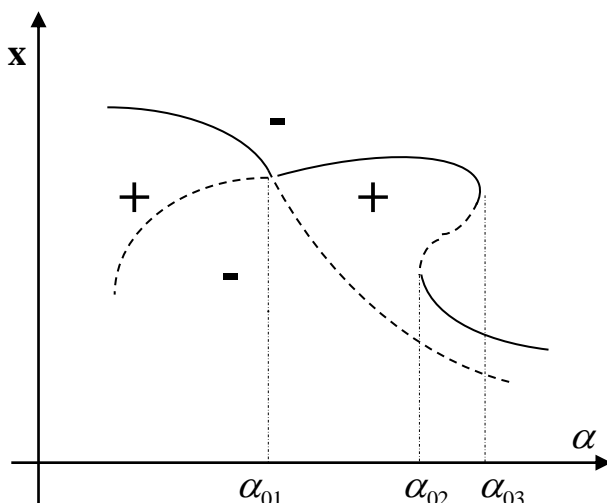


Рис. 7. Бифуркации «смена устойчивости» и «седло-узел»

Если в некоторой точке кривой при возрастании x и фиксированном α значение $f(x, \alpha)$ меняет знак с «плюса» на минус, то $\partial f / \partial x < 0$, и по теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению положение равновесия асимптотически устойчиво. Соответствующие части кривой равновесия показаны на рис. 7 сплошными линиями. Противоположный переход означает, что $\partial f / \partial x > 0$; эти неустойчивые точки лежат на пунктирных линиях.

При значении α_{01} мы имеем бифуркацию «смена устойчивости»: если $\alpha < \alpha_{01}$, то точки на одной ветви устойчивы, а на другой – неустойчивы; при $\alpha > \alpha_{01}$ характер устойчивости меняется на противоположный. В точках $\alpha = \alpha_{02}$ и $\alpha = \alpha_{03}$ имеет место бифуркация, называемая «складка» (английское “fold”) или «седло – узел». Если $\alpha > \alpha_{02}$, то в окрестности складки имеется два положения равновесия: устойчивое и неустойчивое. Напротив, для значений $\alpha < \alpha_{02}$ вблизи складки на кривой точек нет. Аналогичная картина – в точке $\alpha = \alpha_{03}$.

К более сложному типу бифуркаций относится «вилка» (“fork”, корень термина «бифуркация»), объединяющая пересечение двух ветвей кривой равновесий со складкой. Такой случай типичен в системах с симметрией, когда функция $f(x, \alpha)$ четна по x , кривая равновесий в окрестности «вилки» изображена на рис.8.

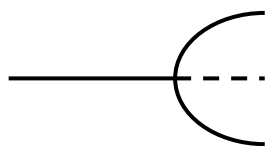


Рис.8. Бифуркация типа «вилка»

Формальные условия перечисленных основных бифуркаций выражаются следующим утверждением.

Теорема. Пусть точка $x = 0, \alpha = 0$ кривой (6.1) является особой, т.е. $\partial f / \partial x = 0$.

- 1) Если $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0$, то имеет место «складка»;
- 2) в случае $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha} \neq 0$ происходит смена устойчивости;
- 3) условия «вилки» имеют вид $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha} \neq 0$.

Доказательство. 1. В данном случае кривую равновесий можно представить в окрестности начала координат в виде

$$\alpha = Ax^2 + \dots, \quad A = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right)^{-1}$$

где многоточие обозначает члены порядка не ниже третьего.

2. Здесь кривая (6.1) выражается формулой

$$f = A\alpha x + Bx^2 + \dots, \quad A = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}, \quad B = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

что свидетельствует о наличии двух ее ветвей, пересекающихся в начале координат.

3. В случае вилки

$$f = A\alpha x + Bx^3 + \dots, \quad A = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \alpha}, \quad B = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$$

Т.е. (в отсутствие отброшенных членов) имеем пересечение оси абсцисс и параболы. Во всех случаях устойчивость определяется знаком $\partial f / \partial x$ в точке, лежащей на кривой.

В механических системах с одной степенью свободы при определении фазовых переменных формулой (1.2) в положении равновесия необходимо $x_2 = 0$, и кривая равновесий задается на плоскости (x_1, α) уравнением

$$f_2(x_1, 0, \alpha) = 0 \tag{7.1}$$

Для этой кривой строится диаграмма по аналогии с рис.7. Исследование устойчивости по первому приближению проводится путем анализа корней характеристического уравнения

$$\lambda^2 - \frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}} \lambda - \frac{\partial f_2}{\partial q} = 0$$

В консервативном случае $\frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}} = 0$ и $\lambda^2 = \frac{\partial f_2}{\partial q}$. Тогда для устойчивости необходимо и

достаточно выполнения условия $\frac{\partial f_2}{\partial q} < 0$ (теорема Лагранжа и ее обращение), что

согласуется с характеристикой устойчивости для общего случая (рис.7). В общем случае асимптотическая устойчивость (по первому приближению) равносильна системе неравенств $\frac{\partial f_2}{\partial \dot{q}} < 0, \frac{\partial f_2}{\partial q} < 0$.

Заметим, что кривую равновесия можно строить и для систем более высокой размерности, однако для выводов об устойчивости потребуются дополнительный анализ.

Пример. Рассмотрим конечноэлементную модель классической задачи Эйлера о равновесии нагруженной колонны (рис.9). Два невесомых стержня длины l связаны торсионной пружиной жесткости c . Свободный конец одного из стержней шарнирно закреплен на стенке, а к свободному концу другого стержня прилагается сила P . Определить положения равновесия и их устойчивость. При $x = 0$ пружина не напряжена, где x угол между стержнем и основанием.

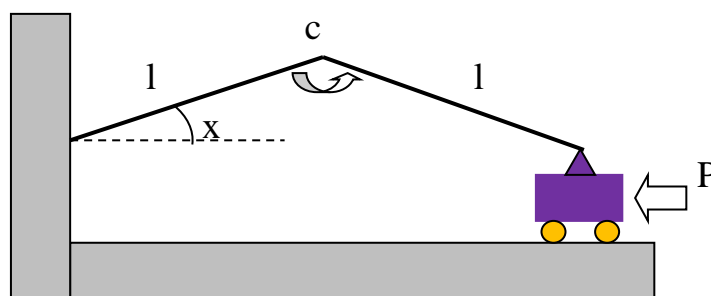


Рис.9. Модель балки Эйлера

Решение. Потенциальная энергия системы складывается из энергии деформации пружины $\Pi_1 = 2cx^2$ и работы внешней силы, затраченной на перемещение тележки, с противоположным знаком: $\Pi_2 = -2Pl(1 - \cos x)$. Кривая равновесий (7.1) задается формулой

$$2cx - Pl \sin x = 0 \tag{7.2}$$

Обозначим $\alpha = 2c / Pl$; кривая (7.2) распадается на две ветви

$$\alpha = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0 \quad (7.3)$$

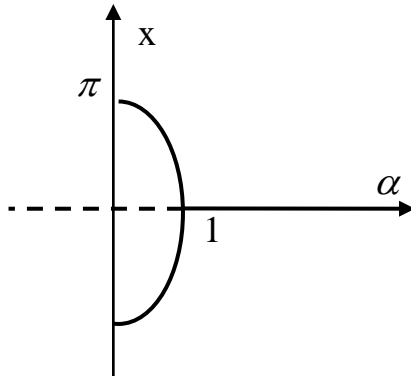


Рис. 10. Кривая равновесий для системы на рис.9

Таким образом, при малой нагрузке P имеется единственное положение равновесия $x = 0$, притом устойчивое. При значении $\alpha = 1$, что соответствует $P = c/2$, происходит бифуркация («вилка»): коллинеарное положение стержней становится неустойчивым, взамен появляется пара устойчивых изогнутых положения, соответствующих противоположным корням трансцендентного уравнения (7.3).

8. Бифуркация рождения цикла. Данный тип бифуркации не связан с равенством (6.2): здесь изолированное положение равновесия при изменении параметра α сохраняется, но теряет устойчивость. Одновременно в окрестности этой точки рождается периодическое решение, амплитуда которого растет вместе с α . Для реализации такого сценария требуется система (1.1) порядка не менее двух, что соответствует механической системе с одной степенью свободы. Потеря устойчивости обусловлена тем, что пара комплексно сопряженных собственных значений матрицы (4.1) переходит из левой полуплоскости комплексной плоскости в правую полуплоскость (рис.12, а). Эта особенность динамических систем была открыта и исследована в начале 20-го века и получила название бифуркации рождения цикла, или бифуркации Пуанкаре – Андронова – Хопфа. Сценарий показан на рис.11. Здесь асимптотически

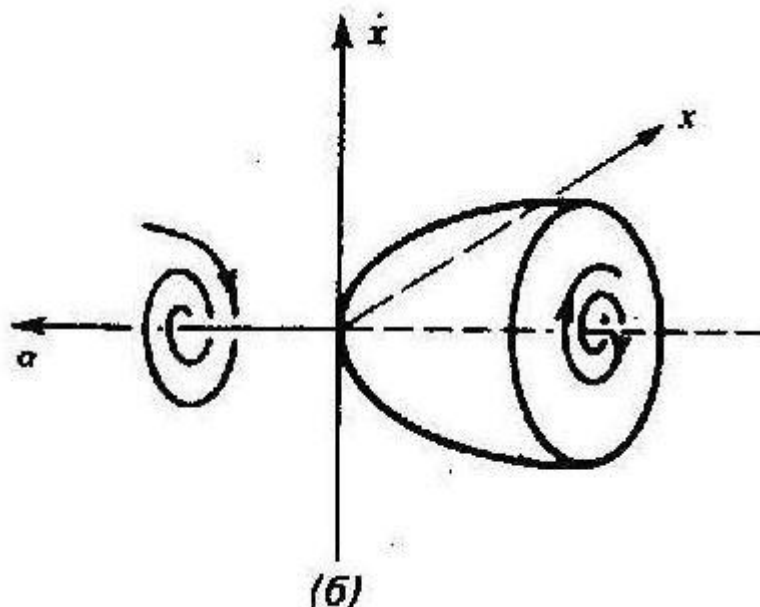


Рис. 11. Бифуркация рождения цикла (при убывании параметра)

устойчивое положение равновесия существует при значениях $\alpha < 0$, а при $\alpha > 0$ оно сохраняется, но теряет устойчивость. Одновременно рождается периодическое решение, амплитуду которого возрастает от нуля примерно пропорционально $\sqrt{\alpha}$.

Такую потерю устойчивости называют «мягкой» (так же, как в случае «вилки») в противоположность «жесткой» потере устойчивости при «складке». Тем не менее, даже «мягкая» бифуркация может привести к катастрофе. В 1940 году при ровном ветре скорости около 67 км/час мост Такома Нарроуз в Вашингтоне был разрушен после крутильных колебаний амплитуды до 45 градусов. Аналогичные явления многократно наблюдались впоследствии, в частности, «танцующий» мост в Волгограде (2010 г.). В авиации возникающие колебания называют «шимми» (в случае шасси самолета или колес автомобиля) или «флаттер» (крылья, хвостовое оперение). Что касается жесткой потери устойчивости в случае «складки», то ее называют в практических задачах «дивергенцией». Очевидно, оба этих типа неустойчивости следует избегать на этапе выбора конструктивных параметров. В частности, на «танцующий» мост недавно установили дополнительные демпферы (гасители колебаний).

На рис.12 показано поведение собственных значений матрицы (4.1) при «мягкой» (рождение цикла) и «жесткой» (складка) потере устойчивости. В первом случае при критическом значении параметра характеристическое уравнение имеет пару комплексно сопряженных корней, во втором – нулевой корень.

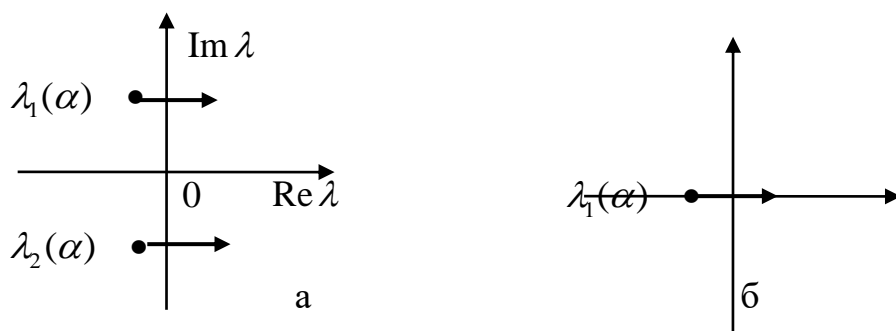


Рис.12. Поведение собственных значений при мягкой (а – рождение цикла) и жесткой (б - складка) потере устойчивости

Теорема (Пуанкаре-Андронов-Хопф). Пусть при $\alpha = 0$ матрица (4.1) имеет пару чисто мнимых собственных значений $\text{Re } \lambda_{1,2}(0) = 0$, $\text{Im } \lambda_1(0) > 0$, а другие собственные значения лежат в левой полуплоскости. Если при $\alpha = 0$ положение равновесия асимптотически устойчиво и выполнено неравенство

$$\frac{d(\text{Re } \lambda_{1,2}(\alpha))}{d\alpha} = \beta > 0 \quad (8.1)$$

то при $\alpha > 0$ оно становится неустойчивым. Одновременно в системе (1.1) в зависимости от нелинейных членов разложения правой части по степеням x рождается устойчивое периодическое решение.

Доказательство проведем для случая $n = 2$. Он является простейшим для данного типа бифуркации ввиду наличия не менее двух собственных значений у матрицы (4.1). Обозначим их

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = \eta(\alpha) \pm i\omega(\alpha), \quad \omega > 0 \quad (8.2)$$

Как известно из курса линейной алгебры, собственные векторы, отвечающие этим числам, комплексно сопряжены:

$$e_{1,2}(\alpha) = u_1(\alpha) \pm iu_2(\alpha)$$

Замена $x = Uy$, где столбцы матрицы U - это векторы u_1 и u_2 , приводит систему (4.1) к каноническому виду

$$\dot{y}_1 = \eta y_1 - \omega y_2, \quad \dot{y}_2 = \omega y_1 + \eta y_2 \quad (8.3)$$

Выполним эту замену в исходной нелинейной системе (1.1), а затем перейдем к полярным координатам по формулам

$$y_1 = \rho \cos \varphi, \quad y_2 = \rho \sin \varphi$$

В итоге получаем уравнения движения в полярных координатах в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= \dot{y}_1 \cos \varphi + \dot{y}_2 \sin \varphi = \eta(\alpha)\rho + \rho^2 R(\varphi, \rho, \alpha) \\ \rho \dot{\varphi} &= \dot{y}_2 \cos \varphi - \dot{y}_1 \sin \varphi = \omega(\alpha)\rho + \rho^2 \Phi(\varphi, \rho, \alpha) \end{aligned} \quad (8.4)$$

где $R(\varphi, \rho), \Phi(\varphi, \rho)$ - некоторые дифференцируемые 2π - периодические по φ функции. Исследуем систему (8.4) при малых ρ и α . Рассмотрим траекторию с начальными условиями $\rho(0) = \rho_0, \varphi(0) = 0$. Поскольку

$$\dot{\varphi} = \omega + O(\rho) > 0$$

то за время $t_1 \approx 2\pi/\omega$ траектория пройдет четыре четверти координатной плоскости и вернется на полярную ось, т.е.

$$\rho(t_1) = \rho_1, \varphi(t_1) = 2\pi$$

Зависимость $\rho_1 = g(\rho_0)$ называют *функцией последования*. Эта функция всегда монотонно возрастает ввиду невозможности пересечения траекторий на фазовой плоскости. Ключевым фактором, определяющим устойчивость положения равновесия в начале координат, а также существование и устойчивость периодических орбит, является знак величины

$$\Delta(\rho_0) = \rho_1 - \rho_0 \quad (8.5)$$

1) Если для малых значений ρ_0 имеем $\Delta(\rho_0) < 0$, то траектория стремится к началу координат, что свидетельствует об асимптотической устойчивости. В случае $\Delta(\rho_0) > 0$ траектории покидают окрестность начала, которое ввиду этого неустойчиво.

2) Равенство $\Delta(\rho^*) = 0$ свидетельствует о периодичности траектории. В случае, если $\Delta(\rho_0) < 0$ при $\rho_0 < \rho^*$ и $\Delta(\rho_0) > 0$ при $\rho_0 > \rho^*$, эта траектория притягивает все близлежащие точки. Такое свойство характеризует *устойчивый предельный цикл*.

В силу теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, начало координат рассматриваемой системы устойчиво при $\alpha < 0$ (при этом также $\eta < 0$) и неустойчиво при $\alpha > 0$. По условию, в граничном случае $\alpha = 0$ нелинейные члены обеспечивают асимптотическую устойчивость, т.е. неравенство $\Delta(\rho_0) < 0$ для всех

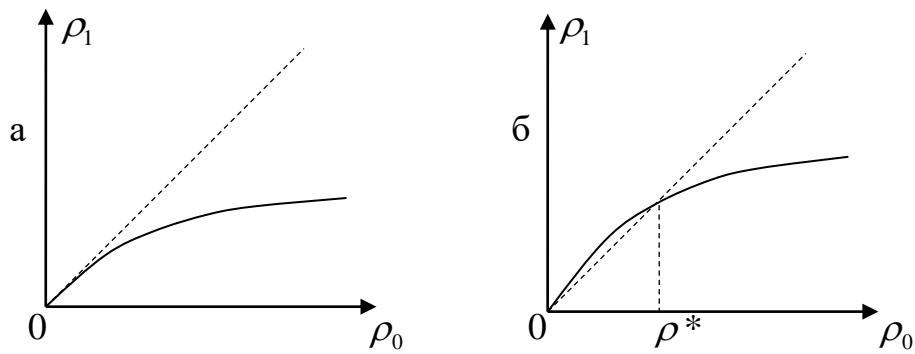


Рис.13. Бифуркация рождения цикла: а) $\alpha = 0$; б) $\alpha > 0$.

достаточно малых значений ρ_0 . Данная ситуация показана на рис.13, а: график функции последования касается биссектрисы, но проходит ниже нее. При увеличении параметра α график выходит из начала выше касательной (рис.13,б), что показывает потерю устойчивости. В то же время, согласно формулам (8.4) зависимость функции последования от α непрерывна. Поэтому ее график имеет вид, показанный на рис. 13,б. Точка пересечения графика с биссектрисой соответствует периодической траектории. Теорема доказана.

Литература

1. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения
2. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике
3. Йосс Ж., Джозеф Д. Элементарная теория устойчивости и бифуркаций
4. Арнольд В.И. Теория катастроф
5. Гуккенхаймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей