УДК 517.98, 519.2

В. Ж. Сакбаев

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Российский университет дружбы народов

Свойства полугрупп, порождаемых случайными блужданиями в бесконечном пространстве

Дано описание множества конечно-аддитивных мер на банаховых пространствах последовательностей l_p, инвариантных относительно сдвига на произвольный вектор пространства. Исследованы свойства гильбертова пространства комплекснозначных функций на пространстве l_p, квадратично интегрируемых по инвариантной мере. Получен критерий сильной непрерывности группы сдвигов на векторы, коллинеарные заданному ненулевому вектору банахова пространства. Изучаются свойства непрерывности полугрупп, порождаемых случайными блужданиями в гильбертовом пространстве, снабженном инвариантной относительно сдвигов мерой.

Ключевые слова: Конечно-аддитивная мера, инвариантная мера, сильно непрерывная полугруппа, случайные блуждания, диффузия.

V. Zh. Sakbaev

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
Peoples' Friendship University of Russia

On the properties of semigroups generated by random walks in infinitely dimensional space

We give the description of the set of finite additive measures on the Banach space of the sequences l_p which is invariant to the shift on an arbitrary vector of this space. The properties of the Hilbert space of complex-valued functions on the space l_p square integrable with respect to an invariant measure are investigated. We obtain a criterion of strong continuity of the semigroup of shifts on the vectors which are collinear to some nontrivial vector of the Banach space. The properties of continuous semigroups generated by random walks in the Hilbert space endowed with the invariant measures are investigated.

Key words: Finite additive measure, invariant measure, strongly continuous semigroup, random walks, diffusion.

Введение

В работах [2, 8] исследованы меры на банаховых пространствах вещественных числовых последовательностей l_p, $p \in [0, +\infty]$, инвариантные относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_p.

Как известно (см. [5]), не существует меры Лебега на бесконечномерном топологическом векторном пространстве, то есть не существует ненулевой счетно-аддитивной σ-конечной меры на σ-кольце борелевских подмножеств бесконечномерного топологического векторного пространства, инвариантной относительно сдвигов на векторы данного пространства. В связи с этим возникает задача исследования мер на бесконечномерном топологическом векторном пространстве, для которых нарушено одно или несколько из условий теоремы Вейля.

В работах А.М. Вершика (см. [4]) изучались вопросы о существовании мер на бесконечномерных топологических векторных пространствах, инвариантных относительно сдвига на векторы из некоторого максимального допустимого подпространства. В работе [4] определены векторное пространство и борелевская σ-конечная мера на нем, инвариантная относительно трансляций на любые элементы некоторого бесконечномерного подпространства второй категории в себе.

В работе [2] исследовано существование инвариантных мер, не являющихся σ-конечными; в работе [16] исследовано существование мер, не являющихся счетно-аддитивными.

В работе [2] исследуется счетно-аддитивная, но не σ-конечная мера на пространстве R^∞, получаемая с помощью продолжения по схеме Лебега–Каратеодори из функции множества, заданной на измеримых брусах пространства R^∞. Как будет показано ниже, эта схема, примененная к конечно-аддитивной функции множества на пространстве l_p, сталкивается с проблемой несовпадения с продолжаемой функцией множества в случае $p \in [1, +\infty)$. Случай $p = +\infty$ является исключением – в этом случае мера, определенная на классе измеримых брусов, является счетно-аддитивной и допускает счетно-аддитивное продолжение по схеме Кататеодори.

Другое направление исследования мер на бесконечномерном пространстве связано с изучением счетно-аддитивных мер, от которых не требуется условия инвариантности относительно сдвига (см. [6]).

В настоящей статье ставится задача изучить конечно-аддитивные меры λ на пространстве l_p, инвариантные относительно сдвигов на произвольный вектор пространства l_p, определить гильбертово пространство комплекснозначных функций на пространстве l_p, квадратично интегрируемых по инвариантной относительно сдвигов мере, и исследовать свойства группы сдвигов вдоль векторов пространства l_p, коллинеарных некоторому заданному вектору. Далее планируется изучение случайных блужданий в пространстве l_p с помощью рассмотрения соответствующих этим блужданиям случайных операторов сдвига аргумента в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(l_p, \lambda)$.

1. Инвариантные относительно сдвигов меры на банаховых пространствах

В предлагаемом в настоящей работе подходе исследуются неотрицательные конечно-аддитивные меры, заданные на некоторых кольцах подмножеств банаховых пространств l_p, $p \in [1, +\infty]$, содержащих все брусы с ребрами единичной длины и обладающих свойством инвариантности относительно сдвигов на произвольные векторы банахова пространства.

В работах изучаются такие меры, которые являются конечно-аддитивными продолжениями функций множества, заданных изначально на классе абсолютно измеримых брусов $K_0(l_p)$, состоящем из множеств вида

$$\Pi_{a,b} = \{\{x_k\} \in l_p : \ \forall\, j \in \mathbf{N}\ x_j \in \langle a_j, b_j \rangle,$$

где $-\infty < a_j \leq b_j < +\infty$ при всех $j \in \mathbf{N}$ и выполняется условие $\sum\limits_{j \in \mathbf{N}} \max\{0, \ln(b_j - a_j)\} < +\infty$.

Заметим, что имеет место следующий критерий непустоты брусов: множества $\Pi_{a,b} \subset l_p$ непусты тогда и только тогда, когда $c(a, b) \in l_p$, где числовая последовательность $c = \{c_k\}$ определяется из условия $c_j = \inf\limits_{x \in \langle a_j, b_j \rangle} |x|, \ j \in \mathbf{N}$.

Для задания на пространстве l_p меры, инвариантной относительно сдвигов на вектор из l_p, сначала определяется аддитивная функция множества λ_0 на классе абсолютно измеримых брусов $K_0(l_p)$. Из условия аддитивности и локальной конечности функции λ_0 следует, что $\lambda_0(\oslash) = 0$. Значение функции λ_0 на любом непустом измеримом брусе $\Pi_{a,b}$ определим равенством

$$\lambda_0(\Pi_{a,b}) = \exp(\sum_{j \in \mathbf{N}} \ln(b_j - a_j)), \tag{1}$$

доопределив на пустых абсолютно измеримых брусах функцию λ_0 равной нулю.

Лемма 1. *Соотношение* (1) *задает на классе* $K_0(l_p)$ *аддитивную функцию множества.*

Действительно, на любом брусе из множества K_0 значение функции λ_0 конечно. Если брус $\Pi \in K_0(l_p)$ представим как объединение двух непересекающихся брусов $\Pi', \Pi'' \in K_0(l_p)$, то брусы Π' и Π'' имеют общую грань коразмерности 1 и существует такое $j \in \mathbf{N}$, что $a_j - b_j = (a'_j - b'_j) + (a''_j - b''_j)$ и $a'_k - b'_k = a''_k - b''_k \ \forall\ k \neq j$. Следовательно, $\lambda_0(\Pi) = \lambda_0(\Pi') + \lambda_0(\Pi'')$. Если же брус $\Pi \in K_0(l_p)$ представим как объединение m непересекающихся брусов $\Pi_1, ..., \Pi_m \in K_0(l_p)$, то, как показано в работе [16], не более $\frac{m(m-1)}{2}$ пар брусов имеют общие грани. Следовательно, равенства $a_j - b_j = (a'_j - b'_j) + (a''_j - b''_j)$ и $a'_k - b'_k = a''_k - b''_k$ выполнены для всех $k \in \mathbf{N}$, кроме не более чем $\frac{m(m-1)}{2}$ значений номера k. Кроме того, если брус Π (не)пуст, то в силу критерия непустоты брусов каждый из брусов $\Pi_1, ..., \Pi_m$ также (не)пуст. Поэтому в силу аддитивности меры Лебега в пространстве $R^{\frac{m(m-1)}{2}}$ выполняется равенство $\lambda_0(\Pi) = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_0(\Pi_k)$. Лемма доказана.

В работе [8] указано на неединственность выбора таких l_p-инвариантных мер на пространстве l_p при всех $p \in [1, +\infty)$ и доказана единственность аддитивного продолжения аддитивной l_p-инвариантной меры, заданной на классе $K_0(l_p)$ измеримых брусов в пространстве l_p, на минимальное содержащее этот класс $K_0(l_p)$ кольцо $\mathcal{R}(l_p)$.

Заданная равенством (1) аддитивная функция множества на классе измеримых брусов $K_0(l_p)$ обладает повышенной инвариантностью относительно сдвигов. При сдвиге $\mathbf{S}_h$ на любой вектор h из пространства l_p образом (не)пустого бруса является (не)пустой брус, при этом $\lambda_0(\mathbf{S}_h(\Pi)) = \lambda_0(\Pi)$. Но, кроме того, имеет место также и частичная инвариантность функции λ_0 относительно сдвигов на векторы из пространства l_∞, не входящие в пространство l_p: а именно, если $h \in l_\infty$, $\Pi', \Pi'' \in K_0(l_p)$, выполняется условие $\Pi'' = \mathbf{S}_h(\Pi')$ и оба бруса $\Pi', \Pi'' \in K_0(l_p)$ являются (не)пустыми множествами одновременно, то $\lambda_0(\Pi'') = \lambda_0(\Pi')$.

Между множествами пространства l_p в работе [8] введено понятие l_p-эквивалентности: два множества из l_p называются l_p-эквивалентными, если одно является образом другого при сдвиге на вектор из пространства l_p. В пространстве l_p существуют различные непустые брусы $\Pi_{a',b'}, \Pi_{a'',b''} \in K_0(l_p)$ такие, что найдется элемент $h \in l_\infty \backslash l_p$, удовлетворяющий условию $a'' = a' + h,\ b'' = b' + h$. Такие брусы входят в непересекающиеся классы l_p-эквивалентности, но в силу свойства повышенной инвариантности функция λ_0 принимает одинаковые значения на таких брусах.

На классе l_p существуют и другие аддитивные функции множества, инвариантные относительно сдвигов на векторы из пространства l_p и принимающие одинаковые значения на любых двух брусах, входящих в один класс l_p-эквивалентности, значения которой различны на непустых брусах $\Pi_{a',b'}, \Pi_{a'',b''} \in K_0(l_p)$ таких, что найдется элемент $h \in l_\infty \backslash l_p$, удовлетворяющий условию $a'' = a' + h,\ b'' = b' + h$.

Лемма 2. *Аддитивная функция* λ_0 *на классе* $K_0(l_p)$ *допускает единственное продолжение* λ_1 *на минимальное полукольцо* $K_1(l_p)$ *пористых измеримых брусов, состоящее из множеств вида* $\Pi \backslash (\bigcup_{k=1}^m \Pi_k),\ Pi, \Pi_1, ..., \Pi_m \in K_0(l_p),\ m \in \{0, 1, 2, ...\}$. *При этом если функция* λ_0 *на классе* $K_0(l_p)$ *инвариантна относительно сдвига на вектор из* l_p, *то функция* λ_1 *на полукольце* $K_1(l_p)$ *также инвариантна относительно сдвига на вектор из* l_p.

Утверждение леммы 2 доказано в работе [10].

Лемма 3. *Аддитивная функция множества* λ_1, *заданная на полукольце* $K_1(l_p)$, *допускает единственное продолжение до меры* λ, *заданной на минимальном кольце* $\mathcal{R}(l_p)$, *содержащем полукольцо* $K_1(l_p)$. *При этом если функция* λ_1 *на кольце* $K_1(l_p)$ *инвариантна относительно сдвига на вектор из* l_p, *то мера* λ *на кольце* $\mathcal{R}(l_p)$ *также инвариантна относительно сдвига на вектор из* l_p.

Первое утверждение леммы 3 следует из теоремы [7], второе проверяется непосредственно. При этом минимальное кольцо $\mathcal{R}(l_p)$, содержащее полукольцо $K_1(l_p)$, совпадает с минимальным кольцом, содержащим класс множеств $K_0(l_p)$.

Замечание 1. Мера λ на пространстве l_p, заданная на кольце $\mathcal{R}(l_p)$, не является счетно-аддитивной при всех $p \in [1, +\infty)$. Это показывает приведенный в работе [8] пример: Пусть Π – брус, каждое ребро которого $\langle a_j, b_j \rangle$ представляет собой полуинтервал $[0, 1)$, а при каждом $n \in \mathbf{N}$ множество Π_n – брус, каждое ребро которого представляет собой полуинтервал $[0, 1 - \frac{1}{n})$. Тогда $\Pi = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Pi_j$, ибо для любой точки $x = \{x_k\} \in \Pi \subset l_p$ найдется такой номер $N = N(x)$, что $x \in \Pi_j$ при всех $j \geq N$. Тогда значение внешней меры $\bar{\lambda}$ на множестве Π не превосходит величины $\bar{\lambda}(\Pi) = \inf\limits_{\{\Pi_n\}:\ \bigcup_{n=1}^{\infty} \Pi_n \supset \Pi} [\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda(\Pi_n)] = 0$. Следовательно, если $p \in [1, +\infty)$, то внешняя мера, построенная по мере λ, отлична от меры λ на ее области определения, а сама мера λ не удовлетворяет условию счетной аддитивности.

Эти аргументы неприменимы к изучению свойств меры λ на пространстве l_∞, ибо в этом случае равенство $\Pi = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Pi_j$ несправедливо, поскольку существуют такие элементы $x \in \{x_k\} \in \Pi \subset l_\infty$, что $x \notin \Pi_n$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Само множество Π представляет собой счетное тензорное произведение пространств $[0, 1)$ со счетно-аддитивной мерой Лебега, поэтому оно является пространством со счетно-аддитивной мерой в силу теоремы Колмогорова [1]. И сужение этой меры на алгебру $\Pi \bigcap \mathcal{R}(l_\infty)$ совпадает с построенной выше мерой на кольце $\mathcal{R}(l_\infty)$, инвариантной относительно сдвига на вектор из l_∞. Тем самым, снимаются критические замечания к работе [2], изложенные автором в статьях [8, 10]. Автор благодарит О.Г. Смолянова и Н.Н. Шамарова за указание на отмеченное отличие инвариантной меры на пространстве l_∞ от инвариантной меры на пространстве l_p при $p \in [1, +\infty)$.

2. Гильбертово пространство функций, квадратично интегрируемых по конечно-аддитивной мере

Далее через E обозначим банахово пространство, изометрически изоморфное пространству последовательностей l_p. При этом через $\mathcal{E}$ обозначим такую счетную систему элементов $\{e_k,\ k \in \mathbf{N}\}$ пространства E, что отображение $\Phi :\ l_p \to E$, действующее по правилу $\Phi(\{x_k\}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k e_k$, является изометрическим изоморфизмом: $\|\Phi(\{x_k\})\|_E = \|\{x_k\}\|_{l_p}\|$.

Пусть λ – мера на пространстве l_p, заданная сначала на классе измеримых брусов $K_0(l_p)$ равенством (1) и продолженная аддитивно на минимальное кольцо $\mathcal{R}(l_p)$, содержащее класс $K_0(l_p)$. Тогда мера λ инвариантна относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_p и если два непустых бруса $\Pi_{a',b'}$ и $\Pi_{a'',b''}$ в l_p таковы, что найдется вектор $h \in l_\infty$, удовлетворяющий условию $a' - a'' = b' - b'' = h$, то $\lambda(\Pi_{a',b'}) = \lambda(\Pi_{a'',b''})$.

Через $\lambda_{\mathcal{E}}$ обозначим образ меры λ на пространстве l_p при изоморфизме Φ. Будем отождествлять измеримые брусы в пространстве l_p, класс измеримых брусов K_0, полукольцо пористых измеримых брусов K_3, кольцо $\mathcal{R}$ и кольцо Λ λ-измеримых множеств в пространстве l_p с образами соответствующих объектов в пространстве E при изоморфизме Φ.

Пусть λ_0 – неотрицательная конечно-аддитивная мера на пространстве E, инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор E, определенная на минимальном кольце $\mathcal{R}$ подмножеств множества E, содержащем класс измеримых брусов $\mathcal{K}$. Тем же символом λ обозначим продолжение (пополнение) меры λ на класс Λ λ-измеримых множеств – таких множеств $A \subset E$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся множества $B_1, B_2 \in \mathcal{R}$ такие, что $B_1 \subset A \subset B_2$ и $\lambda(B_2 \backslash B_1) < \varepsilon$.

Обозначим через $\mathcal{H}(E)$ гильбертово пространство, полученное из комплексной линейной оболочки $\{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j \chi_{B_j}\}$ λ-измеримых множеств $B_j \in \Lambda$ с помощью стандартной факторизации по ядру полунормы, определяемой равенством $p_2(\{\sum\limits_{j=1}^{m} c_j \chi_{B_j}\}) = \sum\limits_{j=1}^{m} |c_j|^2 \lambda(B_j)$ при условии

$B_i \bigcap B_j = \oslash \ \forall \ i,j \in \overline{1,m}, \ i \neq j$, и пополнения получившегося нормированного фактор-пространства.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}(E)$ является, как установлено в работе [16], несепарабельным.

3. Непрерывность однопараметрических групп операторов сдвига в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(E)$

Определим на пространстве $\mathcal{H}(E)$ операторы $\mathbf{S}_h$ сдвига на вектор $h \in E$, действующие по правилу $\mathbf{S}_h u(x) = u(x+h)$. По определению пространства $\mathcal{H}(E)$ оператор сдвига $\mathbf{S}_h$ при любом выборе вектора $h \in H$ определен на всем пространстве $\mathcal{H}(E)$ и является унитарным оператором в $\mathcal{H}(E)$.

Для каждого вектора $h \in E$ определим на пространстве $\mathcal{H}(E)$ однопараметрическое семейство операторов $\mathbf{S}_{th}$, $t \in R$, сдвига на вектор $th \in E$, действующие по правилу

$$S_{th}u(x) = u(x+th). \tag{2}$$

Такое семейство операторов является однопараметрической группой унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}(E)$.

Лемма 4. *Однопараметрические группы унитарных операторов* $\mathbf{S}_{te_j}$, $t \in R$, *являются сильно непрерывными в подпространстве* $\mathcal{H}(E)$ *при любом* $j \in \mathbf{N}$. *Причем* $u \in \mathcal{H}(E)$, *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что при любых* $t \in (-\delta, \delta)$ *и любых* $j \in \mathbf{N}$ *выполняется неравенство*

$$\|\mathbf{S}_{te_j}u - u\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} < \varepsilon. \tag{3}$$

Если функция u_Π является индикатором измеримого бруса Π относительно базиса $\mathcal{E}$, а вектор $h = e_j$, то операторы $\mathbf{S}_{th}$, $t \in R$, действуют как операторы сдвига вдоль j-го ребра бруса. Если мера бруса Π равна нулю, то $\|\mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}(E)} = 0$ при всех $t > 0$, а если $\lambda(\Pi) > 0$, то длина j-го ребра бруса $b_j - a_j > 0$ положительна, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любых $t \in (-\delta, \delta)$ выполняется неравенство $\|\mathbf{S}_{te_j}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}(E)} < \varepsilon$, поскольку $\|\mathbf{S}_{te_j}u_\Pi - u_\Pi\|^p_{\mathcal{H}(E)} \leq \frac{2t}{b_j - a_j}\|u_\Pi\|^p_{\mathcal{H}(E)}$.

Более того, из условия $0 < \lambda(\Pi) < +\infty$ следует стремление к нулю величины $\ln(b_j - a_j)$ при $j \to \infty$, следовательно, существует $\sigma > 0$ такое, что $b_j - a_j > \sigma$ при всех $j \in \mathbf{N}$. Следовательно, для любых $j \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{S}_{te_j}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} < \left(\frac{2t}{\sigma}\right)^{1/p}\|u_\Pi\|_{\mathcal{H}(E)}. \tag{4}$$

Поскольку любой элемент $u \in \mathcal{H}(E)$ может быть с любой точностью приближен в $\mathcal{H}(E)$-норме линейной комбинацией индикаторов измеримых брусов, то в неравенстве (4) можно заменить функцию u_Π на произвольную функцию $u \in \mathcal{H}(E)$. Следовательно, справедливо утверждение (3).

Следствие 1. Если банахово пространство E изометрически изоморфно пространству l_1, то для любого вектора $h \in E$ однопараметрическая группа операторов $\mathbf{S}_{th}$, $t \in R$, является сильно непрерывной, причем для любого измеримого относительно базиса $\mathcal{E}$ бруса Π существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\|\mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} < \mathrm{C}_\Pi t\|h\|_E|u_\Pi\|_{\mathcal{H}(E)}. \tag{5}$$

Замечание 2. Если $p \in (1, +\infty]$, то для произвольного $h \in E$, $\|h\|_E = 1$, унитарная группа $\mathbf{S}_{th}$, $t \in R$, может не являться сильно непрерывной в $\mathcal{H}(E)$.

Действительно, пусть вектор $h \in H$ имеет в базисе $\mathcal{E}$ координаты $h_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbf{N}$. Поскольку $p \in (1, +\infty]$, то $h \in E$ и $\|h\|_E = (\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{-p})^{\frac{1}{p}}$. Пусть $\Pi \in K(E)$

– непустой брус, все ребра которого имеют длину 1 и сонаправлены с одним из векторов базиса $\mathcal{E}$, а u_Π – индикаторная функция бруса П. Тогда $\|\mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi\|^p_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = 2\lambda(\mathbf{S}_{th}\Pi\setminus\Pi) = 2(1-\lambda_\mathcal{E}(\mathbf{S}_{th}\Pi\bigcap\Pi)) = 2(1-e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1-\frac{t}{k})})$. Поскольку сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ln(1-\frac{t}{k})$ равна $-\infty$ при любом $t>0$, то $\|\mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \geq 1$ при всех $t>0$. Таким образом, $\lim\limits_{t\to+0}\mathbf{S}_{th}u_\Pi \neq u_\Pi$ и группа унитарных преобразований $\mathbf{S}_{th}$, $t\in R$, пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ не является непрерывной в сильной операторной топологии на банаховом пространстве ограниченных линейных операторов $B(\mathcal{H}(E))$.

Следствие 2. Если пространство E изометрически изоморфно пространству l_1, то для любого $h\in E$ унитарная группа $\mathbf{S}_{th}$, $t\in R$, является сильно непрерывной в $\mathcal{H}$.

Утверждение следствия 2 следует из полученной выше оценки (3).

Действительно, в силу неравенств (3) для любого измеримого бруса $\Pi\in K_1(E)$ существует постоянная $C>0$ такая, что

$$\|\mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < C(t\|\{h_k\}\|_{l_1})\|u\|_{\mathcal{H}(E)}. \tag{6}$$

Итак, при любом выборе единичного вектора $l\in E$ однопараметрическая группа унитарных операторов $\mathbf{S}_{tl}$, $t\in R$, является сильно непрерывной на индикаторах измеримых брусов, а поскольку любой элемент $u\in\mathcal{H}(E)$ может быть с любой точностью приближен в $\mathcal{H}(E)$-норме линейной комбинацией индикаторов измеримых брусов, то, следовательно, группа унитарных операторов $\mathbf{S}_{tl}$, $t\in R$, является непрерывной в сильной операторной топологии пространства $B(\mathcal{H}(E))$.

Итак, установлено, что если банахово пространство E изометрически изоморфно пространству l_p при $p\in(1,+\infty]$, то однопараметрическая группа $\mathbf{S}_{th}$, $t\in R$, унитарных операторов сдвига вдоль вектора $h\in E$ является сильно непрерывной не при всяком выборе вектора h. Ниже приведен критерий сильной непрерывности полугруппы $\mathbf{S}_{th}$, $t\in R$, в терминах свойств вектора h.

Теорема 1. *Пусть банахово пространство E изометрически изоморфно пространству l_p при $p\in(1,+\infty]$ и пусть $h\in E$.*

Однопараметрическая группа унитарных операторов $\mathbf{S}_{th}$, $t\in R$, является сильно непрерывной тогда и только тогда, когда образ $\{h_k\}$ вектора h при изоморфизме $\Phi:\ E\to l_p$ принадлежат пространству l_1.

Действительно, если $\Phi(h)\in l_1$, то есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|h_k|<\infty$, то для любого бруса П с конечной мерой в силу соотношений (3) существует постоянная $C_\Pi\in[0,+\infty)$ такая, что выполняется оценка

$$\|\mathbf{S}_{th}u_\Pi - u_\Pi\|^2 \leq C_\Pi|t|\sum_{k=1}^{\infty}|h_k|.$$

Следовательно, подобная оценка имеет место и для любой линейной комбинации индикаторов измеримых брусов и, следовательно, для произвольной функции $u\in L_2(E,\Lambda,\lambda,\mathbf{C})$.

Пусть теперь $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|h_k| = +\infty$, где $\{h_k\}=\Phi(h)$. Тогда так же, как и в замечании 2, устанавливается справедливость неравенства $\|\mathbf{S}_{th}u_{\Pi_{0,1}} - u_{\Pi_{0,1}}\|_{L_2(E,\Lambda,\lambda,\mathbf{C})} \geq 1\ \forall\ t>0$, где $\Pi_{0,1}$ – брус, все ребра которого являются промежутками $[0,1)$, а $u_{\Pi_{0,1}}$ – индикаторная функция такого бруса.

У каждой сильно непрерывной группы унитарных операторов в пространстве $\mathcal{H}(E)$ должен быть самосопряженный в пространстве $\mathcal{H}(E)$ генератор. Если $h=e_j$, то генератором группы $\mathbf{S}_{th}$, $t\in R$, унитарных операторов является оператор $i\partial_j$.

4. Случайные сдвиги и операторы диффузии в пространстве $\mathcal{H}(E)$

В предыдущем разделе установлено, что сдвиги на векторы, коллинеарные ненулевому вектору h банахова пространства E, образуют группу унитарных операторов в пространстве $\mathcal{H}(E)$, которая является сильно непрерывной тогда и только тогда, когда вектор h «не слишком сильно» отклонен от базисных векторов пространства E, такого базиса $\mathcal{E}$, который задает изометрический изоморфизм пространства E на пространство l_p. В настоящем разделе мы исследуем случайные полугруппы сдвигов вдоль случайных векторов пространства E и определим условия на распределение случайных сдвигов, при которых математическое ожидание случайной полугруппы является сильно непрерывной полугруппой. Для достижения этой цели сделаем техническое предположение, что банахово пространство E является гильбертовым пространством H.

Пусть H – вещественное сепарабельное гильбертово пространство и $\mathbf{D}$ – ядерный положительный самосопряженный оператор с ортонормированным базисом из собственных векторов $\mathcal{E}$. Пусть Φ – изометрический изоморфизм пространства H на пространство l_2, сопоставляющий каждому вектору $x \in H$ набор его координат $\{x_k\} \in l_2$ в базисе $\mathcal{E}$. Пусть $\lambda_{\mathcal{E}}$ – неотрицательная локально конечная конечно-аддитивная мера на кольце $\mathcal{K}_{\mathcal{E}}$ подмножеств пространства H, инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор $h \in H$, определенная формулой (1) на классе измеримых брусов в разделе 1.

Пусть $\mathcal{H}_{\mathcal{E}} = L_2(H, \mathcal{K}_{\mathcal{E}}, \lambda_{\mathcal{E}})$ и для каждого вектора $h \in H$ определено преобразование сдвига $\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}$ пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, действующее на произвольный элемент $u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ по формуле

$$\mathbf{S}_{\mathcal{E},h} u(x) = u(x+h). \tag{7}$$

Пусть ν_t, $t \geq 0$, – однопараметрическое семейство гауссовских мер на гильбертовом пространстве H таких, что при каждом $t \geq 0$ мера ν_t имеет преобразование Фурье $\tilde{\nu}_t(\xi) = e^{-\frac{t}{2}\mathbf{D}\xi^2}$, то есть ν_t – гауссовская мера на пространстве H с нулевым математическим ожиданием и ковариационным оператором $t\mathbf{D}$ (ядерность ковариационного оператора меры эквивалентна существованию у меры конечного второго момента, теорема 2.1, [3]). Однопараметрическое семейство гауссовских мер ν_t, $t \geq 0$, на пространстве H образует полугруппу относительно операции сверточного умножения: $\nu_t * \nu_s = \nu_{t+s} \ \ \forall \ \ t, s \in R_+$.

По введенному однопараметрическому семейству гауссовских мер ν_t, $t \geq 0$, определим однопараметрическое семейство $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \geq 0$, преобразований пространства $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ как результат усреднения случайного преобразования сдвига $\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}$, распределение случайного параметра $h \in H$ которого в каждый момент времени $t \geq 0$ задается мерой ν_t на пространстве H. Тогда в каждый момент времени $t \geq 0$ образ $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u$ элемента $u \in H$ определяется равенством

$$\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t) u(x) = \int\limits_H u(x+h) d\nu_t(h) = \int\limits_H \mathbf{S}_{\mathcal{E},h} u(x) d\nu_t(h). \tag{8}$$

Равенство (8) определяется как интеграл Петтиса в следующем смысле:

$$(\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u, v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} = \int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h} u, v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} d\nu_t(h) \ \ \forall \ v \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}. \tag{9}$$

Рассмотрим сначала действие оператора $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$ на индикаторную функцию u измеримого бруса Π и рассмотрим скалярное произведение (9) в предположении, что элемент v является индикаторной функцией u измеримого бруса Π'. При каждом $h \in H$ элемент $\mathbf{S}_{\mathcal{E},h} u \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$, а числовая функция $\varphi(h) = (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h} u, v)_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}$, $h \in H$, ограничена условием $|\varphi(h)| \leq \|u\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}} \|v\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{E}}}$ и ν_t-измерима. Действительно, поскольку $\mathbf{U}_{\mathcal{E},h} u$ и v – индикаторные функции брусов из класса $\mathcal{P}^a(\mathcal{E})$, то функция φ является произведением счетного множества цилиндрических функций вида $\varphi_j(h)$, зависящих только от величины $h_j = (h, e_j)$, $j \in \mathbf{N}$. Цилиндрические множества являются ν_t-измеримыми, поэтому ν_t-измерима и функция φ (см. [1], теорема 2.1.5). Следовательно, если u, v – индикаторные функции измеримых брусов, то ограниченная измеримая функция $\varphi(h)$, $h \in H$, интегрируема по мере ν_t с вариацией, равной единице.

Любой элемент $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ может быть аппроксимирован линейной комбинацией индикаторов измеримых брусов. Поэтому правая часть выражения (9) определена при всех $u, v \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$

и в силу неравенства $\int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} d\nu_t(h) \leq \|v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \|\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \|\nu_t\|_{var} = \|u\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \|v\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}$ является полуторалинейной непрерывной формой. Следовательно, при любом $t \geq 0$ определен оператор $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t) \in B(\mathcal{H}_\mathcal{E})$, норма которого не превосходит единицы.

Теорема 2. *Однопараметрическое семейство операторов* $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \geq 0$, *является полугруппой:* $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s) = \mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t+s) \ \ \forall \ \ t,s \in R_+$.

Действительно, рассмотрим выражение (9) при $t = s + r$. Однопараметрическое семейство мер $\nu_t, t \geq 0$, определеено на σ-алгебре $\mathcal{A}_\nu$ подмножеств пространства H, содержащей цилиндрические множества с конечномерными борелевскими основаниями. Поскольку мера $\nu_t * \nu_s$ является образом меры $\nu_t \otimes \nu_s$ на $H \times H$ при отображении $\varphi: \ H \times H \to H$, действующем по правилу $\varphi(x,y) = x + y$, то для всякой функции $f: \ H \to \mathbf{C}$, измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{A}_\nu$ подмножеств на H, справедливо равенство $\int\limits_H f(x) d\nu_t * \nu_s(x) = \int\limits_{H\times H} f(x+y) d(\nu_t \otimes \nu_s)(x,y)$. Следовательно, $(\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s+r)u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = \int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} d\nu_{s+r}(h)$. Фиксировав векторы $u,v \in \mathcal{H}$, определим функцию $f_{u,v}(h) = (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}$, $h \in H$.

Функция $f_{u,v}$ ограничена на H неравенством $|f_{u,v}(h)| \leq \|u\|_\mathcal{H}\|v\|_\mathcal{H}$. Если u,v – индикаторные функции измеримых брусов, то, как было показано выше, функция $f_{u,v}$ является измеримой относительно мер ν_t при произвольном $t \geq 0$. Тогда $(\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s+r)u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = \int\limits_H f_{u,v}(h) d\nu_{s+r}(h)$. В силу полугруппового свойства семейства мер $\nu_t, t \geq 0$, справедливо равенство $\nu_{s+r}(B) = \nu_s * \nu_r$, поэтому $\int\limits_H f_{u,v}(h) d\nu_{s+r}(h) = \int\limits_{H\times H} f_{u,v}(x+y) d(\nu_s \otimes \nu_r)(x,y)$. Поскольку функция $f_{u,v}$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}_\nu$ и ограничена, то функция $f_{u,v}(x+y)$, $(x,y) \in H \times H$ на $H \times H$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}_\nu \otimes \mathcal{A}_\nu$ и ограничена. Поэтому в силу теоремы Фубини

$$\int\limits_{H\times H} f_{u,v}(x+y) d(\nu_s \otimes \nu_r)(x,y) = \int\limits_H [\int\limits_H f_{u,v}(x+y) d\nu_s(x)] d\nu_r(y) = \int\limits_H [\int\limits_H f_{u,v}(x+y) d\nu_r(y)] d\nu_s(x).$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s)\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(r)u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = \int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(r)u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} d\nu_s(h) = \int\limits_H [\int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},\sigma}(\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}u),v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} d\nu_r(\sigma)] d\nu_s(h) =$$
$$= \int\limits_H [\int\limits_H (\mathbf{S}_{\mathcal{E},h+\sigma}u,v)_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} d\nu_r(\sigma)] d\nu_s(h) = \int\limits_H [\int\limits_H f_{u,v}(h+\sigma) d\nu_r(\sigma)] d\nu_s(h).$$

Поэтому $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s)\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(r) = \mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(s+r)$ для всех $r,s \geq 0$, и теорема 2 доказана.

Как следует из результатов раздела 3, однопараметрическая полугруппа $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ может не быть непрерывной в сильной операторной топологии пространства $B(\mathcal{H})$. Приведем достаточные условия сильной непрерывности этой полугруппы, явившейся результатом усреднения случайных блужданий $\mathbf{S}_{\mathcal{E},h}$ по мере ν_t.

С помощью растяжения переменной интегрирования устанавливается следующее утверждение.

Лемма 5. *Для любого* $t > 0$ *и любого измеримого бруса* Π *однопараметрическое семейство гауссовых мер* $\nu_t, t > 0$ *удовлетворяет равенству* $\int\limits_H u_\Pi(x+h) d\nu_t(h) = \int\limits_H u_\Pi(x+\sqrt{t}h) d\nu_1(h)$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{D}$ *– ядерный оператор в пространстве* H *с ортонормированным базисом собственных векторов* $\mathcal{E}$, *который невырожден и таков, что* $\mathbf{D}^{1/4}$ *является ядерным. Пусть* $\nu_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$, *– полугруппа (относительно сверточного умножения) гауссовских мер на гильбертовом пространстве* H *с ковариационным оператором* $t\mathbf{D}$. *Тогда однопараметрическое семейство преобразований пространства* $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, *определяемое равенством* (9), *является сильно непрерывной полугруппой сжимающих самосопряженных преобразований пространства* $\mathcal{H}_\mathcal{E}$.

Тот факт, что однопараметрическое семейство $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ преобразований пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ является полугруппой преобразований пространства $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, доказан в теореме 2.

Для доказательства сильной непрерывности полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ достаточно показать, что для любого измеримого бруса П выполняется условие $\lim\limits_{t\to+0}\|\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = 0$. Но $\|\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} = \|\int\limits_H(\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}u_\Pi - u_\Pi)d\nu_{t\mathbf{D}}(h)\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \le \int\limits_H \|\mathbf{U}_{\mathcal{E},h}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}d\nu_{t\mathbf{D}}(h) =$
$= \int\limits_H \|\mathbf{U}_{\mathcal{E},\sqrt{t}h}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}d\nu_{\mathbf{D}}(h)$ согласно лемме 5.

Фиксируем некоторое число $\sigma > 0$. Для гауссовой меры $\nu_\mathbf{D}$ существует число R_1 такое, что

$$\nu_\mathbf{D}(B_{R_1}) \ge 1 - \frac{\sigma}{2}, \tag{10}$$

где

$$B_{R_1} = \{h \in H: \ |(e_j,h)| < R_1(d_j)^{\frac{1}{4}} \ \forall\, j \in \mathbf{N}\}.$$

Согласно установленной в лемме 4 оценке (3) и следствию 1, для произвольного измеримого бруса $\Pi \in K_1(\mathcal{E})$ существует константа $C > 0$ такая, что для любого вектора $h \in H$ такого, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|(e_j,h)| < \infty$, выполняется неравенство

$$\|\mathbf{S}_{\mathcal{E},th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < \mathrm{C}\left(t\sum_{j=1}^{\infty}|(e_j,h)|\right)^{\frac{1}{2}}\|u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}.$$

Для любого вектора $h \in B_{R_1}$ справедливо неравенство $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|(e_j,h)| \le R_1\mathrm{Tr}(\mathbf{D}^{\frac{1}{4}})$. Следовательно, для любого $\Pi \in K_1(\mathcal{E})$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любых $t \in (-\delta,\delta)$ и любых $h \in H$ таких, что $h \in B_{R_1}$, выполняется неравенство

$$\|\mathbf{S}_{\mathcal{E},th}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} < \frac{\sigma}{2}. \tag{11}$$

Следовательно, в силу (10) и (11) справедлива оценка $\|\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}} \le \int\limits_{B_{R_1}}\|\mathbf{S}_{\mathcal{E},\sqrt{t}h}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}d\nu_\mathbf{D}(h) + \int\limits_{H\setminus B_{R_1}}\|\mathbf{S}_{\mathcal{E},\sqrt{t}h}u_\Pi - u_\Pi\|_{\mathcal{H}_\mathcal{E}}d\nu_\mathbf{D}(h) \le C\sigma$.

Поскольку любой элемент $u \in \mathcal{H}_\mathcal{E}$ может быть с любой точностью приближен в $\mathcal{H}_\mathcal{E}$-норме линейной комбинацией индикаторов измеримых брусов, то, следовательно, однопараметрическая полугруппа сжимающих операторов $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \in [0,+\infty)$, является непрерывной в сильной операторной топологии пространства $B(\mathcal{H}_\mathcal{E})$. Поскольку операторы сопряженной полугруппы действуют по правилу (см. (9)) $\mathcal{U}^*_{\nu,\mathcal{E}}(t)u = \int\limits_H \mathbf{U}_{\mathcal{E},-h}ud\nu_t(h)$, то в силу инвариантности гауссовских мер ν_t относительно центральной симметрии в пространстве H операторы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \ge 0$, являются сжимающими симметрическими операторами в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ и, следовательно, самосопряженными.

Теорема 3 доказана.

Следствие. Сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}$ сжимающих операторов в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ обладает диссипативным самосопряженным генератором $\Delta_{\nu,\mathcal{E}}$.

Самосопряженность генератора $\Delta_{\nu,\mathcal{E}}$ полугруппы $\mathcal{U}_{\nu,\mathcal{E}}(t)$, $t \ge 0$, в пространстве $\mathcal{H}_\mathcal{E}$ следует из самосопряженности операторов сжимающей сильно непрерывной полугруппы.

Замечание 3. Если $\mathbf{D}$ – оператор конечного ранга $m \in \mathbf{N}$, то $\mathbf{U}_\mathbf{D}$ унитарно эквивалентна полугруппе, разрешающей уравнение диффузии в конечномерном пространстве размерности m.

Литература

1. *Богачев В.И.* Основы теории меры. Т. 1. М.–Ижевск: РХД, 2003.
2. *Baker R.* «Lebesgue measure» on R^∞ // Proceedings of the AMS. 1991. V. 113, N 4. P. 1023–1029.

3. *Го Х.С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.

4. *Вершик А.М.* Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве? // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 259. С. 256–281.

5. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применение. М.: Изд. иностр. лит., 1950.

6. *Богачев В.И.* Гауссовские меры. М.: Физматлит, 1997.

7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.

8. *Сакбаев В.Ж.* Меры на бесконечномерных пространствах, инвариантные относительно сдвигов // Труды МФТИ. 2016. Т. 8, № 2. С. 134–141.

9. *Сакбаев В.Ж.* Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига // ТМФ. 2017. Т. 191, № 3. (принята в печать).

10. *Сакбаев В.Ж.* Конечно-аддитивные меры на банаховых пространствах, инвариантные относительно сдвигов // Квантовая динамика и функциональные интегралы. Материалы научной конференции ИПМ им М.В. Келдыша РАН. Россия. Москва, 14 марта 2016 г. М.: ИПМ им. Келдыша, 2016.

References

1. *Bogachev V.I.* Foundation of measure theory. V. 1. Moscow–Izhevsk: RCD, 2003.

2. *Baker R.* «Lebesgue measure» on R^∞. Proceedings of the AMS. 1991. V. 113, N 4. P. 1023–1029.

3. *Kuo H.H.* Gaussian Measures in Banach spaces. Moscow: Mir, 1979.

4. *Vershik A.M.* Does the Lebesgue measure exist in the infinite-dimensional space? Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2007. V. 259. P. 256–281.

5. *Weil A.* Integration in topological groups and its application. Moscow: IIL, 1950.

6. *Bogachev V.I.* Gaussian measures. Moscow: Fizmatlit, 1997.

7. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza. Moscow: Fizmatlit, 2004.

8. *Sakbaev V.Zh.* Measures on the infinite dimensional spaces invariant with respect to shifts. Proceedings of MIPT. 2016. T. 8, N 2. P. 134–141.

9. *Sakbaev V.Zh.* Averaging of random walks and measures on Hilbert space invariant with respect to shifts. Theoretical and mathematical physics. 2017. V. 191, N 3. (accepted for publication).

10. *Sakbaev V.Zh.* Finite additive measures on Banach spaces invariant with respect to shifts. Quantum dynamics and functional integrals. Keldysh Institute of Applied Mathematics. Moscow, 2016.

Поступила в редакцию 25.01.2017