МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 15 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение $f(x)$.

2. Решите неравенство
$$x^2-2x+1-\left|x^3-1\right|-2\left(x^2+x+1\right)^2\geqslant 0.$$

3. В треугольник ABC вписаны два *равных* прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 – на стороне AC). Известно, что $PS=12$, $P_1S_1=3$. Найдите площадь треугольника ABC.

4. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих равенству $x^2+xy=30\,000\,000$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1\leqslant a\leqslant 70$, $1\leqslant b\leqslant 50$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств
$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\geqslant 1,\\ x\leqslant a,\\ y\leqslant b,\end{cases}$$
такова, что число $2S$ кратно 5.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB=3$, $AC=4$, $\angle BAC=60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

7. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases}3|y|-4|x|=6,\\ x^2+y^2-14y+49-a^2=0\end{cases}$$
а) имеет ровно 3 решения;

б) имеет ровно 2 решения.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

БИЛЕТ 16 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция $f(x)$ принимает соответственно значения 6, 14 и 14. Найдите наибольшее возможное значение $f(x)$.

2. Решите неравенство
$$x^2+2x+1-\left|x^3+1\right|-2\left(x^2-x+1\right)^2 \leqslant 0.$$

3. В треугольник ABC вписаны два *равных* прямоугольника $PQRS$ и $P_1Q_1R_1S_1$ (при этом точки P и P_1 лежат на стороне AB, точки Q и Q_1 лежат на стороне BC, а точки R, S, R_1 и S_1 – на стороне AC). Известно, что $PS=3$, $P_1S_1=9$. Найдите площадь треугольника ABC.

4. Найдите количество пар целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющих равенству $y^2-xy=700\,000\,000$.

5. Найдите количество пар целых чисел $(a;b)$ таких, что $1\leqslant a\leqslant 80$, $1\leqslant b\leqslant 30$, и при этом площадь S фигуры, заданной системой неравенств
$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\geqslant 1,\\ x\leqslant a,\\ y\leqslant b,\end{cases}$$
такова, что число $2S$ кратно 5.

6. В треугольнике ABC известно, что $AB=4$, $AC=6$, $\angle BAC=60^\circ$. Продолжение биссектрисы AA_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке A_2. Найдите площади треугольников OA_2C и A_1A_2C. (O – центр окружности, описанной около треугольника ABC).

7. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases}5|x|-12|y|=5,\\ x^2+y^2-28x+196-a^2=0\end{cases}$$
а) имеет ровно 3 решения;

б) имеет ровно 2 решения.