

Олимпиада по теоретической физике. МФТИ, 2019

1 Обобщённый осциллятор (М.Г. Иванов)

Нерелятивистская частица с массой m совершает одномерные колебания в гладком потенциале $U(x)$, при этом период колебаний T не зависит от энергии частицы E . Найти общий вид потенциала $U(x)$.

Решение

1) Потенциал не должен иметь «полочек» (интервалов на которых $\frac{dU}{dx} = 0$), т.к. при попадании частицы на такую полочку она (в зависимости от энергии) может находиться там сколь угодно долго, что противоречит условию постоянства T .

2) Потенциал должен представлять собой потенциальную яму с бесконечно высокими стенками, чтобы при любой энергии движение было периодическим.

3) Потенциал не может иметь локальных максимумов в области движения частицы, т.к. для частицы с энергией равной высоте локального максимума период неограниченно нарастает.

4) Потенциал (в области доступной для частицы) имеет один минимум и разбивается на два участка: «левая стенка» (левее минимума) и правая стенка (правее минимума). Опишем потенциал с помощью двух функций: $x_1(U)$ — положение левой стенки, как функция потенциальной энергии и $x_2(U)$ — положение правой стенки. Не теряя общности предположим (мы всегда можем сдвинуть начало отсчёта по x и U), что $x_1(0) = x_2(0) = 0$ (минимальная потенциальная энергия равна 0 и достигается при нулевой координате). Введём также функцию $L(U) = x_2(U) - x_1(U)$ — ширина ямы на энергии U .

5) Введём переменную p , задающую модуль импульса

$$p = \sqrt{2m(E - U)}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dU}{dx}, \quad p_0 = \sqrt{2mE}, \quad U(p, p_0) = \frac{p_0^2}{2m} - \frac{p^2}{2m}.$$

Время движения частицы по левой стенке

$$T_1 = \int_0^{p_0} \frac{dp}{|dU/dx_1|} = - \int_0^{p_0} \frac{dx_1}{dU} dp.$$

Время движения частицы по правой стенке

$$T_2 = \int_0^{p_0} \frac{dp}{|dU/dx_2|} = \int_0^{p_0} \frac{dx_2}{dU} dp.$$

Период колебания

$$T = 2(T_1 + T_2) = 2 \int_0^{p_0} \left(\frac{dx_2}{dU} - \frac{dx_1}{dU} \right) dp = 2 \int_0^{p_0} \frac{dL}{dU} dp.$$

Мы видим, что период колебаний задаётся функцией ширины ямы $L(U)$.

6) Одно из решений полученного функционального уравнения на $L(U)$ мы знаем, оно соответствует гармоническому осциллятору:

$$L(U) = 2\sqrt{2U/k}.$$

7) Осталось проверить его единственность.

$$T = 2 \int_0^{p_0} \frac{dL}{dU} dp = \sqrt{2m} \int_0^E \frac{dL}{dU} \frac{dU}{\sqrt{E-U}} = \sqrt{2m} \int_0^1 E^{-1/2} \frac{\partial L(Eu)}{\partial u} \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \sqrt{2m} \int_0^1 \sqrt{E} L'(Eu) \frac{du}{\sqrt{1-u}}$$

$$\frac{dT}{dE} = \sqrt{2m} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial E} \left(\sqrt{E} L'(Eu) \right) \frac{du}{\sqrt{1-u}} = \sqrt{2m} \int_0^1 g(Eu) \underbrace{\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}}_{f>0} du = 0,$$

$$g(U) = \frac{L''U + L'/2}{\sqrt{U}}.$$

При $E \rightarrow 0$ получаем, что $g(0) = 0$. При увеличении E интегрирование с положительным весом f охватывает всё большие и большие диапазоны по $U = Eu$, так что $g(U) \equiv 0$, отсюда находим, что $L(U) \sim \sqrt{U}$, как и было для гармонического осциллятора.

2 Электрон улетает от магнитного монополя (А.А. Пухов)

Монополь с магнитным зарядом g зафиксирован в начале координат. От него улетает нерелятивистский электрон с начальным расстоянием r_0 и скоростью v_0 , нормальная к радиусу компонента которой $v_{0\perp}$. Покажите, что электрон движется по поверхности конуса с вершиной в начале координат. Найдите угол раствора этого конуса θ . Исследуйте характер движения электрона по конусу. Чему равен θ при $r_0 = 1$ нм, $v_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ с, $v_{0\perp} = 0.5v_0$? Масса электрона 10^{-27} г, заряд $1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, скорость света $3 \cdot 10^{10}$ см/с, постоянная Планка 10^{-27} эрг · с.

Решение

Впервые задача была решена Пуанкаре в связи с особенностями движения электронов вблизи намагниченной иглы катода. Магнитное поле монополя радиально $\mathbf{H} = -g\mathbf{r}/r^3$, поэтому уравнение движения электрона имеет вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{eg}{c} \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1)$$

Это уравнение богато на интегралы движения. Умножая (1) скалярно на $\dot{\mathbf{r}}$, получаем первый интеграл движения $|\dot{\mathbf{r}}| = v_0$, связанный с тем, что сила Лоренца не совершает работу. Умножая (1) векторно на $\dot{\mathbf{r}}$ и используя формулу «бац минус цаб»

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = -\frac{eg}{c} \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2)$$

получаем второй интеграл движения

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{l} + \mathbf{L}) = 0. \quad (3)$$

Это закон сохранения суммарного момента импульса электрона $\mathbf{l} = m\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ и электромагнитного поля $\mathbf{L} = egr/cr$, вектор Пойнтинга которого закручен вокруг оси монополь-электрон. Умножая (2) скалярно на $\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, убеждаемся, что хотя вектор \mathbf{l} и поворачивается, его величина остается постоянной $|\mathbf{l}| = mr_0v_{0\perp}$. Это дает нам третий интеграл движения. Четвертый интеграл движения $|\mathbf{L}| = eg/c$ очевиден.

Полученные интегралы движения позволяют найти траекторию электрона $\mathbf{r}(t)$. Поскольку $\mathbf{L} \perp \mathbf{r}$, $\mathbf{L} \parallel \dot{\mathbf{r}}$, а их векторная сумма сохраняется $\mathbf{L} + \mathbf{L} = \text{const}$, траектория $\mathbf{r}(t)$ лежит на поверхности конуса с осью, параллельной $\mathbf{L} + \mathbf{L}$ и углом раствора

$$\text{tg}\theta = \frac{mr_0v_{0\perp}c^2}{eg}. \quad (4)$$

Знаатоки понимают, что e и g не независимы, а именно, $eg = \hbar c/2$ либо целое кратное от него. Это знаменитое условие квантования заряда Дирака связано с калибровочной инвариантностью квантовой механики. При заданных в условии параметрах из (4) получаем $\theta = 45^\circ$.

Конец вектора $\mathbf{r}(t)$ вращается по этому конусу с азимутальной относительно оси скоростью $\dot{\phi}$, определяемой сохранением полного импульса

$$J = mr^2(t)\dot{\phi}, \quad (5)$$

где $J = \sqrt{\mathbf{L}^2 + \mathbf{L}^2} = \sqrt{m^2r_0^2v_{0\perp}^2 + e^2g^2/c^2}$. Частота вращения $\dot{\phi} \propto r^{-2}$ уменьшается по мере удаления электрона от монополя, и винтовая линия траектории на конусе постепенно выпрямляется. Для того, чтобы найти $r(t)$, воспользуемся интегралами движения $|\dot{\mathbf{r}}| = v_0$ и $|\mathbf{L}| = mrv_0 \sin\psi = mr_0v_{0\perp}$, где ψ угол между векторами \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$. Поскольку $dr = v_0 \cos\psi dt$, для $\mathbf{r}(t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{r}^2 + \frac{v_{0\perp}^2 r_0^2}{r^2} = v_0^2, \quad (6)$$

которое легко интегрируется, если сделать замену $r \rightarrow r^2$. Это дает

$$r^2(t) = r_0^2 + v_0^2 t^2. \quad (7)$$

Решение (5) имеет вид

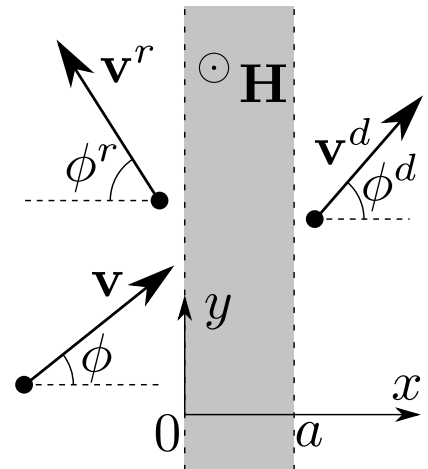
$$\varphi(t) = \frac{J}{mr_0v_0} \text{arctg} \frac{v_0 t}{r_0} \quad (8)$$

Траектория электрона является геодезической линией на конусе. При $mr_0v_{0\perp} \ll eg/c$ конус сворачивается в линию, электрон улетает от монополя по прямой. Наоборот, при $mr_0v_{0\perp} \gg eg/c$ конус разворачивается в плоскость, а траектория электрона превращается в прямую линию.

3 Магнитное рассеяние 2.0 (Л.А. Мельниковский)

В плоском слое $0 < x < a$ создано однородное магнитное поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$, направленное по оси $0z$ (толщиной переходных областей можно пренебречь). Исследуйте рассеяние нерелятивистских α -частиц этим слоем: считая, что они падают со скоростью $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ из области $x < 0$:

1. найдите скорость \mathbf{v}^r движения отразившихся частиц;
2. найдите скорость \mathbf{v}^d движения прошедших частиц;
3. предложите разумное определение коэффициентов отражения R и прохождения D ;
4. постройте (качественно) график зависимости $D(a)$;
5. найдите R при $a \ll \hbar/(mv)$, где m — масса протона.



Решение

Уравнение Шредингера в магнитном поле имеет вид (скорость света считаем единичной)

$$\frac{1}{8m} (\hat{\mathbf{p}} - 2e\mathbf{A})^2 \Psi = E\Psi.$$

Здесь учтено, что α -частица имеет заряд $2e > 0$, массу $4m$ и лишена спина. Выберем векторный потенциал вдоль оси Oy : $\mathbf{A} = (0, A, 0)$, причем

$$A = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ xH, & 0 < x < a; \\ aH, & a \leq x. \end{cases}$$

В этой калибровке волновую функцию стационарного состояния можно искать в виде $\Psi = \psi(x) \exp(iky)$, где $\hbar k = 4mv_y$, а $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{8m} \psi'' + U\psi = E\psi, \quad \text{причем}$$

$$U(x) = \frac{(2mv_y - eA)^2}{2m}, \quad E = 2mv^2.$$

Кинетическая энергия частицы не меняется при рассеянии в магнитном поле, следовательно, модули скорости отраженных v^r и прошедших v^d частиц равны скорости падающих:

$$v^r = v^d = v. \quad (9)$$

Функция $U(x)$ определяет « y -компоненту» кинетической энергии:

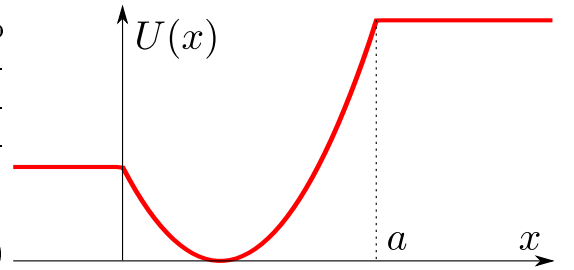
$$\begin{aligned} 2m (v_y^r)^2 &= U(0) = 2mv_y^2, \\ 2m (v_y^d)^2 &= U(a) = \frac{(2mv_y - eHa)^2}{2m}, \end{aligned}$$

так что «угол падения равен углу отражения» $\phi^r = \phi$, а угол преломления определяется выражением

$$\phi^d = \arcsin \frac{2mv_y - eHa}{2mv} = \arcsin \left(\sin \phi - \frac{eHa}{2mv} \right). \quad (10)$$

Уравнение непрерывности выполняется независимо для всех компонент плотности тока \mathbf{J} (вычисляемой по полной волновой функции Ψ). Естественным определением коэффициентов прохождения и отражения является отношение x -компонент плотности тока $J_x \equiv j$ (вычисляемых по функции ψ):

$$R = j_r/j_i, \quad D = j_d/j_i, \quad (11)$$



где индексы i, r, d относятся к падающей, отраженной и прошедшей волнам соответственно. Коэффициенты D и R задают вероятности падающей частице пройти (отразиться) через слой, и $D + R = 1$.

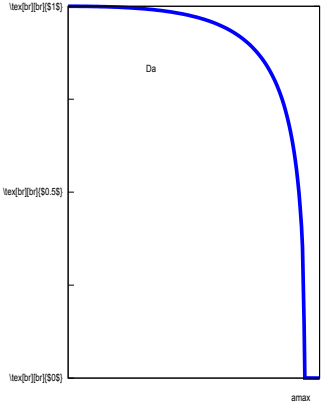


Рис. 1: $v_y < 0$

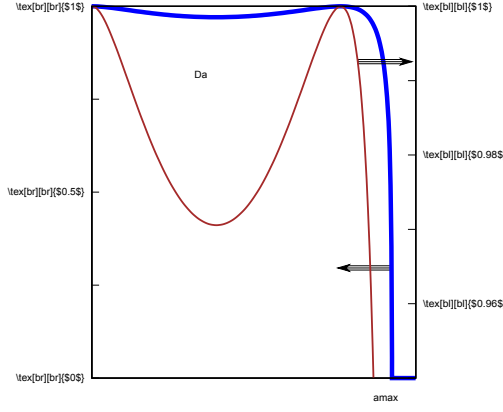


Рис. 2: $v_y > 0$

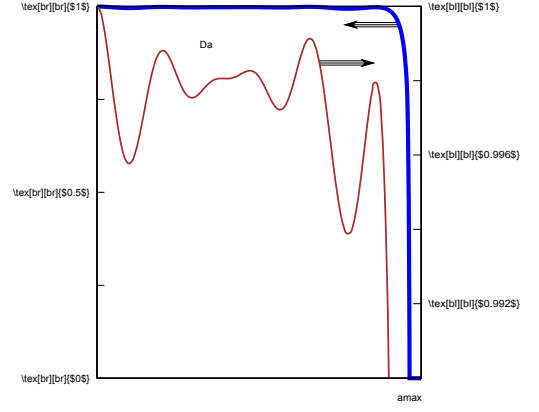


Рис. 3: $a_{\max} > \hbar/(mv)$

Волновая функция вне слоя имеет обычный вид для задачи рассеяния

$$\Psi = e^{iky} \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx}, & x < 0; \\ d e^{iqx}, & x > a, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\hbar k = 4mv_x, \quad (13)$$

$$\hbar^2 q^2 = 16m^2 v_x^2 + 4eHa(4mv_y - eHa). \quad (14)$$

Ясно, что коэффициент прохождения равен нулю при $a > a_{\max}$, где

$$a_{\max} = 2m \frac{v + v_y}{eH} \quad (15)$$

определяется из условия $U(a_{\max}) = E$. При $a < a_{\max}$ коэффициент прохождения близок к единице $D \lesssim 1$ (надбарьерное прохождение) и точно обращается в 1 при $a = 0$ (магнитное поле отсутствует). Возможные графики $D(a)$ приведены на рисунках 1, 2 и 3. На зависимости $D(a)$ могут быть заметны (см. рис. 3) интерференционные эффекты если $a_{\max} > \hbar/(mv)$.

При $a \ll \hbar/(mv)$ асимптотики (12) можно шивать прямо при $x = 0$:

$$\begin{aligned} 1 + r &= d \\ k - kr &= qd. \end{aligned}$$

Отсюда находим коэффициент прохождения при $a \leq a_{\max}$:

$$D = |d|^2 \frac{q}{k} = \frac{4kq}{(q+k)^2}. \quad (16)$$

4 Квази-связанный уровень в мелкой периодически-структурированной двумерной яме (С.С. Вергелес)

Двумерный потенциал имеет вид

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -\frac{\hbar^2}{ma} (\kappa_0 + \kappa_1 \cos(\Lambda y)), & |x| < a/2, \\ U(x, y) &= 0, & |x| > a/2, \end{aligned} \quad (17)$$

где m — масса частицы, параметры потенциала $\kappa_1 < \kappa_0$ положительны и малы, $\kappa_0 a \ll 1$, $\kappa_0/\Lambda \ll 1$, и, кроме того, $\Lambda a \ll 1$. Найдите глубину и ширину (скорость распада) квази-связанного в x -направлении состояния частицы, имеющего нулевой квази-импульс вдоль y -направления.

Решение

Сперва исследуем, какова структура связанных уровней при отсутствии периодической модуляции потенциала, т.е. когда $\kappa_1 = 0$. В этом случае потенциал $U(x)$ однороден вдоль y -направления, поэтому импульс вдоль этого направления сохраняется. Волновую функцию ищем в виде

$$\psi = \phi(x) \exp(iky), \quad (18)$$

после чего двумерное стационарное уравнение Шредингера сводится к одномерному

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \phi + U(x)\phi = \left(E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \phi. \quad (19)$$

Условие $\kappa_0 a \ll 1$ означает, что потенциальная яма мелкая, т.е. связанный уровень один и для его нахождения яму можно приблизить δ -потенциалом:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} \delta(x). \quad (20)$$

Используя известное решение для связанного уровня в δ -потенциале, получаем, что связанный уровень в нашей задаче имеет энергию и волновую функцию

$$E = \frac{\hbar^2(k^2 - \kappa_0^2)}{2m}, \quad \psi = \exp(-\kappa_0|x| +iky). \quad (21)$$

Вернёмся теперь к случаю $\kappa_1 \neq 0$. В этом случае k будет уже не импульсом, а квази-импульсом, поскольку в y направлении частица распространяется в периодическом потенциале. В нашем случае удобно разложить соответствующую функцию Блоха по Фурье-гармоникам:

$$\psi(x, y) = \exp(iky) \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \psi_l(x) \exp(il\Lambda y). \quad (22)$$

Потенциал достаточно представить по-прежнему в приближённом δ -функциональном виде (приближение допустимо в силу условия $\Lambda a \ll 1$)

$$U(x, y) = -\frac{\hbar^2}{m} (\kappa_0 + \kappa_1 \cos(\Lambda y)) \delta(x). \quad (23)$$

Тогда функции поперечной координаты $\psi_l(x)$ для состояния с энергией E должны иметь вид

$$\psi_l(x) = \phi_l \exp(-q_l|x|), \quad q_l = \sqrt{(k + \Lambda l)^2 - E/2m\hbar^2}, \quad (24)$$

чтобы удовлетворять стационарному уравнению Шредингера в области $|x| > 0$. Поскольку речь идёт в том числе и о квази-связанном состоянии, то q_l не может находиться в III квадранте (иметь отрицательными и действительную и мнимую части). Если эта мнимая часть отлична от нуля, то мы имеем дело с уходом частицы от потенциала, т.е. распадом квази-связанного состояния. Спроектируем стационарное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{\hbar^2}{m} (\kappa_0 + \kappa_1 \cos(\Lambda y)) \delta(x) \psi = E \psi \quad (25)$$

на функции $\exp(-i(k + l\Lambda)y)$, в результате чего получим

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_l - \frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} \delta(x) - \frac{\hbar^2 \kappa_1}{2m} \delta(x) (\psi_{l+1} + \psi_{l-1}) = E \psi_l \quad (26)$$

Сшивка каждого из этих уравнений в окрестности $x = 0$ приводит к системе уравнений на коэффициенты ϕ_l

$$(q_l - \kappa_0)\phi_l + \frac{\kappa_1}{2}(\phi_{l+1} + \phi_{l-1}) = 0. \quad (27)$$

Дальнейшее рассмотрение ограничим условием $k = 0$, которое дано в условии. Качественная структура волновой функции квази-связанного состояния может быть описана следующим образом. В главном приближении она есть линейная комбинация (с равными коэффициентами) связанных состояний с импульсом $\pm\Lambda$ (что означает $\phi_1 = \phi_{-1} = 1$). Однако ненулевая модуляция потенциала $\kappa_1 \neq 0$ приводит к тому, что появляется ненулевой малый ϕ_0 , для которого q_0 имеет ненулевую мнимую часть, что приводит к медленному уходу частицы из ямы.

Проведём вычисления. Выпишем уравнения (27) на первые коэффициенты разложения, учитывая симметрию уравнений $l \rightarrow -l$:

$$(q_0 - \kappa_0)\phi_0 = -\kappa_1\phi_1. \quad (28)$$

$$(q_1 - \kappa_0)\phi_1 = -\frac{\kappa_1}{2}(\phi_0 + \phi_2), \quad (29)$$

$$(q_2 - \kappa_0)\phi_2 = -\frac{\kappa_1}{2}(\phi_1 + \phi_3), \dots \quad (30)$$

В этой системе уравнений величина $q_1 \ll \Lambda$, тогда как $q_0, q_2 \sim \Lambda$, см. (24). Это разделение как раз и обеспечивает то, что все коэффициенты разложения кроме ϕ_1 малы, $\phi_0, \phi_2 \ll \phi_1$. Кроме того, $\phi_3 \sim (\kappa_1/\Lambda)\phi_2 \ll \phi_1$ (ϕ_4 ещё меньше и т.д.). Поэтому в уравнении (30) можно пренебречь ϕ_3 , после чего система уравнений становится замкнутой и может быть решена. В уравнениях (28,30) пишем приближённо

$$E \approx \frac{\hbar^2\Lambda^2}{2m}, \quad q_0 - \kappa_0 \approx -i\Lambda, \quad q_2 - \kappa_0 \approx \sqrt{3}\Lambda \quad (31)$$

после чего получаем

$$\phi_0 = -\frac{i\kappa_1}{\Lambda}\phi_1, \quad \phi_2 = -\frac{\kappa_1}{\sqrt{3}\Lambda}\phi_1, \quad \left(q_1 - \kappa_0 - \frac{\kappa_1^2}{2\Lambda} \left(i + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \right) \phi_1 = 0. \quad (32)$$

Энергия квази-связанного уровня находится из условия существования нетривиального решения для коэффициентов разложения ϕ_l , то есть из уравнения

$$q_1 - \kappa_0 - \frac{\kappa_1^2}{2\Lambda} \left(i + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) = 0, \quad E \approx \frac{\hbar^2}{2m} \left(\Lambda^2 - \kappa_0^2 - \frac{i\kappa_0\kappa_1^2}{\Lambda} \right) \quad (33)$$

Действительная часть собственного значения гамильтониана E' есть энергия квази-связанного состояния, а мнимая часть E'' есть половина ширины уровня. Отметим, что величина q_1 имеет малую положительную мнимую часть (тогда как q_0 имеет малую отрицательную мнимую часть). Это означает, что квантовомеханическая вероятность из моды $l = \pm 1$ постепенно движется к потенциалу, где она переводится модуляцией κ_1 в моду $l = 0$, после чего безвозвратно утекает от потенциала.

5 Резонанс Ферми (В.П. Крайнов)

В линейной молекуле углекислого газа имеются три нормальных колебания. Два из них являются линейными, когда атомы кислорода колеблются вдоль оси молекулы. Одно из них, при котором атомы кислорода колеблются в противофазе друг относительно друга, имеет высокую

частоту. Другое, при котором атомы кислорода колеблются в фазе, имеет меньшую частоту (примерно $\nu_1 = 1500 \text{ см}^{-1}$). Она оказывается приблизительно в два раза больше, чем частота симметричных колебаний ν_2 атомов кислорода в направлении, перпендикулярном оси молекулы (то есть, $2\nu_2 \approx \nu_1$). Показать, что несмотря на малость взаимодействия колебаний ν_1 и $2\nu_2$, возникает так называемый *резонанс Ферми*, приводящий к сильному перемешиванию этих колебаний.

Решение

Ввиду симметрии постановки задачи по отношению к обоим атомам кислорода можно рассматривать только один атом кислорода. Обозначим через Z ось молекулы, а через X – поперечное направление, соответствующее поперечному колебанию атома кислорода относительно оси молекулы. Без ограничения общности массу атома кислорода и частоту его поперечных колебаний ν_2 можно положить равными единице.

Данная задача математически эквивалентна задаче о малых колебаниях математического маятника (единичной длины) с собственной частотой, равной единице, и с координатой: $x = \sin \varphi$; $\varphi \ll 1$ вдоль оси X , у которого точка подвеса совершает вертикальные колебания (вдоль оси молекулы Z) с малой амплитудой $\epsilon \ll 1$ и частотой, равной двум:

$$z = \cos \varphi + \epsilon \sin 2t \quad (34)$$

Эта формула требует пояснений. Амплитуды как поперечного колебания молекулы кислорода, так и ее продольного колебания хотя и малы по сравнению с размером молекулы L , но они не в равноправном положении друг по отношению к другу. Пусть при поперечном колебании атом кислорода сначала отклонился от оси молекулы на величину $a \ll L$. Пусть он затем еще отклонился на такую же величину при продольном колебании вдоль оси молекулы. Какое влияние это окажет на амплитуду поперечного колебания? Произойдет ее дополнительное отклонение на величину a^2/L . Это - тоже малая величина, но уже второго порядка малости. Поэтому можно рассматривать сначала только продольное колебание, решить колебательную задачу для него, а затем, считая продольное колебание заданным, рассматривать, как оно будет постепенно раскачивать поперечное колебание, как ребенок раскачивает качели. Это существенно упрощает задачу и отражено в приведенной формуле (34). Две степени свободы по направлениям X и Z стоило бы рассматривать, если бы имели место большие отклонения атомов порядка размера молекулы - тогда и взаимодействие колебаний - того же порядка величины.

Функция Лагранжа такого движения имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{dz}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right) + \cos \varphi. \quad (35)$$

Подставляя координаты в (34), находим функцию Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \cos \varphi - 2\epsilon \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cos 2t. \quad (36)$$

Так как

$$-\sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cos 2t = 2 \cos \varphi \cdot \sin 2t + \frac{d}{dt} (\cos \varphi \cdot \cos 2t),$$

то, устраняя полную производную по времени из функции Лагранжа (36), перепишем ее в более простом виде

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 + \cos \varphi (1 + 4\varepsilon \sin 2t). \quad (37)$$

Запишем уравнение Лагранжа: $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$. Подставляя в него функцию (36), находим линейное уравнение Матье для малого угла отклонения атома кислорода от оси молекулы $\varphi \ll 1$:

$$\ddot{\varphi} + (1 + 4\varepsilon \cos 2t) \varphi = 0. \quad (38)$$

В нулевом приближении по ε из (38) имеем поперечное колебание атома кислорода с частотой, равной (как указывалось выше) единице:

$$\varphi_0(t) = a \sin t + b \cos t. \quad (39)$$

Ищем решение (38) в форме Флоке:

$$\varphi(t) = \exp(\varepsilon \gamma t) u(t) \quad (40)$$

где γ - характеристический показатель, а $u(t)$ - периодическая функция времени. В нулевом приближении по ε она равна (39). Подставляя (40) в (38), получим уравнение

$$\ddot{u} + 2\varepsilon \gamma \dot{u} + (\varepsilon^2 \gamma^2 + 1 + 4\varepsilon \cos 2t) u = 0. \quad (41)$$

В первом приближении по ε имеем $u(t) = \varphi_0(t) + \varepsilon u_1(t)$. Подставляя это решение в (41), находим уравнение

$$\ddot{u}_1 + u_1 + 2\gamma_1 (a \cos t - b \sin t) + 2a (\sin 3t - \sin t) + 2b (\cos t + \cos 3t) = 0. \quad (42)$$

Секулярные члены в этом уравнении, пропорциональные $\sin t$ и $\cos t$, должны обратиться в нуль, чтобы в соответствии с теорией Флоке обеспечить периодичность функции u_1 . Отсюда получаем: $\gamma_1 a = -b$; $\gamma_1 b = -a$. Следовательно, $\gamma_1 = \pm 1$. При любом знаке ε решение (40) будет экспоненциально расти со временем, покуда амплитуда колебаний не станет порядка размеров молекулы. Это и есть *резонанс Ферми*.