УДК 512.53, 517.986

Р. Н. Гумеров

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Нормальные расширения полугрупп и вложения полугрупповых C^*-алгебр

Изучаются нормальные расширения абелевых полугрупп с сокращением и редуцированные полугрупповые C^*-алгебры. Для нормального расширения, порожденного одним элементом полугруппы, мы рассматриваем две редуцированные полугрупповые C^*-алгебры, определяемые этим расширением. Показывается, что существует естественное вложение полугрупповых C^*-алгебр.

Ключевые слова: полугруппа с сокращением, расширение полугруппы, нормальное расширение полугруппы, точная последовательность, редуцированная полугрупповая C^*-алгебра, алгебра Теплица, вложение полугрупповой C^*-алгебры.

R. N. Gumerov

Kazan (Volga Region) Federal University

Normal extensions of semigroups and embeddings of semigroup C^*-algebras

The article deals with the normal extensions of cancellative abelian semigroups and the reduced semigroup C^*-algebras. For a normal extension generated by one element of a semigroup, we consider two reduced semigroup C^*-algebras defined by this extension. It is shown that there exists a natural embedding of the semigroup C^*-algebras.

Key words: cancellative semigroup, extension of semigroup, normal extension of semigroup, exact sequence, reduced semigroup C^*-algebra, Toeplitz algebra, embedding of semigroup C^*-algebra.

1. Введение

В статье рассматриваются нормальные расширения абелевых полугрупп с сокращением и редуцированные полугрупповые C^*-алгебры для этих полугрупп.

Редуцированная полугрупповая C^*-алгебра – это алгебра, порожденная левым регулярным представлением полугруппы с сокращением. Изучение таких C^*-алгебр было начато в работах Кобурна [1], Дугласа [2] и Мерфи [3]. Свое дальнейшее развитие теория полугрупповых C^*-алгебр получила в статьях ряда авторов (см. ссылки, например, в [4]).

В категории полугрупп, как и в других категориях (см., например, [5]), расширения играют важную роль при изучении свойств объектов и морфизмов. В исследованиях по полугруппам рассматриваются различные виды расширений. В работе Клиффорда [6] изучались идеальные расширения. В статье Редеи [7] были введены шрайеровы расширения. Нормальные расширения были рассмотрены в работах Глускина и Перепелицына [8, 9].

Данная статья является продолжением исследований редуцированных полугрупповых C^*-алгебр, начатых в [10–16]. В ней изучаются полугрупповые C^*-алгебры для двух полугрупп S и L, таких, что L является нормальным расширением S с помощью конечной группы вычетов $\mathbb{Z}_n$ по модулю n. При этом рассматривается частный случай нормальных расширений полугруппы S, а именно так называемые расширения, порожденные одним элементом полугруппы L. Основным результатом статьи является теорема о вложении редуцированной полугрупповой C^*-алгебры для S в аналогичную алгебру для полугруппы L. Этот результат был анонсирован без доказательства в совместной работе [17, теорема 3].

Содержание статьи следующее. Она состоит из Введения и еще трех разделов. Во втором разделе приводятся необходимые сведения о нормальных расширениях полугрупп. В третьем разделе рассматриваются нормальные расширения полугрупп, порожденные одним элементом. В заключительном четвертом разделе строится вложение полугрупповых C^*-алгебр. Необходимые сведения из теории C^*-алгебр содержатся, например, в [18].

2. Нормальные расширения полугрупп

Пусть S, L и M – абелевы аддитивные полугруппы с сокращением и нейтральными элементами, которые будут обозначаться символом 0.

Напомним определения, связанные с расширениями полугрупп [8, 19]. Все определения приведем для абелевых аддитивных полугрупп.

Тройка (L, τ, σ) называется *расширением* полугруппы S с помощью полугруппы M, если $\tau : S \longrightarrow L$ – инъективный гомоморфизм полугрупп, а $\sigma : L \longrightarrow M$ – сюръективный гомоморфизм полугрупп, такие, что $\tau(S)$ является полным прообразом некоторого элемента полугруппы M.

Иногда мы будем называть саму полугруппу L расширением полугруппы S с помощью полугруппы M. В литературе также можно встретить другую терминологию, в которой полугруппа L называется расширением полугруппы M с помощью полугруппы S.

Расширение (L, τ, σ) полугруппы S с помощью полугруппы M называется *нормальным*, если $\tau(S)$ является полным прообразом нейтрального элемента полугруппы M, то есть $\sigma^{-1}(0) = \tau(S)$.

Другими словами, всякое нормальное расширение задается короткой точной последовательностью, состоящей из полугрупп и их гомоморфизмов:

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\ \tau\ } L \xrightarrow{\ \sigma\ } M \longrightarrow 0.$$

Полугруппа S называется *нормальной* в L, если $\tau(S)$ – нормальная подполугруппа в L, то есть для любых $a \in S$ и $x \in L$, если $x + \tau(a) \in \tau(S)$, то $x \in \tau(S)$.

Понятия нормального расширения и нормальной полугруппы тесно связаны. А именно, имеет место следующее утверждение [19, теорема 4.11]. Расширение (L, τ, σ) полугруппы S является нормальным тогда и только тогда, когда S является нормальной в L.

Отношение эквивалентности $\sim$ на L называется *конгруэнцией*, если оно стабильно, то есть для любых $x, y, z \in L$, если $x \sim y$, то $x + z \sim y + z$. В этом случае на фактор-множестве $L/_\sim$ можно задать структуру полугруппы. Отношение конгруэнции на L задается с помощью сюръективного гомоморфизма $\sigma : L \longrightarrow M$ следующим образом: для любых $x, y \in L$ положим $x \sim y$, если и только если $\sigma(x) = \sigma(y)$. Тогда, согласно [20, теорема 1.5], существует изоморфизм $\psi : L/_\sim \longrightarrow M$, такой, что $\psi \circ \pi = \sigma$, где $\pi : L \longrightarrow L/_\sim$ – канонический гомоморфизм, то есть существует коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[d, "\pi"] \arrow[dr, "\sigma"] & \\ L/_\sim \arrow[r, "\psi"'] & M. \end{tikzcd}$$

Таким образом, если тройка (L, τ, σ) является нормальным расширением полугруппы S с помощью полугруппы M, то, нестрого говоря, L является «большой» полугруппой, содержащей нормальную подполугруппу, которую можно отождествить с S, и M можно отождествить с фактор-полугруппой по конгруэнции на L, заданной с помощью эпиморфизма σ.

Стандартный вопрос в теории расширений следующий. Предположим, нам все известно о полугруппах S и M. Что мы можем сказать о полугруппе L?

Пусть $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ – аддитивная группа вычетов по модулю n. Элементы группы $\mathbb{Z}_n$ мы будем обозначать символами

$$[0]_n, [1]_n, ..., [n-1]_n.$$

В дальнейшем будут рассматриваться нормальные расширения полугрупп с помощью конечной группы $\mathbb{Z}_n$, то есть полугруппы L и S, для которых задана короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\tau} L \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Отметим, что если (L, τ, σ) – нормальное расширение полугруппы S с помощью группы $\mathbb{Z}_n$, то полугруппа L представляется в виде дизъюнктного объединения подмножеств

$$L = \tau(S) \sqcup L_1 \sqcup ... \sqcup L_{n-1}, \tag{2}$$

таких, что каждое подмножество L_k является полным прообразом элемента $[k]_n \in \mathbb{Z}_n$, то есть $\sigma^{-1}([k]_n) = L_k$, $1 \le k \le n-1$.

3. Нормальные расширения полугрупп, порожденные одним элементом

Рассмотрим нормальное расширение (L, τ, σ) полугруппы S с помощью группы $\mathbb{Z}_n$, то есть короткую точную последовательность (1).

Зафиксируем некоторый элемент $x \in L \setminus \tau(S)$, такой, что $\sigma(x) = [m]_n$, и числа n и m взаимно просты. Обозначим через L_x подполугруппу в L, порожденную элементом x и всеми элементами из $\tau(S)$.

Лемма 1. *Полугруппа L_x является нормальным расширением полугруппы S с помощью группы $\mathbb{Z}_n$.*

Доказательство. Поскольку $\tau(S) \subset L_x \subset L$, то существует вложение $\tau : S \longrightarrow L_x$. Пусть $\sigma_x : L_x \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ – полугрупповой гомоморфизм, такой, что $\sigma_x(y) = \sigma(y)$ для любого $y \in L_x$. Так как $\sigma(x) = [m]_n$, где $m \in \mathbb{N}$, $1 \le m \le n-1$, то $\sigma_x(x) = [m]_n$.

Докажем, что σ_x – сюръекция. Для этого покажем, что для любого натурального числа k, удовлетворяющего неравенству $1 \le k \le n-1$, найдется натуральное число l, такое, что $\sigma_x(lx) = [k]_n$, или, что эквивалентно,

$$[lm]_n = [k]_n.$$

Действительно, так как n и m взаимно простые, то существуют $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, такие, что

$$\alpha m + \beta n = 1.$$

Если $\alpha > 0$, то $[\alpha k m]_n = [k]_n$. Тогда для $l = \alpha k$ получаем требуемое равенство. Если $\alpha < 0$, то $[-\alpha(n-k)m]_n = [-(n-k)]_n = [k]_n$. Тогда при $l = -\alpha(n-k)$ получим требуемое равенство. Осталось заметить, что $\sigma_x(nx) = [nm]_n = [0]_n$. Таким образом, σ_x – сюръекция.

Наконец, поскольку $\sigma^{-1}([0]_n) = \tau(S) \subset L_x$, то и $(\sigma_x)^{-1}([0]_n) = \tau(S)$. Таким образом, короткая последовательность

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\tau} L_x \xrightarrow{\sigma_x} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$$

является точной, то есть (L_x, τ, σ_x) – нормальное расширение. $\square$

Далее вместо σ_x будем писать просто σ. Тройку (L_x, τ, σ) или саму полугруппу L_x мы будем называть нормальным расширением полугруппы S, *порожденным элементом* x.

Лемма 2. *Пусть L_x – нормальное расширение полугруппы S с помощью группы $\mathbb{Z}_n$, порожденное элементом x. Тогда $nx \in \tau(S)$ и каждый элемент $y \in L_x$ однозначно представляется в виде $y = \tau(a) + kx$, где $a \in S$, $0 \leq k \leq n-1$.*

Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq m \leq n-1$, такое, что $\sigma(x) = [m]_n$. Тогда $\sigma(nx) = [nm]_n = [0]_n$. Это означает, что $nx \in \tau(S)$. Поскольку L_x порождается элементом x и всеми элементами из $\tau(S)$, то каждый элемент $y \in L_x$ записывается в виде $y = \tau(a) + kx$. Покажем однозначность такой записи. Действительно, пусть $\tau(a) + kx = \tau(c) + lx$. Если $k = l$, то $a = c$. Пусть $k \neq l$. Условие $\sigma(kx) = \sigma(lx)$ эквивалентно тому, что $[km]_n = [lm]_n$. Тогда в случае, если $k > l$, мы имеем равенство $[(k-l)m]_n = [0]_n$. Оно означает, что число $(k-l)m$ кратно n. Но это невозможно, поскольку числа n и m взаимно просты и выполняется неравенство $0 < k - l < n - 1$. □

Из леммы 2 вытекает, что дизъюнктное объединение (2) для полугруппы L_x имеет следующий вид:

$$L_x = \tau(S) \sqcup (\tau(S) + x) \sqcup ... \sqcup (\tau(S) + (n-1)x), \tag{3}$$

где $\tau(S) + kx := \{\tau(a) + kx \mid a \in S\}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Приведем пример нормального расширения, порожденного одним элементом.

Пример. Пусть $\mathbb{Z}^+$ – полугруппа всех неотрицательных целых чисел. Рассмотрим короткую последовательность:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{\ \tau\ } \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\} \xrightarrow{\ \sigma\ } \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0,$$

где $\tau(k) = 3k$, $\sigma(m) = [m]_3$ для любых $k \in \mathbb{Z}^+$ и $m \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$. Очевидно, что справедливо равенство $\sigma^{-1}([0]_n) = \tau(\mathbb{Z}^+)$, то есть построенная короткая последовательность точна. Полугруппа $\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ представляется в виде (3):

$$\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\} = \tau(\mathbb{Z}^+) \sqcup (\tau(\mathbb{Z}^+) + 2) \sqcup (\tau(\mathbb{Z}^+) + 2 \cdot 2).$$

Таким образом, расширение $(\mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}, \tau, \sigma)$ является нормальным расширением полугруппы $\mathbb{Z}^+$ с помощью группы $\mathbb{Z}_3$, порожденным элементом $x = 2$.

4. Полугрупповые C^*-алгебры $C_r^*(S)$ и $C_r^*(L_x)$

Пусть P – произвольная абелева аддитивная полугруппа с сокращением. Рассмотрим гильбертово пространство квадратично суммируемых комплекснозначных функций на P:

$$l^2(P) := \{f : P \to \mathbb{C} \mid \sum_{\gamma \in P} |f(\gamma)|^2 < +\infty\}.$$

Канонический ортонормированный базис гильбертова пространства $l^2(P)$ мы будем обозначать $\{e_\gamma \mid \gamma \in P\}$, где

$$e_\gamma(\gamma') := \begin{cases} 1, & \text{если } \gamma = \gamma'\,; \\ 0, & \text{если } \gamma \neq \gamma'\,. \end{cases}$$

Пусть $C_r^*(P)$ – редуцированная полугрупповая C^*-алгебра, т.е. C^*-подалгебра в алгебре всех ограниченных операторов $B(l^2(P))$ на $l^2(P)$, порожденная множеством изометрий $\{T_\gamma \mid \gamma \in P\}$, где $T_\gamma(e_{\gamma'}) = e_{\gamma+\gamma'}$, $\gamma, \gamma' \in P$.

Пусть (L_x, τ, σ) – нормальное расширение полугруппы S с помощью группы $\mathbb{Z}_n$, порожденное элементом x. Рассмотрим C^*-алгебры $C_r^*(S)$ и $C_r^*(L_x)$, которые порождаются множествами $\{T_a \mid a \in S\}$ и $\{T_y \mid y \in L_x\}$ соответственно. Единичные элементы этих алгебр будем обозначать через I.

По лемме 2 каждый элемент $y \in L_x$ может быть однозначно представлен в виде $y = \tau(a) + kx$, где $a \in S$, $0 \leq k \leq n-1$. Очевидно, что справедливо равенство

$$T_y = T_{\tau(a)+kx} = T_{\tau(a)} T_x^k.$$

Таким образом, C^*-алгебра $C_r^*(L_x)$ порождается множеством изометрий $\{T_{\tau(a)} \mid a \in S\}$ и одним изометрическим оператором T_x.

Операторы $T_a, T_a^*, a \in S$, порождающие C^*-алгебру $C_r^*(S)$, будем называть *элементарными мономами.* Любое конечное произведение элементарных мономов будем называть *мономом.* Множество всех мономов образует инволютивную полугруппу, которую мы будем называть *полугруппой мономов* и обозначать через Mon^S.

Произвольный моном $V^S \in \mathrm{Mon}^S$ представляется в виде

$$V^S = T_{a_n}^{i_n} T_{a_{n-1}}^{i_{n-1}} ... T_{a_1}^{i_1}, \tag{4}$$

где $a_1, ..., a_n \in S,\ i_1, ..., i_n \in \{0, 1\}$ и $T_{a_j}^0 := T_{a_j}$, $T_{a_j}^1 := T_{a_j}^*$.

Отметим, что представление оператора в C^*-алгебре $C_r^*(S)$ в виде монома (4) неоднозначно. Например, два монома $T_a T_b^* T_b T_c$ и T_{a+c} представляют один и тот же оператор в C^*-алгебре $C_r^*(S)$, поскольку $T_b^* T_b = I$.

Конечные линейные комбинации мономов

$$A^S = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i^S \tag{5}$$

образуют плотную инволютивную подалгебру в C^*-алгебре $C_r^*(S)$, которую будем обозначать $P(S)$.

Аналогично, в инволютивной полугруппе мономов C^*-алгебры $C_r^*(L_x)$ имеется подполугруппа $\mathrm{Mon}^{\tau(S)}$, каждый элемент которой представляется в виде

$$V^{\tau(S)} = T_{\tau(a_n)}^{i_n} T_{\tau(a_{n-1})}^{i_{n-1}} ... T_{\tau(a_1)}^{i_1}, \tag{6}$$

где $a_1, ..., a_n \in S,\ i_1, ..., i_n \in \{0, 1\}$ и $T_{\tau(a_j)}^0 := T_{\tau(a_j)}$, $T_{\tau(a_j)}^1 := T_{\tau(a_j)}^*$. А в плотной инволютивной подалгебре $P(L_x)$ в C^*-алгебре $C_r^*(L_x)$ имеется подалгебра $P(\tau(S))$, каждый элемент которой представляется в виде

$$A^{\tau(S)} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i^{\tau(S)}. \tag{7}$$

Используя разложение (3), представим гильбертово пространство $l^2(L_x)$ в виде ортогональной суммы своих подпространств:

$$l^2(L_x) = \bigoplus_{k=0}^{n-1} H_k, \tag{8}$$

где для каждого k, $0 \le k \le n-1$, подпространство H_k определяется множеством базисных функций $\{e_{\tau(a)+kx} \mid a \in S\}$.

Лемма 3. *Для каждого $k, 0 \le k \le n-1$, и для любого $a \in S$ подпространства H_k инвариантны относительно операторов $T_{\tau(a)}$, а следовательно, они инвариантны относительно мономов $V^{\tau(S)} \in \mathrm{Mon}^{\tau(S)}$ и конечных линейных комбинаций $A^{\tau(S)} \in P(\tau(S))$.*

Доказательство. Действительно, вычислим $T_{\tau(a)}$ на базисных векторах $e_{\tau(c)+kx} \in H_k$, где $c \in S$. Получим $T_{\tau(a)} e_{\tau(c)+kx} = e_{\tau(a+c)+kx} \in H_k$. $\square$

Как отмечено во введении, следующая теорема была сформулирована автором без доказательства в [17, теорема 3]. Ниже приводится доказательство этого результата.

Теорема. *Пусть (L_x, τ, σ) – нормальное расширение полугруппы S с помощью группы $\mathbb{Z}_n$, порожденное одним элементом. Тогда существует единственный унитальный изометрический $*$-гомоморфизм $\varphi : C_r^*(S) \longrightarrow C_r^*(L_x)$, такой, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\ C_r^*(S) \arrow[rr, "\varphi"] & & C_r^*(L_x) \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть справедливо равенство $\varphi \circ \pi = \rho$, где $\pi(a) = T_a$ и $\rho(a) = T_{\tau(a)}$ для любого $a \in S$.

Доказательство. Рассмотрим гильбертово пространство $l^2(L_x)$ и его подпространства H_k, $0 \le k \le n-1$, из разложения (8). Напомним, что ортогональным базисом пространства H_k является множество $\{e_{\tau(a)+kx} \mid a \in S\}$. Ортогональным базисом пространства $l^2(S)$ является множество $\{e_a \mid a \in S\}$.

Для каждого $k, 0 \le k \le n-1$, построим унитарный оператор:

$$U_k : l^2(S) \longrightarrow H_k : e_a \mapsto e_{\tau(a)+kx}.$$

По лемме 3 подпространства H_k инвариантны относительно операторов $T_{\tau(a)}$ для любого $a \in S$. Следовательно, каждый оператор $T_{\tau(a)}$ можно представить в виде прямой суммы операторов

$$T_{\tau(a)} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} T_{\tau(a)}^{(k)},$$

где $T_{\tau(a)}^{(k)} = T_{\tau(a)}|_{H_k}$ – ограничение оператора $T_{\tau(a)}$ на подпространство H_k.

Аналогично, каждый моном $V^{\tau(S)} \in \mathrm{Mon}^{\tau(S)}$ и каждый оператор $A^{\tau(S)} \in P(\tau(S))$ можно представить в виде

$$V^{\tau(S)} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} (V^{\tau(S)})^{(k)}, \quad A^{\tau(S)} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} (A^{\tau(S)})^{(k)}, \tag{9}$$

где $(V^{\tau(S)})^{(k)} = V^{\tau(S)}|_{H_k}$, $(A^{\tau(S)})^{(k)} = A^{\tau(S)}|_{H_k}$ – соответствующие ограничения на подпространство H_k.

Покажем, что для любого $k, 0 \le k \le n-1$, диаграмма

$$\begin{tikzcd} l^2(S) \arrow[r, "T_a"] \arrow[d, "U_k"'] & l^2(S) \arrow[d, "U_k"] \\ H_k \arrow[r, "T_{\tau(a)}^{(k)}"] & H_k \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть справедливо равенство для операторов

$$T_{\tau(a)}^{(k)} U_k = U_k T_a. \tag{10}$$

Действительно, для любого $c \in S$ имеем равенства

$$T_{\tau(a)}^{(k)} U_k e_c = T_{\tau(a)}^{(k)} e_{\tau(c)+kx} = e_{\tau(a)+\tau(c)+kx} = U_k e_{a+c} = U_k T_a e_c.$$

Применив инволюцию к равенству (10), легко видеть, что также справедливо равенство

$$(T_{\tau(a)}^{*})^{(k)} U_k = U_k T_a^{*}. \tag{11}$$

Используя равенства (10) и (11), мы получаем, что аналогичное равенство справедливо как для мономов вида (4) и (6):

$$(V^{\tau(S)})^{(k)} U_k = (T_{\tau(a_n)}^{i_n})^{(k)} (T_{\tau(a_{n-1})}^{i_{n-1}})^{(k)} ... (T_{\tau(a_1)}^{i_1})^{(k)} U_k = \tag{12}$$

$$= U_k T_{a_n}^{i_n} T_{a_{n-1}}^{i_{n-1}} ... T_{a_1}^{i_1} = U_k V^S,$$

так и для конечных линейных комбинаций вида (5) и (7):

$$(A^{\tau(S)})^{(k)} U_k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (V_i^{\tau(S)})^{(k)} U_k = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i U_k V_i^S = U_k A^S. \tag{13}$$

Далее мы определим гомоморфизм φ. Для этого сначала зададим его значения на образующих C^*-алгебры $C_r^*(S)$ формулами

$$\varphi(T_a) = T_{\tau(a)},\ \varphi(T_a^*) = T_{\tau(a)}^*.$$

Затем продолжим φ на мономы $V^S = T_{a_n}^{i_n} T_{a_{n-1}}^{i_{n-1}} ... T_{a_1}^{i_1} \in \mathrm{Mon}^S$ по формуле

$$\varphi(V^S) = V^{\tau(S)} = T_{\tau(a_n)}^{i_n} T_{\tau(a_{n-1})}^{i_{n-1}} ... T_{\tau(a_1)}^{i_1}.$$

Докажем корректность такого продолжения. То есть если два различных монома V_1^S и V_2^S задают один и тот же оператор на $l^2(S)$, то и $V_1^{\tau(S)} = \varphi(V_1^S)$, и $V_2^{\tau(S)} = \varphi(V_2^S)$ также задают один и тот же оператор на $l^2(L_x)$.

Пусть $V_1^S e_c = V_2^S e_c$ для любого $c \in S$. Покажем, что тогда и $V_1^{\tau(S)} e_y = V_2^{\tau(S)} e_y$ для любого $y \in L_x$. По лемме 2 элемент $y \in L_x$ представляется в виде $y = \tau(c) + kx$ для некоторых $c \in S$ и $k, 0 \le k \le n-1$. Тогда, используя равенство (12), мы получаем следующую цепочку равенств:

$$V_1^{\tau(S)} e_y = (V_1^{\tau(S)})^{(k)} e_{\tau(c)+kx} = (V_1^{\tau(S)})^{(k)} U_k e_c = U_k V_1^S e_c = U_k V_2^S e_c =$$

$$= (V_2^{\tau(S)})^{(k)} U_k e_c = (V_2^{\tau(S)})^{(k)} e_{\tau(c)+kx} = V_2^{\tau(S)} e_y.$$

Таким образом, имеем требуемое равенство $V_1^{\tau(S)} = V_2^{\tau(S)}$.

Наконец, продолжим отображение φ по линейности на конечные линейные комбинации мономов $A^S = \sum\limits_{i=1}^{p} \alpha_i V_i^S \in P(S)$:

$$\varphi(A^S) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi(V_i^S) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i V_i^{\tau(S)} = A^{\tau(S)}.$$

Корректность этого продолжения показывается аналогично, как и для мономов, с помощью равенства (13).

Нетрудно видеть, что φ является унитальным $*$-гомоморфизмом на $*$-подалгебре $P(S)$.

Ввиду равенства (9) и (13), каждый оператор $A^{\tau(S)}$ может быть представлен в виде

$$A^{\tau(S)} = \bigoplus_{k=0}^{n-1} U_k A^S U_k^*.$$

Следовательно, имеется равенство для норм $\|A^{\tau(S)}\| = \|A^S\|$, и $*$-гомоморфизм φ является изометрическим на плотной в $C_r^*(S)$ инволютивной подалгебре $P(S)$. Таким образом, φ продолжается по непрерывности на всю C^*-алгебру $C_r^*(S)$ и является унитальным изометрическим $*$-гомоморфизмом C^*-алгебр. Единственность указанного гомоморфизма очевидна. $\square$

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности, проект № 1.13556.2019/13.1.

Литература

1. *Coburn L.A.* The C^*-algebra generated by an isometry // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, N 5. P. 722–726.
2. *Douglas R.G.* On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries // Acta Math. 1972. V. 128. P. 143–152.

3. *Murphy G.J.* Ordered groups and Toeplitz algebras // J. Oper. Theory. 1987. V. 18. P. 303–326.

4. *Li X.* Semigroup C^*-Algebras. Operator Algebras and Applications. Abel Symposia. V. 12. Springer, Cham, 2016.

5. *Хелемский А.Я.* Гомология в банаховых и топологических алгебрах. Москва : Изд-во МГУ, 1986.

6. *Clifford A.H.* Extensions of semigroups // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 68, N 2. P. 165–173.

7. *Rédei L.* Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie // Acta Sci. Math. Szeged. 1952. V. 14. P. 252–273.

8. *Глускин Л.М., Перепелицын И.Л.* Нормальные расширения полугрупп // Изв. вузов. Матем. 1972. № 12. С. 46–54.

9. *Глускин Л.М.* Нормальные расширения коммутативных полугрупп // Изв. вузов. Матем. 1985. Т. 29, № 9. С. 14–22.

10. *Липачева Е.В., Овсепян К.Г.* Автоморфизмы некоторых подалгебр алгебры Тёплица // Сиб. матем. журн. 2016. Т. 57, № 3. С. 666–674.

11. *Аухадиев М.А., Григорян С.А., Липачева Е.В.* Операторный подход к квантованию полугрупп // Матем. сб. 2014. Т. 205, вып. 3. С. 15–40.

12. *Григорян С.А., Липачева Е.В., Ситдиков А.С.* Сети градуированных C^*-алгебр над частично упорядоченными множествами // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, вып. 6. С. 1–19.

13. *Гумеров Р.Н.* Предельные автоморфизмы C^*-алгебр, порожденных изометрическими представлениями полугрупп рациональных чисел // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59, № 1. С. 95–109.

14. *Гумеров Р.Н., Липачева Е.В., Григорян Т.А.* Об индуктивных пределах систем C^*-алгебр // Изв. вузов. Матем. 2018. Т. 62, вып. 7. С. 79–85.

15. *Lipacheva E.V.* Embedding Semigroup C*-algebras into Inductive Limits // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. P. 667–675.

16. *Gumerov R.N., Lipacheva E.V., Grigoryan T.A.* On a topology and limits for inductive systems of C^*-algebras // Int. J. Theor. Phys. 2019. https://doi.org/10.1007/s10773-019-04048-0. Accessed 2019.

17. *Grigoryan S.A., Gumerov R.N., Lipacheva E.V.* On Extensions of Semigroups and Their Applications to Toeplitz Algebras // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. P. 2052–2061.

18. *Мёрфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. Москва : Факториал, 1997.

19. *Ляпин Е.С.* Полугруппы. Москва : Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1960.

20. *Клиффорд А., Престон Г.* Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. Москва : Мир, 1972.

References

1. *Coburn L.A.* The C^*-algebra generated by an isometry. Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, N 5. P. 722–726.

2. *Douglas R.G.* On the C^*-algebra of a one-parameter semigroup of isometries. Acta Math. 1972. V. 128. P. 143–152.

3. *Murphy G.J.* Ordered groups and Toeplitz algebras. J. Oper. Theory. 1987. V. 18. P. 303–326.

4. *Li X.* Semigroup C^*-Algebras. Operator Algebras and Applications. Abel Symposia. V. 12. Springer, Cham, 2016.

5. *Helemskii A.Ya.* Homology of Banach and Topological Algebras. Moscow : Izd-vo MGU, 1986. 288 p. (in Russian).

6. *Clifford A.H.* Extensions of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 68, N 2. P. 165–173.

7. *Rédei L.* Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie. Acta Sci. Math. Szeged. 1952. V. 14. P. 252–273.

8. *Gluskin L.M., Perepelicyn, I. L.* Normal extensions of semigroups. Izv. VUZ. Matem. 1972. N 12. P. 46–54. (in Russian).

9. *Gluskin L.M.* Normal extensions of commutative semigroups. Izv. VUZ. Matem. 1985. V. 29, N 9. P. 14–22. (in Russian).

10. *Lipacheva E.V., Hovsepyan K.H.* Automorphisms of some subalgebras of the Toeplitz algebra. Sib. Matem. J. 2016. V. 57, N 3. P. 666–674. (in Russian).

11. *Aukhadiev M.A., Grigoryan S.A., Lipacheva E.V.* Operator approach to quantization of semigroups. Matem. Sb. 2014. V. 205, N 3. P. 15–40. (in Russian).

12. *Grigoryan S.A., Lipacheva E.V., Sitdikov A.S.* Nets of graded C^*-algebras over partially ordered sets. Algebra and Analysis. 2018. V. 30, N 6. P. 1–19. (in Russian).

13. *Gumerov R.N.* Limit Automorphisms of C^*-algebras Generated by Isometric Representations for Semigroups of Rationals. Sib. Matem. J. 2018. V. 59, N 1. P. 95–109. (in Russian).

14. *Gumerov R.N., Lipacheva E.V., Grigoryan T.A.* On Inductive Limits for Systems of C^* -algebras. Izv. VUZ. Matem. 2018. V. 62, N 7. P. 79–85. (in Russian).

15. *Lipacheva E.V.* Embedding Semigroup C*-algebras into Inductive Limits. Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. P. 667–675.

16. *Gumerov R.N., Lipacheva E.V., Grigoryan T.A.* On a topology and limits for inductive systems of C^*-algebras. Int. J. Theor. Phys. 2019. https://doi.org/10.1007/s10773-019-04048-0. Accessed 2019.

17. *Grigoryan S.A., Gumerov R.N., Lipacheva E.V.* On Extensions of Semigroups and Their Applications to Toeplitz Algebras. Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. P. 2052–2061.

18. *Murphy G.J.* C^*-algebras and operator theory. Moscow : Factorial, 1997. 336 p. (in Russian).

19. *Lyapin E.S.* Semigroups. Moscow : Fizmatlit, 1960. 592 p. (in Russian).

20. *Clifford A.H., Preston G.B.* The Algebraic Theory of Semigroups. V. 1. Moscow : Mir, 1972. 288 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 05.11.2019