УДК 517.98, 519.2

В. Ж. Сакбаев

Московский физико-технический институт (государственный университет)
Российский университет дружбы народов

Меры на бесконечномерных пространствах, инвариантные относительно сдвигов

Изучаются меры на банаховых пространствах l_2 и l_∞, инвариантные относительно сдвигов на произвольные векторы из рассматриваемого банахова пространства. В статье построен конечно-аддитивный аналог меры Лебега – неотрицательная конечно-аддитивная мера λ, определенная на минимальном кольце подмножеств бесконечномерного банахова пространства, содержащем все измеримые бесконечномерные прямоугольники (произведения длин сторон которых сходятся), и являющаяся инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор банахова пространства. Показано, что поскольку группа сдвигов на векторы пространства l_∞ шире группы сдвигов на векторы пространства l_2, то множество инвариантных мер на пространстве l_2 шире множества инвариантных мер на пространстве l_∞. Кроме того, показано, что применение процедуры продолжения Каратеодори–Лебега к рассматриваемой конечно-аддитивной мере на пространстве l_∞ (см. [1]) порождает счетно-аддитивную меру, не совпадающую с исходной конечно-аддитивной мерой.

Ключевые слова: Инвариантная мера на банаховом пространстве, конечно-аддитивная мера, продолжение меры по Каратеодори.

V. Zh. Sakbaev

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
Peoples' Friendship University of Russia

Measures on the infinite dimensional spaces invariant with respect to shifts

The translation-invariant measures on the Banah spaces l_2 and l_∞ on any vectors of the space are studied. In this article the finite additive analog of the Lebesgue measure is constructed. The nonnegative finite additive measure λ on the minimal ring of subsets containing any measurable infinite dimensional rectangles (such that the products of the lengths of its branches converge) satisfies conditions of translation-invariance is defined. It is shown that a set of invariant measures on the space l_2 greater than a set of invariant measures on the space l_∞ since the translation-invariance on vectors of the space l_∞ greater than the translation-invariance on vectors of the space l_2. It is found that the application of Lebesgue–Caratheodory construction to the above invariant finite additive measure on the space l_∞ (see [1]) results in the countable additive measure which does not coincide with the above finite additive measure.

Key words: Invariant measure on Banach space, finite additive measure, dilatation of the measure by Caratheodory.

1. Введение

При исследовании решений дифференциальных уравнений с помощью усреднения случайных блужданий в координатном пространстве (см. [6]) эффективным инструментом являются инвариантные меры на координатном пространстве. Так, в работах [3, 8] сильно непрерывные однопараметрические полугруппы операторов, разрешающих задачу Коши для уравнения диффузии, уравнения дробной диффузии или уравнения Шредингера с различными гамильтонианами, получены посредством усреднения случайных однопараметрических семейств операторов сдвига на векторы координатного пространства по мерам или псевдомерам на множестве таких операторов. Для применения такого подхода к описанию решений дифференциальных уравнений для функций на бесконечномерных пространствах возникакт задача изучения мер на бесконечных пространствах, инвариантных относительно сдвигов на векторы этого пространства или относительно других групп преобразований (см. [10]).

Как известно (см. [4]), не существует меры Лебега на бесконечномерном топологическом векторном пространстве, то есть не существует ненулевой счетно-аддитивной σ-конечной меры на σ-кольце борелевских подмножеств бесконечномерного топологического векторного пространства, инвариантной относительно сдвигов на векторы этого пространства. В связи с этим изучались вопросы о существовании мер на бесконечномерных топологических векторных пространствах, инвариантных относительно сдвига на векторы из некоторого максимального допустимого подпространства (см. [5]), о существовании инвариантных мер, не являющихся σ-конечными [1], о существовании мер, не являющихся счетно-аддитивными (см. [10]).

В настоящей статье рассматривается задача о существовании мер на бесконечномерных топологических векторных пространствах, инвариантных относительно сдвигов на произвольный вектор этого пространства. Будут исследованы топологическое векторное пространство R^∞ числовых последовательностей $\mathbf{N} \to R$ с топологией поточечной (покоординатной) сходимости, банахово пространство l_∞ ограниченных числовых последовательностей и гильбертово пространство числовых последовательностей l_2; для последнего пространства в статье [10] исследован класс мер, инвариантных не только относительно сдвига на произвольный вектор, но и относительно произвольного поворота (унитарного преобразования).

В настоящей работе описано множество конечно-аддитивных мер на банаховых пространствах l_2 и l_∞, инвариантных относительно сдвига на произвольный вектор из этого банахова пространства, и заданных на минимальном кольце, содержащем совокупность измеримых параллелерипедов с ребрами, параллельными координатным осям (т.е. таких, что бесконечное произведение длин их ребер сходится, см. ниже и в [1, 10]). Показано, что инвариантных относительно сдвига на произвольный вектор мер на пространстве l_2 больше, чем инвариантных относительно сдвига на произвольный вектор мер на пространстве l_∞, ибо значения инвариантных мер на непустых множествах точек пространства, заключенных в измеримых параллелепипедах, связанных сдвигом на вектор из $l_\infty \backslash l_2$, должны совпадать для мер на пространстве l_∞ и никак не связаны для мер на пространстве l_2. В заключительной части статьи проанализированы перспективы применения процедуры продолжения конечно-аддитивной меры, заданной на кольце, порожденной измеримыми параллелепипедами, до счетно-аддитивной меры по схеме Каратеодори–Лебега (см. [1]). Установлено, что такое продолжение порождает меру, не совпадающую с исходной мерой на измеримых параллелепипедах, и равную нулю на всех множествах, на которой исходная конечно-аддитивная мера принимает конечные значения.

2. Инвариантные меры на пространствах l_2 и l_∞

.

Как и в статье [1], определим на пространстве отображений $\mathbf{N} \to R$, снабженном супремум-нормой либо топологией поточечной сходимости, семейство множеств $\mathcal{B}$ вида

$$\Pi_{a,b} = \{x \in l_\infty : \ \forall j \in \mathbf{N}\, x_j \in \langle a_j, b_j \rangle\}, \ a, b \in l_\infty.$$

Здесь символ $\langle a_j, b_j \rangle$ означает ограниченный промежуток с концами a_j и b_j при условии $a_j \leq b_j$ (если $a_j = b_j$, то представляющий собой либо одноточечное, либо пустое множество); и пустое множество при условии $a_j > b_j$. (Топологическое векторное пространство отображений $\mathbf{N} \to R$ обозначается символом R^∞, а линейное нормированное – символом l^∞.)

Множества вида $\Pi_{a,b}$ при произвольных $a, b \in l_\infty$, удовлетворяющих условиям $a_j \le b_j \ \forall\ j \in \mathbf{N}$, будем называть брусами; брус $\Pi_{a,b}$ является пустым множеством, если $\exists\, j \in \mathbf{N}:\ \langle a_j, b_j\rangle = \oslash$.

Следуя подходу из работы [1] дадим следующее определение измеримости бруса.

Определение 1. Будем называть брус $\Pi_{a,b} \in \mathcal{B}$ измеримым, если выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \ln(b_j - a_j) \in [-\infty, +\infty), \tag{1}$$

где сумма ряда считается равной $-\infty$, если хотя бы один член ряда имеет значение $-\infty$.

Символом $\mathcal{P}$ обозначим совокупность измеримых брусов.

В работе [10] рассматривается более сильное, чем (1), условие измеримости бруса, связанное с требованием независимости свойства измеримости от изменения порядка координат.

Определение 2. Будем называть брус $\Pi_{a,b} \in \mathcal{B}$ абсолютно измеримым, если выполняется условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \max\{0,\, \ln(b_j - a_j)\} \tag{2}$$

сходится.

Символом $\mathcal{Q}$ обозначим совокупность абсолютно измеримых брусов.

Очевидно, условие (1) следует из условия (2), то есть $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$.

На множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ определим функцию $\mu:\ \mathcal{P} \to [0, +\infty)$ равенством

$$\mu(\Pi_{a,b}) = \exp\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \ln(b_j - a_j)\Big). \tag{3}$$

В силу определения измеримости для любого бруса $\Pi_{a,b} \in \mathcal{P}$ выполняется условие $\mu(\Pi) \in [0, +\infty)$, причем если $a, b \in l_\infty$ удовлетворяют условию $\exists\ j \in \mathbf{N}:\ \ a_j = b_j$, то сумма ряда из (1) равна $-\infty$ и $\mu(\Pi_{a,b}) = 0$; в частности $\mu(\oslash) = 0$.

Пусть $\mathcal{R}$ – минимальное кольцо, содержащее класс множеств $\mathcal{P}$.

Заметим, что класс $\mathcal{P}$ является замкнутым относительно пересечений: действительно, пусть $\Pi_{a_1,b_1}, \Pi_{a_2,b_2} \in \mathcal{P}$. Тогда при условии, что неравенства $\alpha_j = \max\{a_{1,j}, a_{2,j}\} < \min\{b_{1,j}, b_{2,j}\} = \beta_j$ выполнены при всех $j \in \mathbf{N}$, то $\Pi_{a_1,b_1} \bigcap \Pi_{a_2,b_2} = \Pi_{\alpha,\beta}$ и множество $\Pi_{\alpha,\beta}$ непусто, является брусом и поскольку $\beta_j - a_j \le \min\{b_{1,j} - a_{1,j},\, b_{2,j} - a_{2,j}\}\ \forall\ j \in \mathbf{N}$, то $\mu(\Pi_{\alpha,\beta}) \le \min\{\mu(\Pi_{a_1,b_1}), \mu(\Pi_{a_2,b_2})\}$. При условии, что при некотором $j \in \mathbf{N}$ выполняется противоположное неравенство $\alpha_j = \max\{a_{1,j}, a_{2,j}\} \ge \min\{b_{1,j}, b_{2,j}\} = \beta_j$, то либо множество $\Pi_{a_1,b_1} \bigcap \Pi_{a_2,b_2} = \Pi_{\alpha,\beta}$ является пустым множеством, либо оно является брусом с ребром нулевой длины, но в каждом из этих случаев $\mu(\Pi_{a_1,b_1} \bigcap \Pi_{a_2,b_2}) = 0$.

Лемма 1. *Класс $\mathcal{K}$ множеств, состоящих из разностей бруса из класса $\mathcal{P}$ и объединения конечной совокупности брусов из класса $\mathcal{P}$, является полукольцом.*

Действительно, класс $\mathcal{K}$ содержит пустое множество, замкнут относительно пересечений, а разность двух множеств из класса $\mathcal{K}$ представима как объединение конечной совокупности множеств из этого класса.

Лемма 2. *Класс множеств $\mathcal{R}$, состоящий из конечных объединений множеств из класса $\mathcal{K}$, является минимальным кольцом, содержащим класс измеримых брусов $\mathcal{P}$.*

Лемма 3. *Функция множества μ, заданная на классе $\mathcal{P}$, допускает единственное аддитивное продолжение на полукольцо $\mathcal{K}$.*

На множествах вида $\Pi \backslash (\bigcup\limits_{j=1}^{n} \Pi_j)$, получаемых вычитанием из бруса Π конечной совокупности брусов $\Pi_1, ..., \Pi_n$, доопределяем меру из условия аддитивности. Для каждого

$n \in \mathbf{N}$ определим через $\mathcal{K}_n$ совокупность множеств вида $\Pi \backslash (\bigcup\limits_{j=1}^{n} \Pi_j)$, $\Pi, \Pi_1, ..., \Pi_n \in \mathcal{P}$. Тогда $\mathcal{K}_{n+1} \supset \mathcal{K}_n$ и $\mathcal{K} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n$.

Докажем это утверждение леммы 3 с помощью метода математической индукции. Действительно, при $n = 1$ меру множества $\Pi \backslash \Pi_1 \in \mathcal{K}_1$ определим равенством $\mu(\Pi \backslash \Pi_1) = \mu(\Pi) - \mu(\Pi \bigcap \Pi_1)$. Тогда функция множества μ определена, допускает единственное аддитивное продолжение на класс множеств $\mathcal{K}_1$, поскольку множества из $\mathcal{K}_1$, не вошедшие в класс $\mathcal{P}$, однозначно предстваимы в виде разности двух брусов. Предположим, что функция множества μ допускает единственное аддитивное продолжение на класс множеств $\mathcal{K}_n$ при некотором $n \in \mathbf{N}$. Тогда на множестве, состоящем из разности бруса Π и объединения совокупности из $n+1$ брусов, для произвольного аддитивного продолжения функции μ на класс $\mathcal{K}_{n+1}$ выполняется равенство

$$\mu(\Pi \backslash (\bigcup_{j=1}^{n+1} \Pi_j)) = \mu(\Pi) - \sum_{k=1}^{n+1} \mu \left((\Pi \bigcap \Pi_k) \backslash (\bigcup_{j=1}^{k-1} \Pi_j) \right).$$

В силу предположения индукции каждое слагаемое в правой части определено однозначно, поэтому функция множества μ допускает единственное аддитивное продолжение на класс $\mathcal{K}_{n+1}$. Из условия аддитивности функции μ следует, что величина $\mu(\Pi \backslash (\bigcup\limits_{j=1}^{n+1} \Pi_j))$ не зависит от выбора представления множества $\bigcup\limits_{j=1}^{n+1} \Pi_j$ брусами Π_j, $j = 1, ..., n+1$. Следовательно, функция множества μ допускает единственное аддитивное продолжение на класс $\mathcal{K}$.

Следовательно, справедливо утверждение.

Лемма 4. *Функция множества μ, заданная на классе $\mathcal{P}$, допускает единственное аддитивное продолжение до меры μ на кольце $\mathcal{R}$.*

Действительно, определенная на полукольце множеств $\mathcal{K}$ функция множества μ допускает, согласно теореме 1 главы 5.2 [7], единственное продолжение до аддитивной функции множества на минимальной кольце $\mathcal{R}$.

Лемма 5. *Функция множества μ определена и аддитивна на классе $\mathcal{R}$ и инвариантна относительно сдвига на любой вектор из пространства R^{∞}.*

Инвариантность функции μ на классе множеств $\mathcal{P}$ относительно сдвига на произвольный вектор пространства l_∞ очевидна. Из нее следует инвариантность функции μ на классе множеств $\mathcal{K}_1$ и по индукции на классе $\mathcal{K}_n$ при любом $n \in \mathbf{N}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ задана функция $\mu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$, аддитивная и инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞. Тогда функция μ однозначно продолжается до аддитивной и инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞ функции на кольце $\mathcal{R}$.*

Таким образом, для любых двух множеств $A, B \in \mathcal{R}$, связанных между собой преобразованием сдвига на вектор из l_∞, выполняется равенство $\mu(A) = \mu(B)$.

Два множества пространства l_∞ назовем l_∞-эквивалентными, если одно из них является образом другого при сдвиге на вектор из пространства l_∞. Введенное отношение эквивалентности на кольце $\mathcal{R}$ позволяет представить кольцо $\mathcal{R}$ как объединение непересекающихся классов l_∞-эквивалентных множеств. Мера μ из леммы 2 принимает равные значения на множествах из одного класса l_∞-эквивалентности. В то же время условие инвариантности меры μ относительно сдвигов на векторы из l_∞ требует постоянства значения меры на множествах из класса l_∞-эквивалентности и мера из леммы 2 удовлетворяет этому требованию.

Назовем два вектора пространства l_∞ l_2-эквивалентными, если их разность является вектором из пространства l_2; два множества пространства l_∞ назовем l_2-эквивалентными, если одно из них является образом другого при сдвиге на вектор из пространства l_2.

Введенное отношение эквивалентности на кольце $\mathcal{R}$ позволяет представить кольцо $\mathcal{R}$ как объединение непересекающихся классов l_2-эквивалентных множеств. Следовательно, сдвиги на произвольный вектор из пространства l_2 преобразуют множество из некоторого класса в множество из того же самого класса.

Поскольку пространство l_∞ шире пространства l_2, то один класс l_∞-эквивалентности содержит множество различных классов l_2-эквивалентности. Условие инвариантности меры μ относительно сдвигов на векторы из l_2 требует постоянства значения меры на множествах из класса l_2-эквивалентности, но значения меры на множествах из различных классов l_2-эквивалентности никак не связаны между собой условием инвариантности меры μ относительно сдвигов на векторы из l_2.

Два бруса являются l_∞-эквивалентными тогда и только тогда, когда последовательности длин их ребер совпадают. Поэтому мера на кольце $\mathcal{R}$ подмножеств пространства l_∞, определенная в лемме 2, является единственной мерой на кольце $\mathcal{R}$, инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_∞, нормированной условием: значение меры на единичном кубе $\{x \in l^\infty : \ \forall j \in \mathbf{N}\ x_j \in [0,1]\}$ равно единице. Тем более, такая мера является инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_2, но есть и другие l_2-инвариантные меры, поскольку значения таких мер на кубах $\{x \in l^\infty : \ \forall j \in \mathbf{N}\ x_j \in [a_j, a_j+1]\}$ и $\{x \in l^\infty : \ \forall j \in \mathbf{N}\ x_j \in [\alpha_j, \alpha_j+1]\}$ могут быть различны для векторов $a, \alpha \in l_\infty$ таких, что $a - \alpha \notin l_2$.

Теорема 2. *Пусть на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ задана функция $\nu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$, аддитивная (если $A, A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}$, $A = \bigcup_{j=1}^n A_j$ и множества $A_1, ..., A_n$ попарно не пересекаются, то $\nu(A) = \sum\limits_{j=1}^n \nu(A_j)$) и инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_2. Тогда функция ν однозначно продолжается до аддитивной и инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из l_2 функции на классе $\mathcal{K}$ и на кольце $\mathcal{R}$.*

Если поставить задачу определения меры на кольце $\mathcal{R}$ подмножеств пространства l_∞, инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор из пространства l_2, то помимо меры μ найдутся и другие такие меры. Например, выделим в кольце $\mathcal{R}$ систему брусов, имеющих точку 0 пространства l_∞ своим геометрическим центром симметрии, а также брусов, входящих с ними в один класс l_2-эквивалентности. Пусть $\mathcal{R}_0$ – минимальное кольцо, содержащее систему таких центрированных и l_2-эквивалентных им брусов. Определим меру ν из условия $\nu|_{\mathcal{R}_0} = \mu|_{\mathcal{R}_0}$, $\nu(A) = 0$ для любого множества $A \in \mathcal{R}$, не входящего в подкольцо $\mathcal{R}_0$. Тогда ν – также мера на кольце $\mathcal{R}$, инвариантная относительно сдвигов на векторы из пространства l_2.

Таким образом, множество l_2-эквивалентных мер на кольце $\mathcal{R}$ шире множества l_∞-эквивалентных мер на кольце $\mathcal{R}$ и имеет место неоднозначность в выборе l_2-эквивалентных мер на кольце $\mathcal{R}$, связанная с различием значений мер на брусах с равными ребрами, входящими в различные классы l_2-эквивалентности.

3. О продолжении меры на l^∞ с класса $\mathcal{P}$ измеримых брусов по схеме Лебега–Каратеодори

В работе [1] проведено построение меры на топологическом векторном пространстве R^∞, в котором мера из теоремы 1 продолжается на минимальное σ-кольцо Σ, содержащее кольцо $\mathcal{R}$, с помощью внешней меры по схеме Каратеодори.

В работе [1] по аддитивной функции множества μ на совокупности измеримых брусов $\mathcal{P}$ (см. (3)), задается внешняя мера $\lambda : 2^{l_\infty} \to [0, +\infty]$, определяемая равенством

$$\lambda(A) = \inf_{\bigcup\limits_{j \in \mathbf{N}} B_j \supset A,\ B_j \in \mathcal{P}} \sum_{j \in \mathbf{N}} \mu(B_j)\ \forall\ A \in 2^{l_\infty}. \tag{4}$$

Функция множества λ, определенная равенством (3), является внешней мерой на пространстве l_∞ – она определена на алгебре всех подмножеств, счетно-субаддитивна и удовлетворяет условию $\lambda(\oslash) = 0$. Кроме того, внешняя мера λ порождена мерой μ, заданной на минимальном кольце $\mathcal{R}$, содержащем класс $\mathcal{P}$. И если бы мера μ удовлетворяла условию счетной аддитивности на классе $\mathcal{P}$ (то есть для любой последовательности множеств $A_j \in \mathcal{R}$, $j \in \mathbf{N}$, такой, что $A_{j+1} \subset A_j$ и $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j = \oslash$, выполняется равенство $\lim\limits_{j\to\infty} \mu(A_j) = 0$), то тогда сужение внешней меры λ на класс $\mathcal{P}$ (и на кольцо $\mathcal{R}$) должно было бы совпасть с мерой μ согласно теореме 1.5.6. [2] (см. также теорему 10.2 [9]). Но, как показывают примеры (см. [2, 9]), если мера μ является лишь конечно-аддитивной, то построенная по ней внешняя мера λ может не совпадать с мерой μ.

Пример. Пусть ν – чисто конечно-аддитивная мера, заданная на алгебре $2^{\mathbf{N}}$ всех подмножеств множества натуральных чисел $\mathbf{N}$. Тогда если внешняя мера λ, порожденная мерой ν по правилу

$$\lambda(A) = \inf_{\bigcup\limits_{j\in\mathbf{N}} B_j \supset A,\ B_j \in 2^{\mathbf{N}}} \sum_{j\in\mathbf{N}} \nu(B_j)\ \forall\ A \in 2^{\mathbf{N}}, \tag{4}$$

то $\lambda(\mathbf{N}) = 0$.

Действительно, поскольку $\mathbf{N} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \{k\}$, а мера ν чисто конечно-аддитивна, $\nu(\{k\}) = 0\ \forall\ k \in \mathbf{N}$, поэтому $0 \le \lambda(\mathbf{N}) \le \sum\limits_{j\in\mathbf{N}} \nu(\{j\}) = 0$.

Лемма 3. *Внешняя мера λ отличается от меры μ на множествах из класса $\mathcal{P}$.*

Действительно, для единичного куба $\Pi_{0,1}$ выполняется равенство $\mu(\Pi_{0,1}) = 1$. С другой стороны, $\bigcup\limits_{j\in\mathbf{N}} \Pi_{0,1-\frac{1}{j}} \supset \Pi_{0,1}$, и так как $\mu(\Pi_{0,1-\frac{1}{j}}) = 0$ для любого $j \in \mathbf{N}$, то $0 \le \lambda(\Pi_{0,1}) \le \sum\limits_{j\in\mathbf{N}} \mu(\Pi_{0,1-\frac{1}{j}}) = 0$, то есть $0 = \lambda(\Pi_{0,1}) < \mu(\Pi_{0,1}) = 1$.

Таким образом, отличие меры λ от меры μ на множестве измеримых брусов $\mathcal{P}$ установлено. Докажем, что в предположении, что ряд (2) сходится, мера λ обращается в нуль на всех множествах, на которых мера μ принимает конечные положительные значения.

Обозначим через $\mathcal{Q}$ совокупность абсолютно измеримых брусов, для которых ряд (2) сходится, и через $\mathcal{S}$ – минимальное кольцо множеств, содержащее $\mathcal{Q}$. Тогда $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$; обозначим через ν сужение функции μ, определенной равенством (3), на класс множеств $\mathcal{Q}$.

Так же, как и теорема 1, доказывается следующее утверждение.

Теорема 1'. *Пусть на множестве абсолютно измеримых брусов $\mathcal{Q}$ задана функция $\nu : \mathcal{P} \to [0, +\infty]$, аддитивная и инвариантная относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞. Тогда функция ν однозначно продолжается до аддитивной и инвариантной относительно сдвига на произвольный вектор из l_∞ функции на кольце $\mathcal{S}$.*

Для любого бруса $\Pi :\ \nu(\Pi) = a > 1$ найдется брус $Q : \nu(Q) = b > a$, длины всех ребер которого не меньше единицы, и такой, $\Pi \subset Q$. Действительно, в силу условия абсолютной измеримости бруса Π (сходимости ряда (2)) достаточно расширить его ребра, длина которых меньше единицы, до ребер единичной длины.

Для любого бруса Q такого, что $\nu(Q) = b > a$, длины всех ребер которого не меньше единицы, и любого числа $\sigma > 0$ выполняется равенство $\lambda(Q) < \sigma$. Действительно, в силу условия сходимости ряда (2) для бруса Q для каждого числа $\sigma > 0$ существует такое $N \in \mathbf{N}$, что $\exp(\sum\limits_{j=N+1}^{\infty} \ln(b_j - a_j)) < 1 + \sigma$. Тогда сечение Q_N бруса Q пространством $H_N = \{x \in l_\infty :\ x_1 = ... = x_N = 0\}$ содержит единичный куб E_N пространства H_N такой, что $\nu_{H_N}(Q \backslash E_N) < \sigma$. Сечение $Q_N^{\perp}$ бруса Q N-мерным подпространством $l_\infty \backslash H_N$ представляет собой N-мерный брус, N-мерный объем которого не превосходит числа $b = \nu(Q)$ и который можно покрыть объединением конечного числа m N-мерных единичных брусов $B_1, ..., B_m$. Тогда для произведения $U_N \times E_N$ объединения $U_N = \bigcup\limits_{j=1}^{m} B_j$ этих N-мерных брусов на единичный куб E_N выполняется неравенство $\nu(Q\backslash(U_N \times E_N)) < b\sigma$ поскольку в силу леммы 3 $\lambda(U_N \times E_N) = 0$.

Таким образом, $\lambda(\Pi) = 0$ для любого измеримого бруса $\Pi \in \mathcal{S}$.

Более того, для каждого множества $A \in \mathcal{S}$ конечной положительной ν-меры выполняется равенство $\lambda(A) = 0$. Действительно, если $\nu(A) = a > 0$ для некоторого $A \in \mathcal{S}$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой конечный набор измеримых брусов $Q_1, ..., Q_m \in \mathcal{S}$, что $A \subset \bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$. Поэтому $\lambda(A) \leq \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda(B_j) = 0$. Следовательно, справедливо утверждение:

Теорема 3. *Для любого множества $A \in \mathcal{S}$ такого, что $\nu(A) > 0$, выполняется равенство $\lambda(A) = 0$.*

4. Заключение

В статье изучаются меры на банаховых пространствах l_2 и l_∞, инвариантные относительно сдвигов на произвольные векторы из рассматриваемого банахова пространства. Построен конечно-аддитивный аналог меры Лебега – неотрицательная конечно-аддитивная мера λ, определенная на минимальном кольце подмножеств бесконечномерного банахова пространства, содержащем все измеримые бесконечномерные прямоугольники (произведения длин сторон которых сходятся), и являющаяся инвариантной относительно сдвигов на произвольный вектор банахова пространства. Установлено, что поскольку группа сдвигов на векторы пространства l_∞ шире группы сдвигов на векторы пространства l_2, то множество инвариантных мер на пространстве l_2 шире множества инвариантных мер на пространстве l_∞. Кроме того, показано, что применение процедуры продолжения Каратеодори–Лебега к рассматриваемой конечно-аддитивной мере на пространстве l_∞ (см. [1]) порождает счетно-аддитивную меру, не совпадающую с исходной конечно-аддитивной мерой.

Автор благодарит Г. Г. Амосова, М. М. Галламова, Ю. Н. Орлова, О. Г. Смолянова, Е. Т. Шавгулидзе и Н. Н. Шамарова за плодотворные обсуждения затронутых в работе проблем.

Автор выражает благодарность РФФИ за предоставление гранта № 14-01-00516.

Литература

1. *Baker R.* «Lebesgue measure» on R^∞ // Proceedings of the AMS. 1991. V. 113, N 4. P. 1023–1029.
2. *Богачев В.И.* Основы теории меры. Т. 1. Москва-Ижевск: РХД, 2006.
3. *Борисов Л.А., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж.* Формулы Фейнмана для усреднения полугрупп, порождаемых операторами типа Шредингера: препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2015, 057.
4. *Вейль А.* Интегрирование в топологических группах и его применение. М.: Изд. иностр. лит., 1950.
5. *Вершик А.М.* Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве? // Труды МИАН им. В.А. Стеклова. 2007. Т. 259. С. 256–281.
6. *Далецкий Ю.Л., Фомин С.В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004.
8. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Случайные неограниченные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. (принята в печать)
9. *Порошкин А.Г.* Теория меры и интеграла. М.: УРСС, 2006.

10. *Сакбаев В.Ж.* Усреднение случайных блужданий и меры на гильбертовом пространстве, инвариантные относительно сдвига // ТМФ. (принята в печать)

11. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы М.:УРСС, 2015.

References

1. *Baker R.* «Lebesgue measure» on R^∞. Proceedings of the AMS. 1991. V. 113, N 4. P. 1023–1029.

2. *Bogachev V.I.* Measure theory. 1. Berlin: Springer, 2007.

3. *Borisov L.A., Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh.* Feynman formulas for averaging of semigroups generating by the operators of Schrodinger type: preprint of IAM by M.V. Keldysh. 2015. N 057.

4. *Weil A.* l'Integration dans les group topologiques et ses application. Paris. 1940.

5. *Vershik A.M.* Does there exist a Lebesgue measure in the infinite-dimensional space? Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2007. V. 259. P. 256–281.

6. *Daletsky Yu.L., Fomin S.V.* Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces. Moscow: Nauka, 1983.

7. *Kolmogorov A.N., Fomin S.V.* Elements of the theory of functions and functional analysis. M.: Fizmatlit. 2004.

8. *Orlov Y.N., Sakbaev V.Z., Smolyanov O.G.* Random unbounded operators and Feynman formulas. Izvestiya: Mathematics. 2016. (accepted for publication)

9. *Poroshkin A.G.* The theory of measure and integral. M.: URSS, 2006.

10. *Sakbaev V.Zh.* Averaging of random walks and measures on Hilbert space invariant with respect to shifts. Theoretical and mathematical physics. 2016. (accepted for publication)

11. *Smolyanov O.G., Shavgulidze E.T.* Continual integrals. M.:URSS, 2015.

Поступила в редакцию 11.05.2016