УДК 517.972

*А. Акбари Фаллахи*

Российский университет дружбы народов

# О стремлении к нулю величины отклонения аргумента в дифференциально-разностных уравнениях с опережением

Исследуется задача с начальным условиям для дифференциально-разностного уравнения параболического типа с опережением без запаздывания. Установлены достаточные условия корректной разрешимости задачи в пространствах Соболева с экспоненциальным весом. В терминах спектра оператора задачи получены необходимые условия корректной разрешимости задачи.

**Ключевые слова:** дифференциально-разностные уравнения, задача с начальными условиями, пространства Соболева.

*A. Akbari Fallahi*

Peoples' Friendship University of Russia

# Zero convergence of the deviation value in differential difference equations with an advanced argument

We obtain the sufficient and necessary conditions of the existence and uniqueness of the solution of the initial value problem for the difference differential advanced type equation in the weighted Sobolev space. We find that the initial problem for the advanced difference differential equation without retarding is equivalent to the Cauchy problem for the ordinary differential equation with efficient coefficients defined by the roots of a characteristic equation. We obtain the limit behavior of the solutions of the initial value problem since the difference differential equation converging as the value of argument deviation tends to zero.

**Key words:** differential difference equations, initial value problem, Sobolev spaces.

## Введение

Настоящая работа посвящена исследованию функционально-дифференциального уравнения вида

$$u_t(t) = au(t) + bu(t+h) + cu(t-\tau) + f(t),\ t > 0, \tag{1}$$

в котором $a, b, c$ – вещественные постоянные, положительные постоянные $h, \tau$ являются отклонениями аргумента (опережением и запаздыванием соответственно), а $f$ – заданная на полуоси $R_+ = (0, +\infty)$ непрерывная числовая функция. Требуется определить неизвестную числовую функцию $u : (-\tau, +\infty) \to R$, удовлетворяющую уранению (1) и начальному условию.

В работах [6], [7] изучалась задача, в которой исследовались решения уравнения (1), удовлетворяющие начальному условию

$$u(t) = \psi(t),\ t \in (-\tau, h)$$

с заданной начальной функцией $\psi$, а в работах [2], [2] рассматривалась задача отыскания решения уравнения (1), удовлетворяющих начальному условию

$$u(t) = \varphi(t),\ t \in (-\tau, 0) \tag{2}$$

с заданной начальной функцией $\varphi$.

Функционально-дифференциальные уравнения опережающего типа изучены в значительно меньшей мере, чем функционально-дифференциальные уравнения запаздывающего и нейтрального типов (см. [5], [8]).

Во многом это связано с некорректностью постановки задачи с начальным условием на промежутке отклонения аргумента в таких уравнениях, требующей от начального условия и правой части уравнения выполнения бесконечного множества условий согласования (см. [7]).

Как было показано в работе [2], для корректности постановки задачи с начальными данными следует задать начальные условия лишь на части промежутка отклонения аргумена – на промежутке запаздывания аргумента $(-\tau, 0)$. В работе [2] получены условия на коэффициенты уравнения (1) и параметры весового пространства Соболева, достаточные для корректной разрешимости задачи с начальными условиями в такой модифицированной постановке.

В настоящей работе мы исследум дифференциально-разностные уравнения вида (1) с опережением без запаздывания – при условии $c = 0$.

В этом случае начальные условия задаются в точке $t_0 = 0$. В работе [2] были исследованы, в частности, вопросы постановки и корректной разрешимости задачи с начальными условиями для дифференциально-разностного уравнения вида

$$u_t(t) = au(t) + bu(t+h) + f(t),\ t > 0, \tag{3}$$

где

$$u(+0) = u_0. \tag{4}$$

Здесь $h > 0$, $f$ – заданная непрерывная числовая функция на области $(0, +\infty)$, а $u$ – неизвестная числовая функция, областью определения которой является множество $(0, +\infty)$.

**Определение.** Решением задачи Коши (1), (2) будем называть функцию $u \in W_2^1(0, +\infty)$, которая удовлетворяет уравнению (1) на интервале $(0, +\infty)$ и начальному условию (2).

В настоящей работе будет исследовано предельное поведение при $h \to +0$ решений задачи (3) – (4).

Будут получены следующие результаты.

1. Если $|b| < -a$, то при любом значении $h > 0$ задача (3) – (4) имеет единственное решение $u_h$ в пространстве Соболева $W_2^1(0, +\infty)$.

2. Если $|b| < -a$, то при любом значении $h > 0$ задача (3) – (4) в пространстве Соболева $W_2^1(0, +\infty)$ эквивалентна задаче Коши для эффективного обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_t(t) = \alpha u(t) + f(t),\ t > 0,$$

с начальным условием (4) и постоянной $\alpha$, зависящей от параметров $a, b, h$.

3. Последовательность решений $u_h$, $h > 0$ сходится при $h \to 0$ равномерно на каждом отрезке $[0, T]$ к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_t(t) = (a+b)u(t) + f(t),\ t > 0,$$

с начальным условием (4).

## Достаточные условия корректной разрешимости задачи (3) – (4)

Для исследования корректной разрешимости задачи (3) – (4) введем следующие функциональные пространства.

Обозначим через $L_{2,\gamma}(a,b), (-\infty \le a < b \le +\infty)$ пространство функций со значениями в С, снабженное нормой

$$\| f \|_{L_{2,\gamma}(a,b)} = (\int_a^b \exp(-2\gamma t) \mid f(t) \mid^2 dt)^{1/2}, \gamma \ge 0.$$

Через $W^l_{2,\gamma}(a,b)$ при каждом $l \in \mathbf{N}$ обозначим пространство функций на интервале $(a,b)$ со значениями в С, снабженное нормой

$$\| u \|_{W^l_{2,\gamma}(a,b)} = (\| u^{(l)} \|^2_{L_{2,\gamma}(a,b)} + (\| u \|^2_{L_{2,\gamma}(a,b)})^{1/2}, \gamma \ge 0.$$

**Определение**. Функцию $u \in W^1_{2,\gamma}(0,+\infty)$ назовем решением задачи (3) – (4) в весовом пространстве Соболева, если она удовлетворяет дифференциальному уравнению (3) в пространстве $L_{2,\gamma}(0,+\infty)$ и начальному условию (4).

Согласно результатам работы [2], справедлива следующая теорема.

**Теорема 1**. *Пусть$f \in L_{2,\gamma_0}(0,+\infty)$ при некоторых $\gamma_0 \in R$ и пусть $\omega(\gamma) < 1$ на интервале $(\alpha,\beta) \subset R$, где $\omega(\gamma) = \frac{be^{\gamma h}}{\gamma - a}$, $\gamma \in R$. Тогда задача Коши* (3), (4) *имеет единственное решение $u$ в пространстве $W^1_{2,\gamma}(0,+\infty)$ при всех $\gamma \in [\gamma_0, \beta)$.*

## Необходимые условия корректной разрешимости

Наряду с задачей (3) – (4) рассмотрим задачу с начальными условиями для модельного параболического дифференциально-разностного уравнения вида

$$u_t(t) = \mathcal{M}u(t) + f(t),\ t > 0, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{M}u(t) = au(t) + bu(t+h). \tag{6}$$

Рассмотрим задачу с начальным условием для однородного диффренциально-разностного уравнения вида

$$u_t(t) = au(t) + bu(t+h), t > 0. \tag{7}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее дифференциально-разностному уравнению (7), имеет вид

$$\lambda = a + be^{\lambda h},\ \lambda \in \mathbf{C}. \tag{8}$$

Это уравнение имеет счетное множество $\Xi$ комплексных корней $\Xi = \{\lambda_k,\ k \in \mathbf{N}\}$, причем при каждом $k \in \mathbf{N}$ функция $\exp(\lambda_k t)$, $t > 0$, является решением уравнения (7).

Если $\lambda_k = x_k + iy_k$ и $\gamma \in R$, то включение $\exp(\lambda_k t) \in W^1_{2,\gamma}(0,+\infty)$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_k < \gamma$. Основываясь на этом факте, мы исследуем взаимное расположение множества $\Xi$ и промежутка корректности задачи (1), (2) в шкале весовых показателей – такого промежутка $(\alpha,\beta)$, что $\forall\gamma \in (\alpha,\beta)$ и $\omega(\gamma) < 1$. Определим числа

$$a = sup\{Re\lambda : \lambda \in \Xi, Re\lambda < \alpha\},$$

$$b = inf\{Re\lambda : \lambda \in \Xi, Re\lambda > \beta\}.$$

Как установлено в работе [2] , справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть $\omega(\gamma) < 1$ на интервале $(\alpha,\beta) \subset R$. Тогда если $\gamma > b$, то однородная задача* (3),(4) *имеет нетривиальное решение $u \in W^1_{2,\gamma}(0,+\infty)$. Если $\gamma < a$, то не при всех начальных данных $u_0 \in W^1_2([h,0])$, однородное уравнение $u_t = \mathcal{M}u(t)$, $t > 0$ имеет решение из пространство $W^1_{2,\gamma}(0,+\infty)$.*

## Корни характеристического уравнения и предел при $h \to 0$

Рассмотрим теперь зачачу (1), (2) в предположении $c = 0$, т.е. уравнение с опережением без запаздывания (7):

$$u_t(t) = au(t) + bu(t+h), t > 0.$$

Тогда начальные условия к дифференциально-разностному уравнению (7) ставятся в одной точке – левой границе области определения неизвестной функции:

$$u(+0) = u_0 \in R. \tag{9}$$

Таким образом, в случае уравнения с опережением, в отличие от уравнения с запаздыванием, область задания начальных данных не зависит от параметра $h$.

Если $h = 0$, то уравнение (7) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_t(t) = (a+b)u(t), t > 0,$$

решение которого, удовлетворяющее начальному условию (9), имеет вид $u(t) = u_0 e^{(a+b)t}$.

Согласно теореме 1, условие $\omega(\gamma) < 1$ (то есть $\gamma \in (\alpha, \beta)$) достаточно для существования единственого решения задачи с начальным условием (1), (2). Поскольку $\omega(0) < 1$, то тогда $0 \in (\alpha, \beta)$.

**Лемма 1.** *Пусть выполнено неравенство* $0 < |b| < -a$. *Тогда характеристическое уранение* (8) *имеет два вещественных корня различных знаков при* $b > 0$*, а при* $b < 0$ *– один отрицательный вещественный корень.*

Действительно, вещественные корни уравнения (8) определяются как абсциссы точек пересечения графиков функций $u = x - a$ и $u = be^{xh}$.

**Лемма 2.** *Вещественная часть любого комплексного корня характеристического уравнения* (8) *превосходит любой его вещественный корень.*

Действительно, комплексные корни определяются из решения системы уравнений с двумя неизвестными:

$$x = a + be^{xh}\cos(yh),$$

$$y = be^{xh}\sin(yh).$$

Следовательно, комплексные корни уравнения (8) лежат на пересечении плоских кривых

$$(x-a)^2 = b^2 e^{2xh} - y^2,$$

и

$$x = a + y\cot(yh),$$

что доказывает утверждение леммы 2.

**Следствие 1.** Если выполнено условие $0 < b < -a$,то $x_1 < \alpha < \beta < x_2$. Действительно, согласно лемме 1 характеристическое уравнение (8) имеет при условии $0 < b < -a$ два вещественных корня $x_1, x_2$, таких, что $x_1 < 0 < x_2$.

Следовательно, $u_0 e^{x_1 t} \in W_2^1(0, +\infty)$ и функция $u_0 e^{x_1 t}$ является решением задачи с начальным условием (7), (9) при $\gamma = 0$. Так как $\omega(0) = \frac{|b|}{-a} < 1$, то $0 \in (\alpha, \beta)$.

В силу теоремы 1 при любом $\gamma \in (\alpha, \beta)$ задача с начальным условием (7), (9) имеет единственное решение и этим решением является функция $u_0 e^{x_1 t}$. Поэтому $x_1 < \alpha$.

В силу теоремы 1 никакая из функций $e^{\lambda_k t}$, $\lambda_k \in \Xi$, кроме $e^{x_1 t}$, не может быть решением уравнения (1) из пространства $W_{2,\gamma}^1(0, +\infty)$. Ибо если $e^{\lambda_k t}$ лежит в пространстве $W_2^1(0, +\infty)$, то решение задачи (7), (9) не единственно. Поэтому $\beta < x_2$. Таким образом, $x_1 < \alpha < \beta < x_2$. В этом случае вещественные постоянные $x_1, x_2$ играют роль постоянных $a, b$ из теремы 2.

**Следствие 2**. Если выполнено условие $a < b < 0$, то $x_1 < \alpha < 0$.

Действительно, если выполнено условие $a < b < 0$, то $\omega(0) < 1$, и поэтому $\alpha < 0$. Согласно лемме 1 характеристическое уравнение (8) имеет один вещественный корень $x_1 < 0$. В этом случае функция $u_0 e^{x_1 t} \in W_2^1(0, +\infty)$, и, согласно теореме 1, она является единственным решением ДРУ (7) из пространства $W_{2,\gamma}^1(0, +\infty)$ при любом $\gamma \in (\alpha, \beta)$. Поэтому $x_1 < \alpha$.

Таким образом, доказано утверждение.

**Теорема 3.** *Пусть выполнено условие* $|b| < -a$. *Тогда задача* (3), (4) *в пространстве Соболева* $W_2^1(0, +\infty)$ *эквивалентна задаче Коши для ОДУ*

$$u'(t) = x_1 u(t) + f(t), \; t > 0, \tag{10}$$

*с начальным условием* (9).

**Доказательство.** Так как $\omega(0) < 1$, то в силу теоремы 1 задача (7), (9) имеет единственное решение в пространстве $W_2^1(0, +\infty)$. А поскольку $x_1 < 0$, то в пространстве $W_2^1(0, +\infty)$ лежит функция $e^{x_1 t} u_0$, и эта функция является единственным решением задачи (7), (9) из пространства $W_2^1(0, +\infty)$.

Эта же функция и только она является решением задачи Коши для однородного (при $f = 0$) линейного уравнения (10) с начальным условием (9). Поскольку решения однородных уравнений (3) и (10) с начальным (9) совпадают, то в силу представления решения задачи Коши для неоднородного уравнения, полученного методом вариации постоянных, совпадают и решения неоднородных уравнений (3) и (10) с начальным (9).

Таким образом, множества решений задачи (3), (9) и (9), (10) совпадают, что и доказывает теорему 3.

## Предельный переход при $h \to 0$

Пусть выполнены условия $0 < |b| < -a$. Тогда из анализа графиков функций $u = x - a$ и $u = be^{hx}$, пересечение которых определяет вещественные корни уравнения (8), легко заметить, что $x_1 \to (a + b)$ при $h \to 0$. Поэтому $u_0 e^{x_1 t} \to u_0 e^{(a+b)t}$ равномерно на каждом отрезке $[0, T]$, $T > 0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 4.** *Пусть выполнено условие* $|b| < -a$. *Тогда последовательность* $\{u_h\}$ *решений задачи с начальными условиями* (3), (4) *сходится при* $h \to +0$ *равномерно на каждом отрезке* $[0, T]$ *к решению ОДУ* $u'(t) = (a + b)u(t) + f(t)$, $t > 0$.

## Литература

1. *Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Известия вузов. 2015. № 4. С. 17–25.
2. *Акбари Фаллахи А., Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Корректность задачи с начальными условиями для гиперболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами временного аргумента // Дифференциальные уравнения, 2016. Т 52, № 3. С. 352–365.
3. *Власов В.В., Сакбаев В.Ж.* О корректной разрешимости в шкале пространств Соболева некоторых дифференциально-разностных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2001. Т 37, № 9. С. 1194–1202.
4. *Власов В.В., Сакбаев В.Ж.* О корректной разрешимости некоторых дифференциально-разностных уравнений в пространствах Соболева // Математические заметки. Т. 68, № 6. С. 939–942.

5. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Функционально-дифференциальные уравнения и связанные с ними вопросы спектральной теории. Современная математика // Фундаментальные направления. 2008. Т. 30. С. 3–173.
6. *Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // УМН. 1962. Т. 17, № 2. С. 77–164.
7. *Каменский Г.А., Субачевский А.Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. М.: Изд. МАИ, 1992.
8. *Мышкис А.Д.* Смешанные функционально-дифференциальные уравнения. Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 4. С. 5–120.
9. *Йаакбариех А., Сакбаев В.Ж.* Представление формулами Фейнмана полугрупп, порожденных параболическими дифференциально-разностными операторами // Труды МФТИ. 2012. Т. 4, № 4. С. 113–119.

## References

1. *Yaakbarieh A., Sakbaev V.Zh.*Correctness of a problem with initial conditions for parabolic differential-difference equations with shifts of time argument. Proceedings of Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. 2015. N. 4. P. 17–25. (in Russian).
2. *Akbari Fallahi A., Yaakbarieh A., Sakbaev V.Zh.* Well-posedness of a problem with initial conditions for hyperbolic differential-difference equations with shifts in the time argument. Proceedings of Differential Equations. 2016. V. 52, N 3. P. 346–360. (in Russian).
3. *Vlasov V.V. Sakbaev V.Zh.* On the Well-Posed Solvability in the Scale of Sobolev Spaces of Some Differential-Difference Equations. Proceedings of Differential Equations. 2001. V. 37, N 9. P. 1194–1202. (in Russian).
4. *Vlasov V.V. Sakbaev V.Zh.* On the solvability of a certain class of functional-differential equations with advancing argument in Hilbert space. In Some Problems of Fundamental and Applied Mathematics. Collection of Scientific Works. Moscow. 1997. P. 72–82. (in Russian).
5. *Vlasov V.V., Medvedev D.A.* Functional-Differential Equations in Sobolev Spaces and Related Problems in Spectral Theory, Sovr. Mat. Fund. Napravl. Proceedings of 2008. V. 30. P. 3–173. (in Russian).
6. *Zverkin A.M., Kamenskii G.A., Norkin S.B., Elsgolts L.E.* Differential equations with deviating argument. Proceedings of Uspekhi Mat. Nauk. 1962. V. 17, N 2. P. 77–162. (in Russian).
7. *Kamensky G.A., Skubachevskii A.L.* Linear boundary value problems for differential-difference equations. Proceedings of MAI, 1992. (in Russian).
8. *Myshkis A.D.* Mixed Functional-Differential Equations, Sovr. Mat. Fund. Napravl. Proceedings of 2003. V. 4. P. 5–120. (in Russian).
9. *Yaakbarieh A., Sakbaev V.Zh.* On the presentation of semigroups generated by parabolic difference-differential equations by Feynman formulas. Proceedings of MIPT. 2012. V. 4, N 4. P. 113–119. (in Russian).

*Поступила в редакцию 07.03.2016*