БИЛЕТ 15

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

Ответ. $\dfrac{41}{4}$.

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n + 0{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\,(x-n-0{,}5)^2 + c$. Так как $f(n) = 13$, $f(n+2) = 35$, то получаем $\frac{a}{4} + c = 13$, $\frac{9a}{4} + c = 35$, откуда $a = 11$, $c = \frac{41}{4}$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наименьшее значение функции.

2. Решите неравенство $x^2 - 2x + 1 - |x^3 - 1| - 2\,(x^2 + x + 1)^2 \geqslant 0$.

Ответ. $x \in \left[-1; -\dfrac{1}{2}\right]$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$|x-1|^2 - |x-1|\left(x^2+x+1\right) - 2\left(x^2+x+1\right)^2 \geqslant 0.$$

Обозначим здесь $|x-1| = u$, $x^2 + x + 1 = v$ (заметим, что $u \geqslant 0$, $v > 0$, так как v – квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом). Тогда неравенство принимает вид $u^2 - uv - 2v^2 \geqslant 0$. Раскладывая левую часть на множители (например, рассмотрев как квадратичную функцию относительно u и найдя корни), получаем $(u+v)(u-2v) \geqslant 0$. Первый множитель положителен, поэтому $u \geqslant 2v$. Возвращаемся к переменной x:

$$2x^2 + 2x + 2 \leqslant |x-1| \Leftrightarrow \left(2x^2+2x+2\right)^2 - (x-1)^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(2x^2+3x+1\right)\left(2x^2+x+3\right) \leqslant 0$$

Второй множитель положителен, поэтому остаётся $2x^2 + 3x + 1 \leqslant 0$, откуда $-1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}$.

3. В треугольник ABC вписаны два *равных* прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 – на стороне AC). Известно, что $PS = 12$, $P_1S_1 = 3$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ. $\dfrac{225}{2}$.

Решение. Проведём высоту BF треугольника ABC. Пусть она пересекает отрезки PQ и P_1Q_1 в точках H и M соответственно. Заметим, что $HM = 9$. Из подобия треугольников BPQ и BP_1Q_1 следует, что $\frac{BH}{PQ} = \frac{BM}{P_1Q_1}$ (записано отношение высоты к основанию), откуда $\frac{BH}{3} = \frac{9+BH}{1}2$, $BH = 3$. Значит, площадь треугольника BPQ равна $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Но треугольники ABC и BPQ подобны (коэффициент подобия равен $BF : BH = 15 : 3 = 5$), следовательно, площадь треугольника ABC равна $25 \cdot \frac{9}{2} = \frac{225}{2}$.

4. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих равенству $x^2 + xy = 30\,000\,000$.

Ответ. 256.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $x(x+y) = 3 \cdot 2^7 \cdot 5^7$. Тогда если $x > 0$, то x является одним из делителей правой части. Всего у правой части $2 \cdot 8 \cdot 8 = 128$ делителей (так как любой делитель представи́м в виде $3^a \cdot 2^b \cdot 5^c$, где a, b и c – целые неотрицательные числа, не превосходящие соответственно 1, 7 и 7, т.е. есть 2 способа выбрать a, 8 способов выбрать b и 8 способов выбрать c). Заметим, что если правая часть делится на x, то тогда автоматически выходит, что $y \in \mathbb{Z}$, и при этом y находится однозначно. Следовательно, всего есть $2 \cdot 128 = 256$ пары чисел.

5. Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 70$, $1 \leqslant b \leqslant 50$, и при этом

 © МФТИ, 2017

площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\geqslant 1, \\ x\leqslant a, \\ y\leqslant b, \end{cases}$$

такова, что число $2S$ кратно 5.

Ответ. 1260.

Решение. Данная система неравенств задаёт на плоскости треугольник с вершинами $(a;0)$, $(0;b)$ и $(a;b)$. Этот треугольник прямоугольный, его удвоенная площадь равна произведению катетов, т.е. ab. По условию $ab\,\vdots\,5$, поэтому одно из чисел a или b должно делиться на 5.

При указанных ограничениях есть 14 значений a и 10 значений b, кратных 5. Значит, существует $14\cdot 50=700$ пар $(a;b)$ таких, что $a\,\vdots\,5$ и $10\cdot 70=700$ пар таких, что $b\,\vdots\,5$. Кроме того, есть $14\cdot 10=140$ пар таких, что оба числа a и b делятся на 5. Тогда всего искомых пар $700+700-140=1260$.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB=3$, $AC=4$, $\angle BAC=60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

Ответ. $S_{\triangle OA_2C}=\dfrac{13\sqrt{3}}{12}$; $S_{\triangle A_1A_2C}=\dfrac{13\sqrt{3}}{21}$.

Решение. По теореме косинусов для треугольника ABC находим, что $BC^2=16+9-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=13$, $BC=\sqrt{13}$. Тогда по теореме синусов радиус окружности R равен $\frac{BC}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$. Угол A_2OC – центральный, поэтому он вдвое больше угла A_2AC, который по условию равен 30°, поэтому $\angle A_2OC=60^\circ$. Тогда площадь треугольника OA_2C равна $\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot R^2=\frac{13}{4\sqrt{3}}$.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $A_1C:A_1B=AC:AB=4:3$, откуда $A_1C=\frac{4}{7}BC=\frac{4}{7}\sqrt{13}$. Треугольник OA_2C – равносторонний, поэтому $A_2C=R$. Углы A_2CA_1 и A_2AB равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, поэтому $\angle A_2CA_1=30^\circ$. Значит, $S_{A_1A_2C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}\sqrt{13}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\cdot\sin 30^\circ=\frac{13}{7\sqrt{3}}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 3|y|-4|x|=6, \\ x^2+y^2-14y+49-a^2=0 \end{cases}$$

а) имеет ровно 3 решения; б) имеет ровно 2 решения.

Ответ. а) $|a|\in\{5;9\}$; b) $|a|\in\{3\}\cup(5;9)$.

Решение. Первое уравнение системы не меняется при замене x на $-x$ и/или y на $-y$. Следовательно, множество точек, задаваемых первым уравнением симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти получаем часть прямой $y=2+\frac{4}{3}x$ – луч с началом в точке $(0;2)$ и угловым коэффициентом $\frac{4}{3}$. Используя симметрию множества относительно координатных осей, получаем 2 угла: один с вершиной в точке $A(0;2)$ с ветвями вверх, а другой – с вершиной $C(0;-2)$ и ветвями вниз (угловые коэффициенты сторон угла равны $\pm\frac{4}{3}$).

Второе уравнение системы может быть записано в виде $x^2+(y-7)^2=a^2$. Оно задаёт окружность с центром $Q(0;7)$ радиуса $|a|$ (или точку Q, если $a=0$). При $a=0$ решений нет, так что рассмотрим случай окружности.

а) И окружность, и множество точек, задаваемых первым уравнением, симметричны относительно оси ординат, следовательно 3 решения возможны только в том случае, когда одна из их общих точек лежит на оси ординат. Это происходит, если радиус окружности равен отрезку QA или отрезку QC, т.е. $|a|=5$ или $|a|=9$. Несложно видеть, что при этих a окружность имеет ещё две общие точки со сторонами угла, лежащего в верхней полуплоскости, и всего у системы получается 3 решения. Тогда $a=\pm 5$ или $a=\pm 9$.

 © МФТИ, 2017

б) Пусть R_0 – радиус той окружности, которая касается сторон угла с вершиной A. Система имеет два решения при $|a| \in \{R_0\} \cup (QA;\, QC)$.

Опустим из точки Q перпендикуляр QH на сторону угла, лежащую в первой четверти. Пусть α – угол наклона прямой AH ($\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$). Тогда $\angle QAH = 90^\circ - \alpha$, $\angle AQH = \alpha$. Так как $QH = R_0$, то $AH = QH \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}R_0$ и по теореме Пифагора для треугольника AQH получаем $R_0^2 + \frac{16}{9}R_0^2 = 25$, откуда $R_0 = 3$. Значит, $|a| \in \{3\} \cup (5; 9)$.

© МФТИ, 2017

БИЛЕТ 16

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 14 и 14. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

Ответ. 15.

Решение. Пусть n, $n+1$, $n+2$ – три данные последовательные значения аргумента. Поскольку квадратичная функция принимает одинаковые значения в точках, симметричных относительно абсциссы вершины параболы $x_{\text{в}}$, то $x_{\text{в}} = n + 1{,}5$, а значит, $f(x)$ может быть представлена в виде $f(x) = a\left(x - n - 1{,}5\right)^2 + c$. Так как $f(n) = 6$, $f(n+1) = 14$, то получаем $\frac{9}{4}a + c = 6$, $\frac{a}{4} + c = 14$, откуда $a = -4$, $c = 15$. Но $c = f(x_{\text{в}})$ и есть наибольшее значение функции.

2. Решите неравенство $x^2 + 2x + 1 - |x^3 + 1| - 2\left(x^2 - x + 1\right)^2 \leqslant 0$.

Ответ. $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$|x+1|^2 - |x+1|\left(x^2 - x + 1\right) - 2\left(x^2 - x + 1\right)^2 \leqslant 0.$$

Обозначим здесь $|x+1| = u$, $x^2 - x + 1 = v$ (заметим, что $u \geqslant 0$, $v > 0$, так как v – квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом). Тогда неравенство принимает вид $u^2 - uv - 2v^2 \leqslant 0$. Раскладывая левую часть на множители (например, рассмотрев как квадратичную функцию относительно u и найдя корни), получаем $(u+v)(u-2v) \leqslant 0$. Первый множитель положителен, поэтому $u \leqslant 2v$. Возвращаемся к переменной x:

$$2x^2 - 2x + 2 \geqslant |x+1| \Leftrightarrow \left(2x^2 - 2x + 2\right)^2 - (x+1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \left(2x^2 - 3x + 1\right)\left(2x^2 - x + 3\right) \geqslant 0$$

Второй множитель положителен, поэтому остаётся $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$, откуда $x \leqslant \frac{1}{2}$ или $x \geqslant 1$.

3. В треугольник ABC вписаны два *равных* прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 – на стороне AC). Известно, что $PS = 3$, $P_1S_1 = 9$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ. 72.

Решение. Проведём высоту BF треугольника ABC. Пусть она пересекает отрезки PQ и P_1Q_1 в точках H и M соответственно. Заметим, что $HM = 6$. Из подобия треугольников BPQ и BP_1Q_1 следует, что $\frac{BH}{PQ} = \frac{BM}{P_1Q_1}$ (записано отношение высоты к основанию), откуда $\frac{BH}{3} = \frac{6+BH}{9}$, $BH = 3$. Значит, площадь треугольника BPQ равна $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}$. Но треугольники ABC и BPQ подобны (коэффициент подобия равен $BF : BH = 12 : 3 = 4$), следовательно, площадь треугольника ABC равна $16 \cdot \frac{9}{2} = 72$.

4. Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих равенству $y^2 - xy = 700\,000\,000$.

Ответ. 324.

Решение. Раскладывая левую и правую части уравнения на множители, получаем $y(y - x) = 7 \cdot 2^8 \cdot 5^8$. Тогда если $y > 0$, то y является одним из делителей правой части. Всего у правой части $2 \cdot 9 \cdot 9 = 162$ делителя (так как любой делитель представи́м в виде $7^a \cdot 2^b \cdot 5^c$, где a, b и c – целые неотрицательные числа, не превосходящие соответственно 1, 8 и 8, т.е. есть 2 способа выбрать a, 9 способов выбрать b и 9 способов выбрать c). Заметим, что если правая часть делится на y, то тогда автоматически выходит, что $x \in \mathbb{Z}$, и при этом x находится однозначно. Следовательно, всего есть $2 \cdot 162 = 324$ пары чисел.

5. Найдите количество пар целых чисел $(a; b)$ таких, что $1 \leqslant a \leqslant 80$, $1 \leqslant b \leqslant 30$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \geqslant 1, \\ x \leqslant a, \\ y \leqslant b, \end{cases}$$

 © МФТИ, 2017

такова, что число $2S$ кратно 5.

Ответ. 864.

Решение. Данная система неравенств задаёт на плоскости треугольник с вершинами $(a;0)$, $(0;b)$ и $(a;b)$. Этот треугольник прямоугольный, его удвоенная площадь равна произведению катетов, т.е. ab. По условию $ab \vdots 5$, поэтому одно из чисел a или b должно делиться на 5.

При указанных ограничениях есть 16 значений a и 6 значений b, кратных 5. Значит, существует $16 \cdot 30 = 480$ пар $(a;b)$ таких, что $a \vdots 5$ и $6 \cdot 80 = 480$ пар таких, что $b \vdots 5$. Кроме того, есть $16 \cdot 6 = 96$ пар таких, что оба числа a и b делятся на 5. Тогда всего искомых пар $480 + 480 - 96 = 864$.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle BAC = 60°$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C. (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

Ответ: $S_{OA_2C} = \dfrac{7}{\sqrt{3}}$; $S_{A_1A_2C} = \dfrac{7\sqrt{3}}{5}$.

Решение. По теореме косинусов для треугольника ABC находим, что $BC^2 = 16+36-2\cdot\frac{1}{2}\cdot6\cdot4 = 28$, $BC = \sqrt{28}$. Тогда по теореме синусов радиус окружности R равен $\frac{BC}{2\sin 60°} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}}$. Угол A_2OC – центральный, поэтому он вдвое больше угла A_2AC, который по условию равен $30°$, поэтому $\angle A_2OC = 60°$. Тогда площадь треугольника OA_2C равна $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot R^2 = \frac{7}{\sqrt{3}}$.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам, поэтому $A_1C : A_1B = AC : AB = 6 : 4$, откуда $A_1C = \frac{3}{5}BC = \frac{3}{5}\sqrt{28}$. Треугольник OA_2C – равносторонний, поэтому $A_2C = R$. Углы A_2CA_1 и A_2AB равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, поэтому $\angle A_2CA_1 = 30°$. Значит, $S_{A_1A_2C} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}\sqrt{28} \cdot \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}} \cdot \sin 30° = \frac{7\sqrt{3}}{5}$.

7. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} 5|x| - 12|y| = 5, \\ x^2 + y^2 - 28x + 196 - a^2 = 0 \end{cases}$$

а) имеет ровно 3 решения; б) имеет ровно 2 решения.

Ответ. а) $|a| \in \{13; 15\}$; b) $|a| \in \{5\} \cup (13; 15)$.

Решение. Первое уравнение системы не меняется при замене x на $-x$ и/или y на $-y$. Следовательно, множество точек, задаваемых первым уравнением симметрично относительно обеих осей координат. В первой четверти получаем часть прямой $y = \frac{5x}{12} - \frac{5}{12}$ – луч с началом в точке $(1; 0)$ и угловым коэффициентом $\frac{5}{12}$. Используя симметрию множества относительно координатных осей, получаем 2 угла: один с вершиной в точке $A(1;0)$ с ветвями вправо, а другой – с вершиной $C(-1;0)$ и ветвями влево (угловые коэффициенты сторон угла равны $\pm\frac{5}{12}$).

Второе уравнение системы может быть записано в виде $(x-14)^2+y^2 = a^2$. Оно задаёт окружность с центром $Q(14; 0)$ радиуса $|a|$ (или точку Q, если $a = 0$). При $a = 0$ решений нет, так что рассмотрим случай окружности.

а) И окружность, и множество точек, задаваемых первым уравнением, симметричны относительно оси абсцисс, следовательно 3 решения возможны только в том случае, когда одна из их общих точек лежит на оси абсцисс. Это происходит, если радиус окружности равен отрезку QA или отрезку QC, т.е. $|a| = 13$ или $|a| = 15$. Несложно видеть, что при этих a окружность имеет ещё две общие точки со сторонами угла, лежащего в правой полуплоскости, и всего у системы получается 3 решения. Тогда $a = \pm13$ или $a = \pm15$.

б) Пусть R_0 – радиус той окружности, которая касается сторон угла с вершиной A. Система имеет два решения при $|a| \in \{R_0\} \cup (QA;\, QC)$.

Опустим из точки Q перпендикуляр QH на сторону угла, лежащую в первой четверти. Пусть α – угол наклона прямой AH ($\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{12}$). Тогда $\angle QAH = \alpha$. Так как $QH = R_0$, то $AH = \frac{QH}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{12}{5}R_0$ и по теореме Пифагора для треугольника AQH получаем $R_0^2 + \frac{144}{25}R_0^2 = 169$, откуда $R_0 = 5$. Значит, $|a| \in \{5\} \cup (13; 15)$.

© МФТИ, 2017