Олимпиада по теоретической физике в МФТИ

Воскресенье 21 мая 2017 г., 11:00–15:00, аудитория 239 «Нового корпуса» МФТИ

РЕШЕНИЯ

1 Путешествие во времени (М.Г. Иванов)

Всем хорошо известна формула Циолковского, для скорости ракеты V в ньютоновской механике

$$V = u\,\ln\frac{M_0}{M}.$$

Здесь u скорость (относительно ракеты) истечения реактивной струи, M_0 — начальная масса ракеты, M — текущая масса ракеты. Ракета разгоняется без действия внешних сил вдоль прямой.

В специальной теории относительности (СТО) эта формула модифицируется, так, что достижение скорости скорости света c для ракеты оказывается невозможным. Это связано с тем, что геометрия пространства-времени в СТО является геометрией Минковского, которая различает времениподобные и пространственноподобные направления, причём касательная к мировой линии ракеты может быть только времениподобной.

Представим себе теорию пространства-времени, аналогичную СТО (еСТО), в которой геометрия пространства-времени — 4-мерная евклидова геометрия с метрикой

$$ds^2 = dw^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad w = ct.$$

В такой теории все направления в пространстве-времени равноправны и ракета может лететь назад по времени.

Найдите отношение $\frac{M_0}{M}$ для того, чтобы ракета со скоростью истечения u могла развернуться назад по времени в рамках еСТО. Чему равно это отношение для фотонной ракеты ($u = c$).

До каких скоростей могла бы разогнаться такая ракета в рамках Ньютоновской механики и в рамках СТО?

Решение

В инерциальной системе отсчёта, сопутствующей ракете приращение скорости ракеты, после малого изменение массы ракеты может быть вычислено в рамках ньютоновской механики

$$dV\,M + dM\,u = 0.$$

Здесь $dM < 0$, $(-dM)$ в ньютоновской механике — масса малого элемента реактивной струи, а в СТО и еСТО — энергия (делённая на c^2) элемента струи.

$$dV = -u\,d\ln M.$$

В ньютоновской механике можно это уравнение проинтегрировать и получить формулу Циолковского, в СТО и еСТО суммировать (интегрировать) приращение скорости dV нельзя.

В СТО, однако, можно суммировать быстроту θ

$$V = c\,\mathrm{th}\,\theta.$$

При малых V и θ их приращения пропорциональны $dV = c\,d\theta$ и получаем релятивистскую формулу Циолковского

$$\theta = \frac{u}{c}\,\ln\frac{M_0}{M}.$$

В еСТО в роли быстроты выступает обычный евклидов угол φ между осью w (евклидовым временем) и скоростью

$$V = c\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

$$\varphi = \frac{u}{c}\,\ln\frac{M_0}{M}.$$

Развороту назад по времени соответствует $\varphi = \pi = \frac{u}{c}\,\ln\frac{M_0}{M}$. Отсюда

$$\frac{M_0}{M} = \exp\left(\frac{\pi c}{u}\right).$$

Для фотонной ракеты

$$\frac{M_0}{M} = \mathrm{e}^{\pi} \approx 23{,}14$$

Соответствующая скорость ньютоновской ракеты не зависит от скорости истечения ($c \approx 2{,}998 \times 10^8$)

$$V_{\text{Н}} = c\pi \approx 9{,}4 \times 10^8 \ .$$

Соответствующая скорость ракеты в СТО

$$V_{\text{СТО}} = c\ \mathrm{th}\,\pi \approx 0{,}9963\ \approx 2{,}987 \times 10^8 \ .$$

2 Одномерный кулон (В.П. Крайнов)

Для одномерного кулоновского потенциала $V(x) = -^2/|x|$, $-\infty < x < +\infty$ найти энергию и приближенную волновую функцию основного (четного) состояния.

Решение

Стационарное уравнение Шредингера имеет вид ((всюду используется атомная система единиц $m = e = \hbar = 1$)

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{\psi(x)}{x} = k^2\psi(x), \qquad k^2 = -2E_0, \qquad x > 0. \tag{1}$$

Задачу достаточно рассмотреть только для $x > 0$, так как ввиду четности функции имеем $\psi(-x) = \psi(x)$.

При $x \ll 1$ можно пренебречь правой частью уравнения и тогда приближенное решение имеет вид

$$\psi(x) = 1 - 2x\,\ln x + \ldots. \tag{2}$$

А при $x \gg 1$ в уравнении можно пренебречь членом с кулоновским потенциалом. Тогда получим экспоненциально затухающее решение

$$\psi(x) = \exp(-kx). \tag{3}$$

Построение решения путем разложения в два степенных ряда: при логарифме и без логарифма — основано на том, что сначала приравниваются нулю сумма членов в при $\ln x$, затем при x^0, затем при $x\,\ln x$, затем при x^1 и т.д. по мере возрастания степени и с учетом логарифма.

Начинаем строить ряд по степеням сначала x при (самом большом) логарифмическом члене $\ln x$:

$$\psi(x) = \big(1 + \big(-2x + ax^2\big)\ln x\big)\ \exp(-kx) \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) и приравнивая нулю сумму членов при $\ln x$, получим выражение для коэффициента :

$$a = 2(1 - k). \tag{5}$$

Теперь добавим в решение слагаемые по степеням x без логарифма:

$$\psi(x) = \big(1 + \big(-2x + ax^2\big)\ln x + cx + dx^2\big)\ \exp(-kx) \tag{6}$$

Подставляя (6) в (1) и приравнивая нулю сумму членов при x^0, получаем связь между коэффициентами c и d (с учётом равенства для a):

$$d = kc - 2. \tag{7}$$

Чтобы получить энергию связанного основного состояния, надо как можно раньше оборвать этот степенной ряд. Полагать $= 0$ нельзя, так как согласно тогда $d \neq 0$ и ряд не обрывается. Поэтому полагаем в $d = 0$. Тогда будут равны нулю и следующие члены степенного ряда. Следовательно,

$$kc = 2 \tag{8}$$

Добавим следующий член разложения при логарифме $\ln x$:

$$\psi(x) = \big(1 + \big(-2x + ax^2 + bx^3\big)\ln x + cx\big)\ \exp(-kx). \tag{9}$$

Подставляя (9) в (1) и приравнивая нулю члены при $x\ \ln x$, получим выражение для коэффициента b:

$$b = ka. \tag{10}$$

А приравнивая нулю сумму членов при x^1, получим соотношение

$$-ka + k^2c + 2b = 0. \tag{11}$$

Так можно продолжать и дальше, так как этот ряд тянется до бесконечности. Тогда будут возникать новые коэффициенты разложения, которые будут выражаться через введенные выше, приравнивая нулю сумму членов при $x^2 \ln x$, при x^2 и т.д.

Подставляя (8) и (10) в (11), получим $a = -2$. Подставляя это значение в (6), находим $k = 2$. Таким образом, энергия основного состояния равна $E_0 = -k^2/2 = -2$. Следует отметить, что она совпадает с квазиклассической энергией основного состояния, как и для всех возбужденных состояний.

Из (8) получим $= 1$, $b = -4$. Итак, приближенная волновая функция основного состояния имеет вид:

$$\psi(x) = \big(1 - 2x\big(1 + x + 2x^2\big)\ln x + x\big)\exp(-2x).$$

При отрицательной координате x она продлевается четным образом. Из вывода видно, что она хорошо описывает точную волновую функцию при небольших значениях координаты и хуже при больших значениях. Степенной ряд при логарифме тянется до бесконечности. В начале координат волновая функция имеет конечное значение и обращенное вниз острие (бесконечная производная).

3 Температура ядра и испарение нейтронов (А.А. Пухов)

Статистической моделью ядра является представление об идеальном вырожденном ферми-газе $N \approx 100$ нуклонов с массой $m = 1{,}7 \cdot 10^{-24}$ г, заключенных в сферу радиуса $R \approx 1{,}3 \cdot 10^{-13} N^{1/3}$см. Из них поровну протонов и нейтронов, то есть состояние каждого нуклона 4-кратно вырождено: по спину (вверх, вниз) и по изоспину (протон, нейтрон). Зарядом протона для простоты пренебрегается. Вычислите энергию Ферми ε_F этого газа. Вычислите температуру T и энтропию S ядра для энергии возбуждения $E \approx 10$ МэВ, отсчитываемой от основного состояния. Проверьте вырожденность газа нуклонов $T \ll \varepsilon_F$. Плотность числа состояний ядра $\frac{\partial \Gamma}{\partial E}$ (с учетом их вырождения) быстро растет с увеличением энергии возбуждения ядра E. Оцените среднее расстояние между уровнями $\frac{\partial E}{\partial \Gamma}$ при $E \approx 10$ МэВ. Сравните Ваше предсказание с экспериментальными данными, составляющими несколько сотых еВ. Подобно термоэмиссии электронов из металла, нуклон может быть испарен из нагретого ядра. Говоря для определенности о нейтроне и полагая энергию его выхода из ядра $e \approx 8$ МэВ, оцените вероятность испарения нейтрона в единицу времени при $E \approx 10$ МэВ. Вычислите среднюю кинетическую энергию вылетевшего нейтрона. При вычислениях воспользуйтесь разложением при $T \ll \mu$

$$\int_0^\infty \frac{f(\varepsilon)d\varepsilon}{\left(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{T}}+1\right)} = \int_0^\mu f(\varepsilon)d\varepsilon + \frac{\pi^2 T^2}{6} f'(\mu) + \cdots$$

Решение

Ядро представляет собой идеальный газ N нуклонов с четырехкратным вырождением, заключенных в объеме $V = 4\pi R^3/3$. Сделаем предположение, которое оправдается дальнейшими вычислениями, что этот ферми-газ вырожден. Его энергия Ферми равна $\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{3\pi^2}{2}\frac{N}{V})^{2/3}$, что составляет $\varepsilon_F \approx 30$ МэВ, а энергия основного состояния ядра при $T = 0$ (заполненная ферми-сфера) есть $\frac{3}{5}\varepsilon_F N$. В этой модели ε_F не зависит от N. Если ядро возбуждено (например, влетевшим в него нейтроном), то оно быстро термолизуется и приобретает температуру T. Используя приведенное в условии разложение, для зависимости энергии возбуждения ядра E от температуры T получаем

$$E = \frac{\pi^2 N}{4\varepsilon_F} T^2$$

Учитывая, что энергия возбуждения составляет $E \approx 10$ МэВ, для температуры ядра получаем $T \approx 1$ МэВ $\approx 10^{10}$ К. Энтропия ядра $S = \int \frac{dE}{T}$ равна

$$S = \frac{\pi^2 N}{2\varepsilon_F} T,$$

что при этих параметрах составляет $S \approx 18$. Таким образом, несмотря на гигантскую температуру, газ нуклонов вырожден.

Плотность числа состояний ядра $\frac{\partial \Gamma}{\partial E}$ учитывает кратность их вырождения. В соответствии с принципом Больцмана $\Gamma = e^{S(E)}$ плотность числа состояний быстро растет с увеличением E и N. Это объясняется тем, что с ростом числа частиц N и энергии возбуждения E увеличивается число способов, которыми заданную энергию можно распределить между всеми частицами. Таким образом, среднее расстояние между уровнями при энергии возбуждения E равно

$$\frac{\partial E}{\partial \Gamma} = T(E)e^{-S(E)} = \sqrt{\frac{E}{a}} e^{-2\sqrt{aE}},$$

где $a = \frac{\pi^2 N}{4\varepsilon_F}$. Энтропию S и температуру T для такой энергии возбуждения мы уже вычисляли, так что, для среднего расстояния между уровнями получаем $\frac{\partial E}{\partial \Gamma} \approx 0.02$ эВ. Это по порядку величины совпадает с экспериментом. Не следует огорчаться, что это выражение не дает правильного предельного перехода при $E, T \to 0$. Оно справедливо только при экспоненциально большом числе состояний $\Gamma \propto \exp\, S(E)$. Вблизи основного состояния ядра правильную оценку $\frac{\partial \Gamma}{\partial E}$ дает плотность одночастичных состояний $\frac{3}{2}\frac{N}{\varepsilon_F}$ на поверхности Ферми. Для среднего расстояния между уровнями это дает десятые доли МэВ.

Испарение нуклонов из ядра вполне аналогично термоэмиссии электронов из металла. Для определенности будем говорить о нейтроне, у которого нет кулоновского барьера. При $T = 0$ максимальной энергии нуклонов ε_F не хватает, чтобы преодолеть работу выхода. При $T > 0$ часть нуклонов способна преодолеть потенциальный барьер, связанный с работой выхода, и покинуть ядро. Расчет потока нуклонов, способных это сделать, совершенно аналогичен выводу формулы Дэшмана-Ричардсона для потока термоэмиссионных электронов. Запишем поток нуклонов, перпендикулярный поверхности ядра (параллельно оси z)

$$j = \frac{4}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int\limits_{\sqrt{2m(\varepsilon_F+e)}}^{+\infty} \frac{p_z}{m} \frac{dp_z}{\left(e^{\frac{\varepsilon(\mathbf{p})-\varepsilon_F}{T}}+1\right)}$$

Здесь $\varepsilon(\mathbf{p}) = (p_x^2+p_y^2+p_z^2)/2m$, а зависимостью химпотенциала от температуры мы пренебрегаем $\mu \approx \varepsilon_F$. В этом выражении учтено, что преодолеть барьер и покинуть ядро способны те нуклоны, у которых ${p_z}^2/2m > \varepsilon_F + e$. Учитывая, что $T \ll e$, мы можем пренебречь единицей в знаменателе, поскольку экспонента велика. Интегралы тогда вычисляются элементарно, что дает

$$j = \frac{m}{\pi^2\hbar^3} T^2 e^{-\frac{e}{T}}.$$

Аналогичный расчет для классического (невырожденного) газа с максвелловским распределением частиц по скоростям, который возникает в задаче об испарении жидкости, дает предэкспоненциальный множитель $\sim T^{3/2}$. Для того, чтобы оценить скорость испарения $\dot{N} = -N/\tau$, нужно $\dot{N} = 4\pi R^2 j$ поделить на N. Для вероятности в единицу времени это дает

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4\pi R^2 j}{N} = \frac{9}{4}\frac{1}{\tau}\left(\frac{I}{\varepsilon_F}\right)^2 e^{-\frac{e}{T}},$$

где $\tau = 2R/v_F \approx 10^{-22}$сек характерное ядерное время пролета нуклоном диаметра ядра, скорость Ферми $v_F = \sqrt{2\varepsilon_F/m}$ составляет примерно четверть скорости света. Множитель, стоящий при частоте столкновений нуклона со стенками ядра τ^{-1} представляет собой вероятность его испарения за одно столкновение $(T/\varepsilon_F)^2 \exp(-e/T) \approx 10^{-6}$. В итоге вероятность испарения нуклона в единицу времени $\tau^{-1} \approx 10^{16-1}$, что согласуется с экспериментальными данными. Средняя кинетическая энергия нуклонов, способных покинуть ядро, равна

$$\langle\varepsilon(\mathbf{p})\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int\limits_{\sqrt{2m(\varepsilon_F+e)}}^{+\infty} p_z \varepsilon(\mathbf{p}) e^{-\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{T}} dp_z \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int\limits_{\sqrt{2m(\varepsilon_F+e)}}^{+\infty} p_z e^{-\frac{\varepsilon(\mathbf{p})}{T}} dp_z$$

Интегралы вычисляются элементарно, что дает $\langle\varepsilon(\mathbf{p})\rangle = 2T + \varepsilon_F + e$. Поскольку нуклоны в ядре находятся в потенциальной яме глубиной $\varepsilon_F + e$, то средняя энергия покинувших ядро нуклонов равна $2T$. Это совпадает с экспериментально наблюдаемой энергией испаренных нуклонов порядка нескольких МэВ. Кроме того, эта оценка показывает, что при энергии возбуждения $E \approx 10$ МэВ ядро вслед за первым может испарить еще один-два нейтрона.

4 Теплоёмкость при наличии потенциальной ямы (И.Я. Полищук)

Идеальный газ занимает объем V. В части объема газа $v \ll V$ имеется потенциальная **яма** глубины U. Найти теплоемкость системы.

Решение

Статсумма для одной молекулы

$$Z = Z_1 + Z_2 = \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \left(V + v(e^{\frac{U}{T}} - 1)\right)$$

Свободная энергия

$$F = -T\ln z = F_0 - T\ln\left(V + v(e^{\frac{U}{T}} - 1)\right)$$

Поправка к свободной энергии

$$\Delta F = -T\ln\left(V + v(e^{\frac{U}{T}} - 1)\right) = -T\ln V - T\ln\left(1 + \frac{v}{V}(e^{\frac{U}{T}} - 1)\right)$$

$$\ln\left(1 + \frac{v}{V}(e^{\frac{U}{T}} - 1)\right) \approx \frac{v}{V}(e^{\frac{U}{T}} - 1)$$

Разложение справедливо если

$$\frac{v}{V}(e^{\frac{U}{T}} - 1) \ll 1$$

Если имеется барьер, а не яма ($U < 0$), то это разложение справедливо всегда

Поправка к энтропии

$$\Delta S = -\frac{\partial \Delta F}{\partial T} = \ln V + \frac{v}{V}(e^{\frac{U}{T}} - 1) - \frac{vU}{VT}e^{\frac{U}{T}} = \ln V + \frac{v}{V}\left(e^{\frac{U}{T}} - 1 - \frac{U}{T}e^{\frac{U}{T}}\right)$$

Поправка к теплоемкости

$$\Delta C = T\frac{\partial \Delta S}{\partial T} = T\frac{v}{V}\left(-\frac{U}{T^2}e^{\frac{U}{T}} + \frac{U}{T^2}e^{\frac{U}{T}} + \frac{1}{T}\left(\frac{U}{T}\right)^2 e^{\frac{U}{T}}\right) = \frac{v}{V}\left(\frac{U}{T}\right)^2 e^{\frac{U}{T}}$$

При $\frac{U}{T} \ll 1$ экспоненту можно заменить на единицу.