УДК 519.865.3

Д. И. Малахов[1], *И. П. Поспелов*[2]

[1]Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
[2]Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

Эволюция распределения российских банков по ключевым агрегированным показателям

Предложена модель взаимодействия банков, составляющих банковскую систему некоторой открытой экономики. Цель данной работы – описание эволюции банковской системы по ключевым экономическим показателям. В качестве примера такого показателя используются балансовые активы банка (валюта баланса). Предполагается, что новые деньги в банковской системе могут создаваться либо за счет займов извне банковской системы, либо за счет кредитной эмиссии. Изъятие средств из банка происходит лишь вследствие погашения долга банком (в первом случае) или же списания долга клиенту (во втором случае). В модели предполагается, что до погашения эмиссия приносит процентный доход или расход. В статье на теоретическом уровне показано, что рост банковской системы как единого целого и эволюция распределения долей активов каждого банка в общей сумме активов банковской системы – два принципиально разных процесса.

Ключевые слова: банк, банковская система, кредитная эмиссия, активы банка

1. Введение

В настоящее время банковская система играет определяющую роль в развитии экономики страны. Главная задача банковской системы – преобразование сбережений населения в инвестиции производителей, и именно эту роль банки обычно выполняют в макроэкономических моделях. Одним из подходов к описанию банковской системы является формулировка оптимизационной задачи для макроагента «Банк», который представляет собой совокупность всех банковских организаций в экономике. Такой подход действительно позволяет описать динамику основных переменных банковской системы (см. [2]), однако модельного объяснения возможности замены поведения целой отрасли задачей одного агента, насколько нам известно, в литературе не имеется.

Один из ключевых методов исследования какой-либо отрасли – изучение динамики ее развития, или по-другому — эволюции отрасли. Именно динамические модели отраслей могут дать подробное и точное описание ключевых детерминант роста отрасли и перспектив ее развития. При этом работы, посвященные эволюции банковской отрасли, на данный момент практически отсутствуют. В данной работе мы как раз и осуществим попытку описать эволюцию банковской системы страны. Следуя примеру ([5], [7], [8]), мы будет описывать динамику отрасли через динамику размеров фирм в нее входящих (предполагается, что размер фирмы отражает ее «успешность» и поэтому служит хорошей аппроксимацией степени развития фирмы).

Конечно, на данный момент существуют модели, которые описывают распространение денег по банковской системе и сущность банковского мультипликатора. Однако такие модели обладают рядом недостатков. Например, в основном такие модели анализируют сравнительную статику, а не динамику, причем включение таких моделей, как отдельного блока модели общего равновесия, затруднено из-за особенностей их построения.

Финансовая отчетность банка — достаточно надежный источник, позволяющий получить актуальную информацию о финансовом здоровье банка и всей его деятельности (это особенно актуально для современной банковской сферы в России, поскольку в настоящее время Банк России отзывает лицензии у достаточно крупных коммерческих банков).

Поэтому в качестве размера коммерческих банков зачастую используют объем балансовых активов, так как этот показатель корректно отражает масштаб банка.

Цель данной работы — описание эволюции банковской отрасли России по ключевым экономическим показателям. В качестве примера такого показателя будем использовать балансовые активы банка (валюта баланса).

2. Модель эволюции распределения банков

2.1. Общее описание модели

В данной модели мы проанализируем распространение денег по банковской системе и, как следствие, динамику активов банковской системы.

Рассмотрим открытую экономику некой страны, в которой функционирует достаточно большое количество банков.

Появление новых денег

Новые деньги в банковской системе такой экономики появляются по двум главным причинам:

1) Займы извне банковской системы. Население данной страны (физические лица и юридические лица) и нерезиденты (физические лица и юридические лица) могут вкладывать свои деньги в банки. Также банки могут привлекать деньги с помощью получения кредитов от населения и нерезидентов или же посредством распространения финансовых инструментов (в том числе долговых) среди резидентов и нерезидентов. Однако в данном пункте мы не рассматриваем взаимодействие самих банков.

2) Кредитная эмиссия. Банк выдает своему клиенту ссуду с соответствующим созданием/изменением его расчетного счета.

В рамках данной модели эти два способа привлечения денег не различимы. Объем привлеченных денег $e(t)$ в обоих случаях определяется лишь характеристиками клиента и зависит от конъюнктуры. Мы будем в дальнейшем предполагать, что все клиенты банка одинаковы.

Изъятия и погашения

Изъятие средств из банка происходит лишь вследствие погашения долга банком (в первом случае) или же списания долга клиенту (во втором случае).

В модели предполагается, что до погашения эмиссия приносит процентный доход или расход. Погашение может быть и списанием, т.е. убытком. Также мы предполагаем, что вся прибыль выводиться, а все убытки погашаются акционером банка (причем неважно акционер банка — резидент или нет).

Объем эмиссий

Банк может переводить часть своих пассивов в другие банки. Переводящий банк списывает часть средств с расчетного счета клиента на корреспондентский счет принимающего банка. При этом изменяется структура пассивов, но не сумма. Объем активов всей банковской системы при этом возрастает. Отметим также, что транзакция между клиентами никак не влияет на объем активов банковской системы.

Дюрация

Предположим, что все активы погашаются с частотой пропорционально обратной дюрации актива β. Также предположим, что все активы одинаковы по сроку. Меняется лишь момент создания актива. Также положим, что все эмиссии одинаковы по размеру. Поэтому объем эмиссий у банка определяется числом клиентов у банка (считается, что в конкретный момент времени один клиент может провести одну эмиссию в один банк).

Обоснованность предположений

Если рассматривать развитую банковскую систему с большим количеством банков и вкладчиков в течение продолжительного периода времени, то предположения относительно сроков и размеров вкладов также будут достаточно релевантными, так как мы можем усреднить все транзакции вследствие их большого числа и высокой однородности. Таким образом, данная модель подходит для описания российской банковской системы.

2.2. Индуцированная эмиссия

Пусть имеется множество банков B, доли активов которых в общей сумме составляют n_b, причем $1 = \sum_{b\in B} n_b$. Также будет считать, что множество банков B является неизменным.

Пусть банк b произвел первичную эмиссию e. С вероятностью τ потребовалась транзакция. Можно предположить, что каждая эмиссия индуцирует цепочку эмиссий, но данное предположение, во-первых, не выглядит слишком реалистичным, так как обычно все транзакции – это перевод со счета в одном банке на счет в другом банке, во-вторых, если количество банков в транзакции достаточно большое, а τ мала (что вполне соответствует реальной действительности), то тогда такой ряд сойдется, и, как можно будет увидеть в дальнейшем, учет таких транзакций не увеличит объясняющую силу модели, а лишь сделает выкладки еще более громоздкими. Тогда с вероятностью n_i потребуется транзакция $b \to i$. Средний прирост активов после этой транзакции составит

$$\begin{cases} e, \; i = b, \\ \tau n_i e, \; i \neq b. \end{cases} \tag{1}$$

2.3. Случайный процесс изменения активов

Теперь приступим к анализу динамики активов банковской системы. Пусть в момент t банк i имеет объем активов $a_i(t)$:

$$A(t) = \sum_{b\in B} a_b(t). \tag{2}$$

В период $[t, t + dt]$ один клиент произвольного банка b независимо от других с вероятностью $\alpha(t)\cdot dt$ инициирует эмиссию в размере $e(t)$, много меньшем $a_b(t)$. Отметим, что зависимость α от t характеризует «реальный» спрос, а зависимость e от t в первую очередь — инфляцию и увеличение благосостояния общества.

Пусть с вероятностью $\tau(a(t)) \in [0, 1]$ эта эмиссия требует транзакции и мгновенно производит индуцированную эмиссию у других банков. Независимо от эмиссии с вероятностью $\beta \cdot dt$ погашается одна из старых эмиссий на величину $e(t)$. Далее будем считать, что β достаточно большая, поэтому все займы краткосрочные (все долгосрочные займи можно поделить на транши и рассматривать их как набор краткосрочных займов), и мы можем пренебречь изменением $e(t)$ за время расплаты.

Величина $\tau(a(t))$ есть вероятность выхода транзакций за пределы круга клиентов банка. Будем считать, что величина $\tau(a(t))$:

1) не зависит от номера банка, а только от его относительных активов (числа клиентов),

2) однородна нулевой степени относительно размеров (не зависит от единицы измерения денег),

3) не изменится, если активы пары других банков сольются.

Поэтому для упрощения будем считать, что τ — константа.

2.4. Динамика обобщенных моментов

Рассмотрим среднее значение некой функции[1] $\chi(a)$ по реализациям случайного процесса $a(t)$:

$$\mathrm{X}(t) = E_{a(t)}\ \{\chi\left(a(t)\right)\}, \tag{3}$$

где $E_{a(t)}\ \{\chi\left(a(t)\right)\}$– операция взятия математического ожидания от случайной величины $\chi\left(a(t)\right)$по $a(t)$.

Рассчитаем $X(t+dt)$ по формуле полного ожидания:

$$\mathrm{X}(t+dt) = E_{a(t)}\ \left\{E_{[t,t+dt]}\ \{\chi\left(a(t+dt)\right)\ |a(t)\}\right\}. \tag{4}$$

В период $[t+dt]$:

1) с вероятностью $1-\alpha(t)\,A(t)\,dt-\beta\,A(t)\,dt$ никакие активы не меняются;

2) с вероятностью $\beta\,a_b(t)\,dt$ актив банка b уменьшается на $e(t)$;

3) с вероятностью $\alpha(t)\,a_b(t)\,dt$ в банке b происходит первичная эмиссия $e(t)$ и сразу после с вероятностью $\tau\cdot\frac{a_A(t)}{A(t)-a_b(t)}$ она дублируется в банке $A\neq b$ (здесь мы неявно предположили, что вероятность того, что банк продолжит эмиссию, пропорциональна объему его активов; также стоит отметить, что необходимо вычесть из общей суммы активов объем активов банка, который начал эмиссию).

Вернемся к анализу моментов нашей случайной величины, распишем теперь условное ожидание, используя вышеуказанные вероятности:

$$E_{[t,t+dt]}\ \{\chi\left(a(t+dt)\right)\ |a(t)\} =$$

$$= \left(1-\alpha(t)\,A(t)\,dt-\beta\,A(t)\,dt\right)\ \chi\left(a(t)\right)+$$

$$+\beta\,dt\sum_{b\in B}a_b(t)\,\chi\left(\left\{a_i(t)-e(t)\,\delta_i^b\right\}_{b\in B}\right)+\alpha(t)\,dt\sum_{b\in B}a_b(t)\ \Bigg(\left(1-\tau_b(a(t))\right)\cdot\ \chi\left(\left\{a_i(t)+e(t)\,\delta_i^b\right\}_{i\in\mathcal{B}}\right)+$$

$$+\tau_b(a(t))\sum_{c\in B\setminus\{b\}}\frac{a_A(t)}{A(t)-a_b(t)}\chi\left(\left\{a_i(t)+e(t)\,\delta_i^b+e(t)\,\delta_i^c\right\}_{i\in B}\right)\Bigg).$$

Затем поставляя выражение для математического ожидания в (4) и вычисляя необходимое значение с точностью до $o(dt)$, получаем

$$\frac{d}{dt}\mathrm{X}(t) = E_{a(t)}[-\left(\alpha(t)\,A(t)\ +\beta\,A(t)\right)\ \chi\left(a(t)\right)+$$

$$+\beta\sum_{b\in B}a_b(t)\,\chi\left(\left\{a_i(t)-e(t)\,\delta_i^b\right\}_{b\in B}\right)\ +\alpha(t)\ \sum_{b\in B}a_b(t)\ \cdot\left((1-\tau)\cdot\ \chi\left(\left\{a_i(t)+e(t)\,\delta_i^b\right\}_{b\in B}\right)+\right.$$

$$\left.+\ \tau\cdot\ \sum_{c\in B\setminus\{b\}}\frac{a_A(t)}{A(t)-a_b(t)}\chi\left(\left\{a_i(t)+e(t)\,\delta_i^b+e(t)\,\delta_i^c\right\}_{b\in a}\right)\right)]. \tag{5}$$

---

[1]Если взять $\chi(a)=\prod_{b\in B}1(a_b\leqslant x_b)$ при фиксированных x, то $\mathrm{X}(t)=F_t(x)$ — функция совместного распределения случайного вектора $a(t)$.

2.5. Диффузионное приближение

Диффузионное приближение позволяет найти решение уравнения, схожее с асимптотическим, если мы находимся вдали от границ исследуемой области.

Предполагаем, что с вероятностью, близкой к 1, $a_i(t) \gg e(t)$, но $a_i(t) \cdot e(t)$ конечно. Тогда

$$\chi\left(\left\{a_i(t) + e(t)\,\delta_i^b\right\}_{b\in\mathcal{B}}\right) = \chi(a(t)) + e(t)\cdot\partial_b\chi(a(t)), \tag{6}$$

$$\chi\left(\left\{a_i(t) - e(t)\,\delta_i^b\right\}_{b\in\mathcal{B}}\right) = \chi(a(t)) - e(t)\cdot\partial_b\chi(a(t)),$$

$$\chi\left(\left\{a_i(t) + e(t)\,\delta_i^b + e(t)\,\delta_i^c\right\}_{b\in\mathcal{B}}\right) =$$

$$= \chi(a(t)) + e(t)\cdot\partial_b\chi(a(t)) + e(t)\cdot\partial_c\chi(a(t)). \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (5) и учитывая (2), получаем

$$\frac{d}{dt}\mathrm{X}(t) = e(t)\cdot\tau\cdot E_{a(t)}[(\alpha(t)-\beta)\sum_{b\in B} a_b(t)\,\partial_b\chi(a(t)) +$$

$$+\alpha(t)\sum_{b\in B}\frac{\sum_{c\in B\setminus\{b\}} a_b(t)\,a_A(t)\partial_c\chi(a(t))}{\sum_{c\in B\setminus\{b\}} a_A(t)}]. \tag{8}$$

2.6. Кинетическое уравнение

Поскольку t — параметр, то

$$\frac{d}{dt}\mathrm{X}(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,x), \tag{9}$$

$$\partial_b\chi^{\delta}(a) = \prod_{i\in B\setminus\{b\}} \delta(x_i - a_i)\cdot\delta'(x_i - a_i).$$

Подставляя полученные выше выражения в уравнение для математического ожидания, получим

$$E_{a(t)}\left\{a_b(t)\,\partial_b\chi^{\delta}(a(t))\right\} =$$

$$= \int_0^\infty da_1 \underset{\neq b}{\ldots}\int_0^\infty da_{|B|}\prod_{i\neq b}\delta(a_b - x_b)\int_0^\infty da_b f(t,a)\cdot a_b\cdot\delta'(a_b - x_b) = -\frac{\partial}{\partial x_b}\left(x_b\cdot f(t,x)\right).$$

Преобразовывая дальше, получим

$$E_{a(t)}\left\{\sum_{b\in B}\tau_b(a(t))\frac{\sum_{c\in B\setminus\{b\}} a_A(t)a_b(t)\partial_c\chi(a(t))}{\sum_{c\in B\setminus\{b\}} a_A(t)}\right\} =$$

$$= \sum_{b\in B} E_{a(t)}\left\{\sum_{c\in B\setminus\{b\}}\frac{\tau_b(a(t))\cdot a_A(t)a_b(t)\partial_c\chi(a(t))}{\sum_{d\in B\setminus\{b\}} a_d(t)}\right\} =$$

$$= \sum_{b\in B}\sum_{c\in B\setminus\{b\}}\int_0^\infty da_1 \underset{\neq b,c}{\ldots}\int_0^\infty da_{|B|}\prod_{i\neq c}\delta(a_i - x_i)\int_0^\infty da_c f(t,a)\cdot\frac{\tau_b(a)\cdot a_A a_b\delta'(a_c - x_A)}{\sum_{d\in B\setminus\{b\}} a_d} =$$

$$= \sum_{b\in B}\sum_{c\in B\setminus\{b\}}\int_0^\infty da_c f(t,x_1,\ldots.,a_c,\ldots,x_{|B|})\cdot\frac{\tau_b(x_1,\ldots.,a_c,\ldots,x_{|B|})\cdot a_A x_b\delta'(a_c - x_A)}{\sum_{d\in B} x_d - x_b - x_c + a_A} =$$

$$= -\sum_{b\in B}\sum_{c\in B\setminus\{b\}}\left(\frac{\partial}{\partial x_A}\left(f(t,x)\cdot\tau_b(x)\cdot\frac{x_A x_b}{\sum_{d\in B\setminus\{b\}} x_d}\right)\right). \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (8):

$$\tfrac{1}{e(t)}\tfrac{\partial}{\partial t} f(t,x) + \textstyle\sum_{b\in B}\left(\alpha(t)-\beta\right)\tfrac{\partial}{\partial x_b}\left(x_b\cdot f(t,x)\right) +$$

$$+\alpha(t)\ -\tau\cdot\sum_{b\in B}\sum_{c\in B\setminus\{b\}}\left(\frac{\partial}{\partial x_A}\left(f(t,x)\cdot\frac{x_A x_b}{\sum_{d\in B\setminus\{b\}} x_d}\right)\right) = 0. \qquad (11)$$

Развернем производные в (11) и поделим обе части уравнения на $f(t,x)$:

$$\frac{1}{e(t)}\frac{\partial}{\partial t}\ln f(t,x) + \sum_{b\in B}\left(\left(\alpha(t)-\beta\right)\right) +$$

$$+\sum_{b\in B}\left(x_b\left(\left(\alpha(t)-\beta\right)\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_b}\ln f(t,x)\right) =$$

$$= -\tau\cdot\sum_{b\in B}(x_b\frac{\partial}{\partial x_A}\ln f(t,x) + \sum_{c\in B\setminus\{b\}}\left(\frac{x_b}{\sum_{d\in B\setminus\{b\}} x_d} - \frac{x_A x_b}{\left(\sum_{d\in B\setminus\{b\}} x_d\right)^2}\right). \qquad (12)$$

Действительно, если проинтегрировать второй и третий члены по всему пространству и в каждом слагаемом сначала интегрировать по x_b, то этот интеграл обратится в 0, поскольку $f(t,x)$ обращается в 0 на краях.

Число банков $|B| \gg 2$, поэтому можно написать:

$$\frac{1}{e(t)}\frac{\partial}{\partial t}\ln f(t,x) + \sum_{b\in B}\left(\left(\alpha(t)-\beta\right)\right) +$$

$$+\sum_{b\in B}\left(x_b\left(\left(\alpha(t)-\beta\right)+\tau\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x_b}\ln f(t,x)\right) = -\left|B\right|\cdot\tau\cdot\sum_{b\in B}\frac{x_b}{\sum_{c\in B\setminus\{b\}} x_c}. \qquad (13)$$

2.7. Поиск стационарного решения

Сделаем в уравнении (13) замену:

$$\ln f(t,x) = \ln\, g\left(t, xe^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi}\right) - \sum_{b\in B}\int_0^t e(\xi)\ \left(\alpha(\xi)-\beta\right)d\xi. \qquad (14)$$

Подставляя (14) в (11), получаем

$$\partial_t \ln\, g\left(t, xe^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi}\right) - \sum_{b\in B}\left(\alpha(t)-\beta\right) -$$

$$-\sum_{b\in B}\left(\alpha(t)-\beta\right)\cdot x_b e^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi}\cdot\partial_b \ln\, g\left(t, xe^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi}\right) + \sum_{b\in B}\left(\left(\alpha(t)-\beta\right)\right) +$$

$$+\sum_{b\in B}\left(x_b e^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi}\left(\left(\alpha(t)-\beta\right)+\tau\right)\cdot\partial_b \ln\, g\left(t, xe^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi}\right)\right) =$$

$$= -\left|B\right|\cdot\tau\cdot\sum_{b\in B}\frac{x_b}{\sum_{c\in B\setminus\{b\}} x_c}$$

Введем замену переменных:

$$y = xe^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi}. \qquad (15)$$

Преобразовывая, получаем

$$\partial_t \ln\, g\,(t,y)\; + \tau \cdot \sum_{b\in B} y_b \cdot \partial_b \ln\, g\,(t,y) = -\,|B| \cdot \tau \cdot \sum_{b\in B} \frac{x_b}{\sum_{c\in B\setminus\{b\}} x_c}. \tag{16}$$

Оставшиеся в уравнении функции от x однородны нулевой степени, то есть инвариантны к замене (15), поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln\, g\,(t,y)\; + \tau \cdot \sum_{b\in B} y_b \cdot \frac{\partial}{\partial y_b} \ln\, g\,(t,y) = -\,|B| \cdot \tau \cdot \sum_{b\in B} \frac{y_b}{\sum_{c\in B\setminus\{b\}} y_c}.$$

Заметим, что данное уравнение не зависит напрямую от времени (дрейф был убран), поэтому можно найти стационарное решение:

$$\sum_{b\in B} y_b \cdot \frac{\partial}{\partial y_b} \ln\, g\,(y) + |B| \cdot \sum_{b\in B} \frac{y_b}{\sum_{c\in B\setminus\{b\}} y_c} = 0. \tag{17}$$

2.8. Частичное разделение переменных

Общее решение однородного уравнения:

$$\sum_{b\in B} y_b \frac{\partial}{\partial y_b} \ln\, g\,(y) = 0. \tag{18}$$

Общее решение (18) — произвольная функция долей активов. Свободный член представляется в виде ряда

$$\sum_{b\in B} \frac{y_b}{\sum_{c\in B\setminus\{b\}} y_c} = \sum_{b\in B} \frac{y_b}{\sum_{c\in B} y_c - y_b} = \sum_{b\in B}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{y_b}{\sum_{c\in B} y_c}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{S_1^n}, S_n \triangleq \sum_{b\in B} y_b^n. \tag{19}$$

Найдем частное решение в виде аналогичного ряда:

$$\ln\, g\,(y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(S_1) \cdot S_n,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_b} \ln\, g\,(y) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot K_n(S_1) \cdot y_b^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} K_n'(S_1) \cdot S_n,$$

$$\sum_{b\in B} y_b \frac{\partial}{\partial y_b} \ln\, g\,(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(n \cdot K_n(S_1) + K_n'(S_1) \cdot S_1\big) \cdot S_n.$$

Данный ряд удовлетворит нашему уравнению, если

$$n \cdot K_n(S_1) + K_n'(S_1) \cdot S_1 = -\frac{1}{S_1^n}.$$

Однородное уравнение $n \cdot K_n(S_1) + K_n'(S_1) \cdot S_1 = 0 \Leftrightarrow n \cdot \frac{dS_1}{S_1} + \frac{dK_n}{K_n} = 0$ имеет решение $\tilde{K}_n(S_1) = C \cdot S_1^{-n}$. Поэтому можно сделать вариацию постоянных:

$$n \cdot C(S_1) \cdot S_1^{-n} + C'(S_1) \cdot S_1^{-n+1} - n \cdot C(S_1) \cdot S_1^{-n-1} \cdot S_1 = -\frac{1}{S_1^n},$$

$$C'(S_1) = -\frac{1}{S_1} \Rightarrow C(S_1) = -\ln S_1 + C_0.$$

Поскольку нам достаточно частного решения, положим $C_0 = 0$, значит, $K_n(S_1) = \frac{-\ln S_1}{S_1^n}$, и тогда частное решение имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_n(S_1) \cdot S_n = -\ln S_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n}{S_1^n} = -\ln \left(\sum_{c \in B} y_c \right) \sum_{b \in B} \frac{y_b}{\sum_{c \in B \setminus \{b\}} y_c}. \tag{20}$$

Общее решение уравнения выглядит следующим образом:

$$g(y) = \exp\left\{ F\left(\frac{y_1}{\sum_{b \in B} y_b}, ..., \frac{y_{|B|}}{\sum_{b \in B} y_b} \right) - \ln \left(\sum_{c \in B} y_c \right) \sum_{b \in B} \frac{y_b}{\sum_{c \in B \setminus \{b\}} y_c} \right\}.$$

Вернемся к изначальным переменным $y = xe^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi}$:

$$g(xe^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi}) = \exp\left[F\left(\frac{x_1}{\sum_{b \in B} x_b}, ..., \frac{x_{|B|}}{\sum_{b \in B} x_b} \right) - \right.$$

$$\left. - \ln \left(\sum_{c \in B} x_c e^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi} \right) \sum_{b \in B} \frac{x_b}{\sum_{c \in B \setminus \{b\}} x_c} \right].$$

Еще раз отметим, что $g(xe^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi})$ не зависит от времени, таким образом, подставляя $\ln f(t,x) = \ln\, g\left(t, xe^{-\int_0^t (e(\xi)\,(\alpha(\xi)-\beta))d\xi}\right) - \sum_{b \in \mathcal{B}} \int_0^t e(\xi)\;(\alpha(\xi) - \beta)\,d\xi$, получим следующее выражение:

$$f(x) = \exp\left(F\left(\frac{x_1}{\sum_{b \in B} x_b}, ..., \frac{x_{|B|}}{\sum_{b \in B} x_b} \right) \right) \times$$

$$\times \exp\left(\int_0^t e(\xi)\;(\alpha(\xi) - \beta)\,d\xi - \ln \left(\sum_{c \in B} x_c \right) \sum_{b \in B} \frac{x_b}{\sum_{c \in B \setminus \{b\}} x_c} \right) \times$$

$$\times \exp(\int_0^t e(\xi)\;(\alpha(\xi) - \beta)\,d\xi \cdot (-|B|))).$$

Заметим, что итоговая функция плотности $f(x)$ представима как произведение двух принципиально разных множителей. Первый из них $\exp\left(F\left(\frac{x_1}{\sum_{b \in B} x_b}, ..., \frac{x_{|B|}}{\sum_{b \in B} x_b}\right)\right)$ зависит только от долей активов, но не зависит ни от абсолютных объемов, ни напрямую от времени. Второй множитель имеет прямую зависимость от времени. Но показатели отдельных банков входят в него только в составе выражения $\sum_{b \in B} \frac{x_b}{\sum_{c \in B \setminus \{b\}} x_c}$. Весь вопрос в том, насколько данная величина близка к константе. Если это так (а например, прямое измерение показывает, что для банковской системы России это предположение вполне оправдано), то во втором множителе имеет смысл обращать внимание только на суммарный показатель активов.

Естественно считать, что второй множитель должен сохранять постоянное значение, потому что в противном случае функция плотности $f(x)$ перестанет удовлетворять требованию равенства единице ее интегралу по всему пространству x. Следовательно, в этом множителе заложено некоторое описание динамики суммарных активов банковской системы в зависимости от значений основных параметров. Причем это соотношение фактически описывает банковскую систему как единого макроэкономического агента.

Таким образом, мы показали, что рост банковской системы как единого целого и эволюция распределения долей — два принципиально разных процесса.

3. Заключение

В настоящей статье предложена теоретическая модель открытой банковской системы, каждый банк которой способен привлекать займы извне банковской системы или переводить средства в другой банк, запуская тем самым механизм кредитной эмиссии. В первом случае изъятие средств из банка происходит лишь вследствие погашения долга банком, во втором случае — при списании долга клиенту. В модели предполагается, что до погашения эмиссия приносит процентный доход или расход.

В статье показано, что развитие банковской системы как единого целого и эволюция распределения долей активов каждого банка в общей сумме активов банковской системы — два принципиально разных процесса. Этот результат — одно из возможных теоретических объяснений замеченного ранее феномена: при моделировании банковской системы более точная калибровка основных переменных достигается при агрегировании всех банков в единого макроагента. В случае российской действительности это означает, что, казалось бы, логичное выделение Сбербанка и ВТБ снижает качество калибровки модели (см. [2]).

Естественно, что предпосылки представленной модели чрезвычайно упрощены по сравнению с многообразием операций современного банка. И тем не менее корректное описание одного из наиболее важных из них — кредитной эмиссии, — как было показано, позволило получить весьма интересный результат.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00432)

Литература

1. *Андреев А.Ю.* Анализ распределения банков по активам // Прикладная эконометрика. — 2008. — Т. 10, вып. 2. — С. 3–10.
2. *Андреев М.Ю., Пильник Н.П., Поспелов И.Г.* Моделирование деятельности современной российской банковской системы // Экономический журнал ВШЭ. — 2009. — Т. 13, вып. 2. — С. 143–171.
3. *Дедова М.С., Пильник Н.П., Поспелов И.Г.* Описание потребности в ликвидности со стороны российской банковской системы на основе статистики оборотов // Журнал Новой экономической ассоциации. — 2014. — Вып. 3. — С. 33–61.
4. *Gibrat R.* Les Inegalites economiques // Recueil sirey, 1931.
5. *Javonovich B.* Selection and the evolution of industry // Econometrica. — 1982. — V. 50, I. 3. — P. 649–670.
6. *Prescott E.S., Janicki H.P.* Changes in the Size of U.S. Banks: 1960–2005 // Economic quaterly. — 2006. — I. Fall. — P. 291–316.
7. *Sutton J.* Sunk costs and market structure : price competition, advertising, and the evolution of concentration // MIT Press, Cambridge, Mass, 1991.
8. *Wang Z.* Income distribution, market size and the evolution of industry // Review of economic dynamics. — 2008. V. 11, I. 3. — P. 542–565.

Bibliography

1. *Andreev A.* Analysis of the distribution of banks in terms of assets // Journal of Applied Econometrics. — 2008. — V. 10, I. 2. — P. 3–10.
2. *Andreev M.Y., Pilnik N.P., Pospelov I.G.* Modelling of activity of modern Russian banking system // Journal of Higher School of Economics. — 2009. — V. 13, I. 2. — P. 143–171.

3. *Dedova M.S., Pilnik N.P., Pospelov I.G.* Description of the liquidity needs on the part of the Russian banking system based on the statistics of revolutions // Journal of the New Economic Association. — 2014. — I. 3. — P. 33–61.

4. *Gibrat R.* Les Inegalites economiques // Recueil sirey, 1931.

5. *Javonovich B.* Selection and the evolution of industry // Econometrica. — 1982. — V. 50, I. 3. — P. 649–670.

6. *Prescott E.S., Janicki H.P.* Changes in the Size of U.S. Banks: 1960-2005 // Economic quaterly. — 2006. — I. Fall. — P. 291–316.

7. *Sutton J.* Sunk costs and market structure : price competition, advertising, and the evolution of concentration // MIT Press, Cambridge, Mass, 1991.

8. *Wang Z.* Income distribution, market size and the evolution of industry // Review of economic dynamics. — 2008. — V. 11, I. 3. — P. 542–565.

Поступила в редакцию 15.12.2014.