

УДК 519.216.5

В. С. Спивак, А. Г. Тартаковский

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Анализ взвешенной процедуры Ширяева–Робертса в задаче обнаружения разладки для моделей с неизвестными параметрами после разладки

Рассматривается задача обнаружения изменения свойств случайного процесса (разладки) с неизвестными после изменения параметрами случайного процесса. В данной задаче в качестве наблюдаемого случайного процесса рассматриваются две модели: гауссовский процесс и процесс авторегрессии 1 порядка. В работе предлагается алгоритм обнаружения разладки для моделей с неизвестными параметрами после разладки: взвешенная процедура Ширяева–Робертса. Такой подход позволяет эффективно решать множество задач, встречающихся на практике, когда на самом деле до конца неизвестны свойства случайного процесса после разладки. Проведены исследования характеристик обнаружения для взвешенной процедуры Ширяева–Робертса и сравнены с характеристиками обнаружения процедуры Ширяева–Робертса, когда параметры случайного процесса после разладки известны. Анализ показал, что использование взвешенной процедуры Ширяева–Робертса позволяет обнаруживать разладку с заданным уровнем ложных обнаружений, при этом не проигрывать существенно характеристикам указанной процедуры, когда параметры случайного процесса после разладки известны.

Ключевые слова: обнаружение момента изменения, процедура Ширяева–Робертса, гауссовский процесс, процесс авторегрессии 1 порядка, метод Монте-Карло.

V. S. Spivak, A. G. Tartakovsky

Moscow Institute of Physics and Technology

Analysis of the weighted Shiryaev–Roberts procedure in the problem of changepoint detection for models with unknown post change parameters

A problem of detecting a change in the properties of a random process (disorder) with unknown post change parameters is considered. In this problem, two models of an observable random process are considered: a Gaussian process and an autoregressive process of the first order. In this paper, we propose a changepoint detection algorithm for models with unknown post change parameters, viz. the weighted Shiryaev–Roberts procedure. This approach makes it possible to effectively solve many problems encountered in practice when the properties of a random process after the changepoint are not fully known. Analysis of detection characteristics for the weighted Shiryaev–Roberts procedure is carried out and compared with the detection characteristics of the Shiryaev–Roberts procedure, when the post changes of the parameters of the random process are known. The results show that the use of the weighted Shiryaev–Roberts procedure allows for detecting the changepoint with a given level of false detections, while not losing significantly to the characteristics of the Shiryaev–Roberts procedure, when the parameters of the random process after the changepoint are known.

Key words: changepoint detection, Shiryaev–Roberts procedure, Gaussian process, autoregressive process of the first order, Monte Carlo.

1. Введение

В работе [1] рассматривалась задача последовательного обнаружения разладки — изменения свойств случайного процесса, в которой его свойства были известны до и после разладки. Практический интерес вызывает задача, когда свойства случайного процесса после разладки до конца неизвестны. В такой задаче для обнаружения разладки логично применить взвешенные процедуры обнаружения разладки (это процедуры, в которых учитывается вероятностное пространство, элементарные события которого — случайный процесс после разладки с определенными свойствами, и задана вероятность наступления соответствующего элементарного события).

Напомним, задача последовательного обнаружения разладки — пока наблюдение за случайным процессом соответствует ожидаемому, следует продолжать наблюдение и обнаруживать изменение (разладку) как можно скорее после разладки. В работе [1] было показано, что в байесовской постановке (момент разладки — неизвестная и случайная величина) процедура Ширяева–Робертса показывает схожие характеристики с оптимальной процедурой Ширяева, но, в отличие от нее, не использует априорное распределение момента разладки. По этой причине процедура Ширяева–Робертса больше подходит для решения практических задач. В другой работе [2] было показано, что взвешенная процедура Ширяева–Робертса асимптотически оптимальна в классе процедур с заданным уровнем максимальной условной вероятностью ложной тревоги, а также в минимаксной постановке (момент разладки — неизвестная, но неслучайная величина). Поэтому интересно исследовать, насколько сильно в различных постановках проигрывает взвешенная процедура Ширяева–Робертса, настроенная на несколько возможных параметров случайного процесса после разладки, процедуре Ширяева–Робертса, настроенной на известные свойства случайного процесса после разладки.

В данной работе используются две модели наблюдаемого случайного процесса: гауссовский процесс и процесс авторегрессии 1 порядка. Для первой модели рассмотрим байесовский подход, а для второй модели рассмотрим минимаксный подход. На рис. 1 представлен процесс авторегрессии 1 порядка и взвешенная процедура обнаружения разладки, состоящая из взвешенной суммы трех процедур, настроенных на различные параметры случайного процесса после разладки.

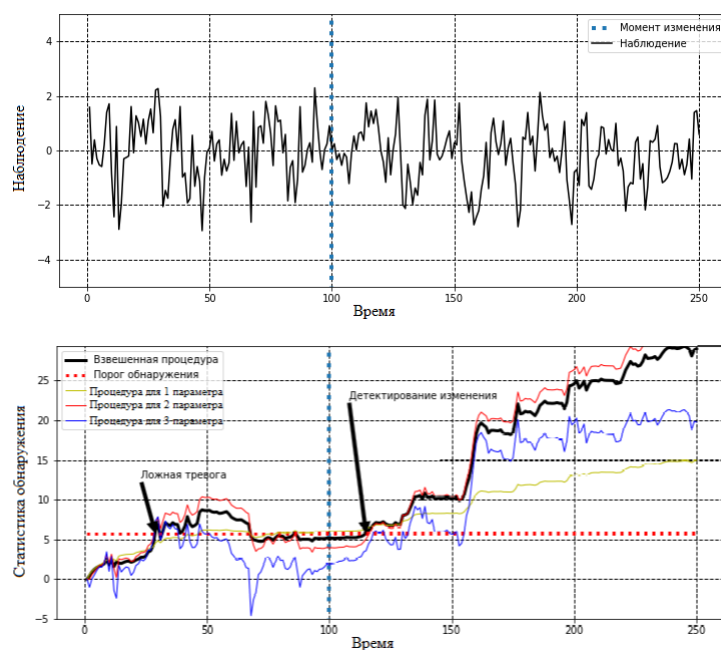


Рис. 1. Пример задачи обнаружения разладки взвешенной процедурой Ширяева–Робертса

2. Модель

Пусть $\{X_n\}$ — наблюдаемый процесс, где $n = \{0, 1, 2, \dots\}$. До изменения он описывается распределением P_∞ , после изменения — P_0 . В байесовской постановке изменение происходит в неизвестный и случайный момент времени ν , $\nu \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Обозначим $p_j(\mathbf{X}^n)$, $j = \infty, 0$ — плотность распределения P_j^n , где $\mathbf{X}^n = (X_1, \dots, X_n)$. Тогда, если зафиксирован момент изменения $\nu \in Z_+$, плотность $p_\nu(\mathbf{X}^n) = p(\mathbf{X}^n|\nu)$ является комбинацией плотностей до и после момента изменения:

$$\begin{aligned} p_\nu(\mathbf{X}^n) &= p_\infty(\mathbf{X}^\nu) \cdot p_0(\mathbf{X}_{\nu+1}^n|\mathbf{X}^\nu) = \\ &= \prod_{i=1}^{\nu} p_\infty(X_i|\mathbf{X}^{i-1}) \cdot \prod_{i=\nu+1}^n p_0(X_i|\mathbf{X}^{i-1}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{X}_i^n = (X_i, \dots, X_n)$ и $p_j(X_n|\mathbf{X}^{n-1})$ — условная плотность X_n при условии \mathbf{X}^{n-1} . Пусть ν — порядковый номер последнего наблюдения перед изменением.

Как было упомянуто выше, в данной задаче (для гауссовской модели) рассматривается байесовская постановка: постановка задачи, когда момент изменения — случайная величина, независимая от наблюдений, с априорным распределением вероятности $\pi_k = P(\nu = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Как и в [1] будем считать, что момент изменения ν получается из геометрического распределения

$$P(\nu = k) = \rho(1 - \rho)^k \quad \text{для } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $0 < \rho < 1$.

Процедура обнаружения разладки представляет собой время останова T для наблюдаемого процесса $\{X_n\}$. Когда $T \leq \nu$, это означает, что произошла ложная тревога. Хорошая процедура обнаружения гарантирует при низком уровне ложной тревоги маленькую задержку в обнаружении $T - \nu$.

В байесовской постановке риск, связанный с задержкой обнаружения, измеряется средней задержкой обнаружения [3]:

$$ADD(T) = E^\pi[T - \nu|T > \nu] = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k E_k[T - k|T > k] P_\infty(T > k)}{1 - PFA(T)}, \quad (3)$$

а риск ложной тревоги измеряется как взвешенная вероятность ложной тревоги [3]:

$$PFA(T) = P^\pi(T \leq \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k P_\infty(T \leq k), \quad (4)$$

где P_k и E_k — вероятность и соответствующее ей ожидание момента изменения $\nu = k \in Z_+$.

Для модели авторегрессии 1 порядка рассматривается минимаксный подход: подход, когда момент изменения — неизвестная и неслучайная величина [3]. В минимаксной постановке, риск, связанный с риском ложного срабатывания, оценивается максимальной локальной условной вероятностью ложной тревоги:

$$LCPFA(T) = \sup_{1 \leq k \leq k^* - m^*} P_\infty(T > k + m^*|T \geq k). \quad (5)$$

В минимаксной постановке считается максимальная средняя задержка обнаружения ADD в определенном окне.

3. Процедуры обнаружения

Если « $H_k : \nu = k$ » и « $H_\infty : \nu = \infty$ » — гипотезы, что разладка наступает в момент времени $0 \leq k < \infty$ и что разладка не наступает никогда, тогда получаем отношение правдоподобия между гипотезами, используя (1):

$$\begin{aligned} LR_{k,n} &= \frac{p_k(\mathbf{X}^n)}{p_\infty(\mathbf{X}^n)} = \frac{p_\infty(\mathbf{X}^k) \cdot p_0(\mathbf{X}_{k+1}^n | \mathbf{X}^k)}{p_\infty(\mathbf{X}^n)} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^k p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) \cdot \prod_{i=k+1}^n p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}{\prod_{i=1}^n p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1})} = \\ &= \prod_{i=k+1}^n \frac{p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}{p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1})}, \quad k < n. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{L}_i = p_0(X_i | \mathbf{X}^{i-1}) / p_\infty(X_i | \mathbf{X}^{i-1})$. Тогда из [4] статистика Ширяева–Робертса будет считаться:

$$R_n = \sum_{k=1}^n \prod_{i=k}^n \mathcal{L}_i = (1 + R_{n-1}) \mathcal{L}_n, \quad n \geq 1, \quad R_0 = 0. \quad (6)$$

Время остановки процедуры Ширяева–Робертса:

$$T_A = \inf\{n \geq 1 : R_n \geq A\}, \quad A > 0, \quad (7)$$

где A — порог.

Для взвешенной процедуры Ширяева–Робертса необходима статистика, настроенная на каждый из возможных после разладки параметров наблюдения θ_j [5]:

$$R_n(\theta_j) = (1 + R_{n-1}(\theta_j)) \mathcal{L}_n(\theta_j), \quad n \geq 1, \quad R_0 = 0. \quad (8)$$

С учетом веса (вероятности) принять каждый из параметров наблюдения θ_j после разладки, получается взвешенная статистика Ширяева–Робертса:

$$R_n^w = \sum_{j=i}^N W(\theta_j) R_n(\theta_j),$$

где $W(\theta)$ — функция распределения θ .

Тогда время остановки для взвешенной процедуры Ширяева–Робертса записывается как:

$$T_B = \inf\{n \geq 1 : R_n^w \geq B\}, \quad B > 0, \quad (9)$$

где B — порог.

В данной работе неизвестным параметром после разладки будем считать среднее θ . Также будем считать, что каждое из возможных значений среднего θ_j равновероятно, для каждого значения θ_j значение функции распределения будет $W(\theta_j) = \frac{1}{N_\theta}$, где N_θ — число значений θ_j .

4. Гауссовская модель

Процесс наблюдения $\{X_n\}$ гауссовской модели удовлетворяет гауссову распределению $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ до разладки и $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ после:

$$X_n = \theta \mathbb{1}_{\{n > \nu\}} + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad (10)$$

Отношение правдоподобия, используемое в (6) и (8), в этом случае:

$$\mathcal{L}_n = \exp \left\{ \frac{\theta}{\sigma^2} X_n - \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Отношение сигнал–шум определяется как $I = \theta^2/2\sigma^2$, $\sigma^2 = 1$.

Для оценки характеристик процедур обнаружения в данной задаче, будем использовать метод Монте-Карло. Для каждого прогона Монте-Карло мы симулируем двойную стохастическую модель: (X_n, ν) — наблюдение согласно (10) и момент изменения согласно (2). В каждом i -м, $i = 1, \dots, N$, прогоне Монте-Карло находится время остановки T_i для обычной (7) и взвешенной (9) процедур Ширяева–Робертса. Считается, что в конкретном i -м прогоне Монте-Карло $i = 1, \dots, N$ происходит ложная тревога, если $T_i < \nu_i$.

Оценка вероятности ложной тревоги (4):

$$\widehat{PFA}(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{T_i < \nu_i\}}.$$

Оценка Монте-Карло средней задержки обнаружения (3):

$$\widehat{ADD}(T) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_i - \nu_i) \mathbb{1}_{\{T_i \geq \nu_i\}} \frac{1}{1 - \widehat{PFA}(T)}.$$

Число прогонов Монте-Карло $N = \frac{1}{\Delta\alpha}$, где Δ — это точность, а α — ограничение для частоты возникновения ложных тревог.

4.1. Результаты компьютерного моделирования

Напомним, для исследования была выбрана процедура Ширяева–Робертса, поскольку, как показано в [1], она показывает почти такие же характеристики, как и оптимальная в байесовской постановке процедура Ширяева, но при этом не использует априорное распределение момента разладки. По этой причине процедура Ширяева–Робертса является более удачной с точки зрения практической применимости. Метод Монте-Карло позволяет получить характеристики процедур обнаружения с высокой точностью.

Параметры симуляций.

- 1) Отношение сигнал–шум после разладки $I = 0.5; 0.245; 0.125$, т.е. среднее после разладки $\theta = 1.0; 0.7; 0.5$;
- 2) Параметры геометрического распределения: $\rho = 0.2; 0.1; 0.05$.
- 3) Верхняя граница PFA : $\alpha = 0.1; 0.05; 0.01$.
- 4) Сетка параметров для процедуры взвешенного среднего: $\theta_6 = \{-1.0; -0.6; -0.2; 0.2; 0.6; 1.0\}$, $\theta_{20} = \{-1.0; -0.9; -0.8; \dots 0.8; 0.9; 1.0\}$ — с пропуском 0.

В табл. 1–3 приведены сравнительные характеристики процедуры Ширяева–Робертса, настроенной на известные после разладки параметры и взвешенной процедуры Ширяева–Робертса, настроенной на 6 и на 20 возможных параметров наблюдения после разладки. Из этих исследований мы делаем следующие выводы:

- 1) Как и ожидалось, процедура Ширяева–Робертса, настроенная на известные после разладки параметры, работает лучше, чем взвешенные процедуры Ширяева–Робертса, настроенные на несколько возможных после разладки параметров. Однако этот проигрыш в задержке обнаружения не является очень большим (не более 20%).
- 2) Как и ожидалось, проигрыш в задержке обнаружения взвешенными процедурами обнаружения, настроенных на несколько возможных параметров после разладки, относительно процедуры Ширяева–Робертса, настроенной на известные параметры после разладки, увеличивается с уменьшением отношения сигнал–шум I .
- 3) Взвешенная процедура Ширяева–Робертса, настроенная на 6 возможных параметров после разладки, когда один из этих шести является реальным, демонстрирует характеристики обнаружения немного лучше, чем взвешенная процедура Ширяева–Робертса, настроенная на 20 возможных параметров, но начинает ей проигрывать, когда реальный параметр близок, но в точности не равен ни одному из шести возможных параметров после разладки в

отличие от взвешенной процедуры Ширяева–Робертса, которая настроена на 20 возможных параметров после разладки, среди которых есть реальный.

Т а б л и ц а 1

Характеристики процедур обнаружения для гауссовской модели наблюдения,
 $\rho = 0.2$

$\rho = 0.2$							
I	α	PFA	PFA_6^W	PFA_{20}^W	ADD	ADD_6^W	ADD_{20}^W
0.500	0.1	0.09464	0.09471	0.09431	3.57	4.39	4.42
0.500	0.05	0.04762	0.04732	0.04718	4.46	5.31	5.33
0.500	0.01	0.00980	0.00983	0.00975	6.70	7.48	7.49
0.245	0.1	0.09373	0.09240	0.09154	4.80	6.00	5.96
0.245	0.05	0.04638	0.04697	0.04720	6.22	7.58	7.47
0.245	0.01	0.00967	0.00993	0.00951	9.70	11.46	11.28
0.125	0.1	0.09486	0.09454	0.09471	5.84	7.49	7.38
0.125	0.05	0.04908	0.04773	0.04708	7.66	10.22	9.90
0.125	0.01	0.00932	0.00989	0.00942	12.92	17.02	16.44

Т а б л и ц а 2

Характеристики процедур обнаружения для гауссовской модели наблюдения,
 $\rho = 0.1$

$\rho = 0.1$							
I	α	PFA	PFA_6^W	PFA_{20}^W	ADD	ADD_6^W	ADD_{20}^W
0.500	0.1	0.09094	0.09171	0.09104	4.90	5.96	6.02
0.500	0.05	0.04838	0.04708	0.04682	5.91	7.06	7.09
0.500	0.01	0.00972	0.00958	0.00970	8.55	9.66	9.67
0.245	0.1	0.09717	0.09850	0.09866	6.96	8.65	8.62
0.245	0.05	0.04703	0.04900	0.04847	8.95	10.75	10.68
0.245	0.01	0.00936	0.00953	0.00946	13.54	15.83	15.53
0.125	0.1	0.09504	0.09793	0.09763	9.35	12.21	12.00
0.125	0.05	0.04841	0.04812	0.04883	12.18	15.94	15.61
0.125	0.01	0.00923	0.00954	0.00944	19.64	25.44	24.50

Т а б л и ц а 3

Характеристики процедур обнаружения для гауссовской модели наблюдения,
 $\rho = 0.05$

$\rho = 0.05$							
I	α	PFA	PFA_6^W	PFA_{20}^W	ADD	ADD_6^W	ADD_{20}^W
0.500	0.1	0.09203	0.09202	0.09167	6.26	7.52	7.60
0.500	0.05	0.04694	0.04562	0.04521	7.47	8.82	8.90
0.500	0.01	0.00985	0.00953	0.00950	10.29	11.66	11.75
0.245	0.1	0.09336	0.09200	0.09313	9.65	11.86	11.73
0.245	0.05	0.04607	0.04501	0.04573	11.96	14.32	14.19
0.245	0.01	0.00910	0.00932	0.00942	17.34	19.85	19.56
0.125	0.1	0.09138	0.09223	0.09189	13.98	18.16	17.83
0.125	0.05	0.04610	0.04523	0.04574	17.69	22.78	22.22
0.125	0.01	0.00935	0.00929	0.00949	26.66	33.61	32.50

5. Модель авторегрессии 1 порядка

Процесс наблюдения $\{X_n\}$ модели авторегрессии 1 порядка удовлетворяет следующему выражению:

$$X_n = \theta \mathbb{1}_{\{n > \nu\}} X_{n-1} + \xi_n, \quad n \geq 1, X_0 = 0, \quad (11)$$

где ξ_n — гауссовский шум с единичной дисперсией.

Из [5] отношение правдоподобия, используемое в (6) и (8), в этом случае:

$$\mathcal{L}_n = \exp \left\{ \theta X_n X_{n-1} - \frac{\theta^2 X_{n-1}^2}{2} \right\}.$$

Отношение сигнал–шум в этом случае: $I = \frac{\theta^2}{2(1-\theta^2)}$.

Для оценки характеристик процедур обнаружения в данной задаче будем использовать метод Монте-Карло. Так как мы рассматриваем минимаксный подход, момент изменения ν — фиксированное число. Для каждого прогона Монте-Карло мы симулируем наблюдение X_n^i согласно (11), а также находим время остановки T_i для обычной (7) и взвешенной (9) процедур Ширяева–Робертса. Оценка локальной условной вероятности ложной тревоги (5):

$$\begin{aligned} \widehat{LCPFA}(T) &= \sup_{1 \leq k \leq k^* - m^*} P_\infty(T < k + m^* | T \geq k) = \\ &= \sup_{1 \leq k \leq k^* - m^*} \frac{P_\infty(k \leq T < k + m^*)}{P_\infty(T \geq k)} = \\ &= \sup_{1 \leq k \leq k^* - m^*} \frac{N_{k, k+m^*}}{N} \cdot \frac{N}{N_k} = \sup_{1 \leq k \leq k^* - m^*} \frac{N_{k, k+m^*}}{N_k}, \end{aligned}$$

где $N_{k, k+m^*}$ — количество прогонов Монте-Карло, в которых время остановки T_i попадает в интервал $[k; k+m^*)$, а N_k — количество прогонов Монте-Карло, в которых время остановки $T_i \geq k$.

5.1. Результаты компьютерного моделирования

Выбор порога для процедур обнаружения.

Для того, чтобы обеспечить $\widehat{LCPFA}(T) \leq \beta$, выбираем порог, как в [5]

$$A_\beta = \frac{1 - \alpha}{\zeta \alpha},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\beta(1 - \zeta)^{k^*}}{1 + \beta}; \\ \zeta &= \frac{1}{(1 + |\log \beta|)H}. \end{aligned}$$

где, в свою очередь, $k^* = H \cdot m^*$, а $m^* = |\log \beta|(1 + |\log \beta|)$.

Параметры симуляций.

- 1) $H = 1.2$.
- 2) Отношение сигнал–шум после разладки $I = 2.132; 0.889; 0.48; 0.281; 0.167; 0.095$, т.е. среднее после разладки $\theta = 0.9; 0.8; 0.7; 0.6; 0.5; 0.4$.
- 3) Момент изменения $\nu = 0; 10$.
- 4) Верхняя граница PFA : $\beta = 0.01$.
- 5) Сетка параметров для процедуры взвешенного среднего:
 $\theta_{18} = \{-0.9; -0.8; -0.7; \dots 0.7; 0.8; 0.9\}$ — с пропуском 0.

Результаты симуляций Монте-Карло представлены в табл. 4. Из этих исследований мы делаем следующие выводы:

- 1) Для относительно больших значений сигнал–шум после изменения правило Ширяева–Робертса лишь незначительно превосходит взвешенную процедуру Ширяева–Робертса, но с уменьшением эта разница увеличивается.
- 2) Как и ожидалось, наихудший момент изменения $\nu = 0$.

Т а б л и ц а 4

Характеристики процедур обнаружения для модели наблюдения авторегрессии 1 порядка

$\nu = 0; \beta = 0.01$				
I	$LCPFA$	$LCPFA_{18}^W$	ADD	ADD_{18}^W
2.132	0.0080	0.0079	11.08	11.74
0.889	0.0073	0.0073	13.72	14.72
0.480	0.0070	0.0071	17.52	18.97
0.281	0.0065	0.0065	23.15	25.32
0.167	0.0049	0.0049	31.84	36.35
0.095	0.0024	0.0025	45.88	59.57
$\nu = 10; \beta = 0.01$				
I	$LCPFA$	$LCPFA_{18}^W$	ADD	ADD_{18}^W
2.132	0.0080	0.0079	9.62	10.05
0.889	0.0073	0.0073	11.98	12.72
0.480	0.0070	0.0071	15.30	16.59
0.281	0.0065	0.0065	20.34	22.55
0.167	0.0049	0.0049	28.01	32.96
0.095	0.0024	0.0025	40.83	55.34

6. Заключение

Было проведено исследование характеристик обнаружения взвешенной процедуры Ширяева–Робертса для задачи с неизвестным параметром наблюдения после разладки. Характеристики взвешенной процедуры Ширяева–Робертса сравнивались с характеристиками процедуры Ширяева–Робертса, настроенной на известные после разладки параметры. Критерием качества для сравнения служила средняя задержка обнаружения при ограниченной вероятности ложной тревоги (модель гауссовского наблюдения) и при ограниченной локальной условной вероятности ложной тревоги (модель наблюдения авторегрессии 1 порядка). Результаты представлены в табл. 1–4. Показано, что взвешенная процедура Ширяева–Робертса проигрывает процедуре Ширяева–Робертса, настроенной на известные после разладки параметры, но незначительно. В свою очередь, взвешенная процедура, которая настроена на меньшее количество параметров, среди которых в точности нет реального параметра после разладки, проигрывает взвешенной процедуре, с большим количеством параметров, среди которых присутствует в точности параметр после разладки. Следовательно, идея применения взвешенных процедур, в случае, когда параметры наблюдения после разладки до конца неизвестны, является удачной. Результаты исследования очень полезны для большинства задач, так как на практике почти всегда параметры после разладки до конца неизвестны.

Литература

1. *Спивак В.С.* Численное сравнение наиболее популярных быстрых процедур обнаружения разладки // Труды МФТИ. 2020. Т. 12, № 2. С. 88–98.
2. *Tartakovsky A.G., Moustakides G.V.* State-of-the-Art in Bayesian Changepoint Detection // Sequential Analysis. 2010. V. 29, N 2. P. 125–145.
3. *Tartakovsky A. G., Nikiforov I. V., Basseville M.* Sequential Analysis Hypothesis Testing and Changepoint Detection. Ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Boca Raton-London-New York : Chapman and Hall/CRC Press, 2014.
4. *Tartakovsky A.G.* On asymptotic optimality in sequential changepoint detection: Non-idd case // IEEE Transactions on Information Theory. 2017. V. 63, N 6. P. 3433–3450.
5. *Tartakovsky A.G.* Sequential Change Detection and Hypothesis Testing: General Non-i.i.d. Stochastic Models and Asymptotically Optimal Rules // Monographs on Statistics and Applied Probability, Moscow, Russia and Los Angeles, USA, 2019.

References

1. *Spivak V.S.* Numerical comparison of popular quickest changepoint detection procedures. Proceedings of MIPT. 2020. V. 12, N 2. P. 88–98.
2. *Tartakovsky A.G., Moustakides G.V.* State-of-the-Art in Bayesian Changepoint Detection. Sequential Analysis. 2010. V. 29, N 2. P. 125–145.
3. *Tartakovsky A.G., Nikiforov I.V., Basseville M.* Sequential Analysis Hypothesis Testing and Changepoint Detection. Ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Boca Raton-London-New York : Chapman and Hall/CRC Press, 2014.
4. *Tartakovsky A.G.* On asymptotic optimality in sequential changepoint detection: Non-idd case. IEEE Transactions on Information Theory. 2017. V. 63, N 6. P. 3433–3450.
5. *Tartakovsky A.G.* Sequential Change Detection and Hypothesis Testing: General Non-i.i.d. Stochastic Models and Asymptotically Optimal Rules. Monographs on Statistics and Applied Probability, Moscow, Russia and Los Angeles, USA, 2019.

Поступила в редакцию 24.09.2020