

Вопросы к экзамену по курсу “Методы теоретической физики II”

для студентов 1 года магистратуры, весенний семестр
2016

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, часть 2

Стационарная теория возмущений

1. Формулировка задачи стационарной теории возмущений.
2. Критерий применимости теории возмущений.
3. Поправка первого порядка к уровням энергии для невырожденного спектра.
4. Поправки к состояниям невырожденного спектра в первом порядке теории возмущений.
5. Поправка второго порядка к уровням энергии для невырожденного спектра.
6. Как изменится энергия основного невырожденного уровня системы, при помещении ее во внешнее поле?
7. Постановка стационарной теории возмущений в случае вырожденного энергетического спектра.
8. Правильные функции нулевого приближения и секулярное уравнение в теории возмущений.
9. Уравнение для определения функции Грина стационарного уравнения Шредингера.
10. Определение функции Грина стационарного уравнения Шредингера как представление оператора.
11. Ряд теории возмущений для функции Грина стационарного уравнения Шредингера.
12. Что определяют полюса функции Грина стационарного уравнения Шредингера?
13. Функция Грина в энергетическом представлении.
14. Выражение для поправок к состояниям в теории возмущений с помощью функции Грина.
15. Выражение для поправок к уровням энергии в теории возмущений с помощью функции Грина.
16. Функция Грина стационарного уравнения Шредингера в координатном представлении для дискретного спектра.
17. Функция Грина стационарного уравнения Шредингера в случае непрерывного спектра.
18. Функция Грина свободной частицы.
19. Основное интегральное уравнение для определения волновой функции в случае непрерывного спектра.
20. Асимптотический вид волновой функции в задаче о рассеянии.
21. Определение дифференциального сечения рассеяния и его связь с амплитудой рассеяния.
22. Борновское приближение в теории рассеяния.
23. Критерий применимости борновского приближения для рассеяния медленных частиц.
24. Критерий применимости борновского приближения для рассеяния быстрых частиц.
25. Как зависит от углов дифференциальное сечение рассеяния медленных частиц в борновском приближении?

26. Особенности угловой зависимости дифференциального сечения рассеяния быстрых частиц в борновском приближении.

Нестационарная теория возмущений

1. Как зависит от времени вектор состояния квантовой системы в представлении Гайзенберга?
2. Как зависит от времени оператор в представлении Гайзенберга?
3. Как определяется вектор состояния квантовой системы в представлении взаимодействия?
4. Уравнение Шредингера в представлении взаимодействия.
5. Итерационный ряд для определения состояния в нестационарной теории возмущений, $T - \text{exp}$.
6. Общее выражение вероятности перехода в нестационарной теории возмущений.
7. Выражение вероятности перехода в первом порядке нестационарной теории возмущений.
8. Критерий применимости нестационарной теории возмущений.
9. Соотношение неопределенностей для энергии и времени.
10. Определение вероятности перехода в непрерывном спектре.
11. Вероятность перехода в единицу времени, “золотое правило” Ферми.
12. Понятие квазистационарного состояния, ширина уровня.
13. Поправка второго порядка к уровню энергии в непрерывном спектре и ее связь с шириной уровня квазистационарного состояния.
14. Связь ширины уровня квазистационарного состояния и вероятности перехода в единицу времени в непрерывном спектре.

КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, часть 3

Многочастичная теория

1. Как можно записать вектор состояния системы, состоящей из двух невзаимодействующих подсистем, находящихся в состояниях $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$?
2. Замкнутая система состоит из двух невзаимодействующих подсистем, обладающих моментами l_1 и l_2 соответственно. Сколько линейно независимых векторов определяют состояния с определенным суммарным моментом?
3. Замкнутая система состоит из двух невзаимодействующих подсистем, обладающих моментами l_1 и l_2 соответственно. Какими квантовыми числами определяется состояние системы с заданным суммарным моментом L ? Записать дираковский вектор состояния.
4. Какие значения может принимать суммарный момент L системы, состоящей из двух подсистем, обладающих моментами l_1 и l_2 соответственно?
5. Пусть $\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2$. Показать, что коммутатор $[\hat{L}_z, \hat{\mathbf{L}}^2] = 0$.
6. Как с помощью коэффициентов Клебша-Гордана определить состояние системы с полным моментом J , если известны состояния подсистем $|j_1, m_1\rangle$ и $|j_2, m_2\rangle$?
7. Чему равно выражение $\sum_{m_1, m_2} \langle j_1 j_2; JM | j_1 m_1 \rangle | j_2 m_2 \rangle \langle j_2 m_2 | \langle j_1 m_1 | j_1 j_2; J' M' \rangle$?
8. Чему равно выражение $\sum_{J, M} \langle j_2 m_2 | \langle j_1 m_1 | j_1 j_2; JM \rangle \langle j_1 j_2; JM | j_1 m'_1 \rangle | j_2 m'_2 \rangle$?
9. Пусть $\Psi(x_1, x_2; t)$ волновая функция системы двух тождественных частиц, чему равен результат действия на нее оператора перестановки частиц $\hat{P}\Psi(x_1, x_2; t) = ?$
10. В каком виде можно записать гамильтониан системы двух взаимодействующих тождественных частиц?

11. Как для системы двух ферми-частиц связаны между собой волновые функции $\Psi(x_1, x_2; t)$ и $\Psi(x_2, x_1; t)$?
12. Как для системы двух бозе-частиц связаны между собой волновые функции $\Psi(x_1, x_2; t)$ и $\Psi(x_2, x_1; t)$?
13. В каком виде можно представить вектор состояния системы N невзаимодействующих тождественных частиц? Как определяется полный набор квантовых чисел?
14. Как можно записать волновую функцию N невзаимодействующих ферми-частиц?
15. Как можно записать волновую функцию N невзаимодействующих бозе-частиц?
16. Для системы двух невзаимодействующих ферми-частиц записать волновую функцию с определенным суммарным спином S .
17. Для системы двух невзаимодействующих бозе-частиц записать волновую функцию с определенным суммарным спином S .
18. Записать спиновые векторы состояния системы двух электронов, обладающих суммарным спином $S = 1$.
19. Записать спиновый вектор состояния системы двух электронов, обладающих суммарным спином $S = 0$.
20. Система двух электронов находится в спиновом состоянии, которое описывается вектором $|+\rangle|+\rangle$. Построить вектор состояния $|S = 1, M_S = 0\rangle$, описывающий состояние с суммарным спином $S = 1$.
21. Система двух электронов находится в спиновом состоянии, которое описывается вектором $|+\rangle|-\rangle$. Представить его в виде суперпозиции состояний с определенным суммарным спином S .
22. Координатная часть волновой функции двух электронов имеет вид $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{n_1}(\mathbf{r}_1)\psi_{n_2}(\mathbf{r}_2) - \psi_{n_1}(\mathbf{r}_2)\psi_{n_2}(\mathbf{r}_1))$. Чему равен суммарный спин S ?
23. Координатная часть волновой функции двух электронов имеет вид $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{n_1}(\mathbf{r}_1)\psi_{n_2}(\mathbf{r}_2) + \psi_{n_1}(\mathbf{r}_2)\psi_{n_2}(\mathbf{r}_1))$. Чему равен суммарный спин S ?
24. Как определяется обменный интеграл для двух слабо взаимодействующих между собой электронов?
25. Записать результат действия оператора рождения на вектор N -частичного состояния тождественных частиц $\hat{a}^+(\varphi)|\psi_1, \dots, \psi_N\rangle = ?$
26. Записать результат действия оператора уничтожения на вектор N -частичного состояния тождественных ферми-частиц $\hat{a}(\varphi)|\psi_1, \dots, \psi_N\rangle = ?$
27. Записать результат действия оператора уничтожения на вектор N -частичного состояния тождественных бозе-частиц $\hat{a}(\varphi)|\psi_1, \dots, \psi_N\rangle = ?$
28. Чему равен коммутатор для системы тождественных бозе-частиц $\hat{a}^+(\varphi_1)\hat{a}^+(\varphi_2) - \hat{a}^+(\varphi_2)\hat{a}^+(\varphi_1)$?
29. Чему равен коммутатор для системы тождественных бозе-частиц $\hat{a}(\varphi_1)\hat{a}(\varphi_2) - \hat{a}(\varphi_2)\hat{a}(\varphi_1)$?
30. Чему равен коммутатор для системы тождественных бозе-частиц $\hat{a}(\varphi_1)\hat{a}^+(\varphi_2) - \hat{a}^+(\varphi_2)\hat{a}(\varphi_1)$?

31. Чему равен антикоммутатор для системы тождественных ферми-частиц $\hat{a}^+(\varphi_1)\hat{a}^+(\varphi_2) + \hat{a}^+(\varphi_2)\hat{a}^+(\varphi_1)$?
32. Чему равен антикоммутатор для системы тождественных ферми-частиц $\hat{a}(\varphi_1)\hat{a}(\varphi_2) + \hat{a}(\varphi_2)\hat{a}(\varphi_1)$?
33. Чему равен антикоммутатор для системы тождественных ферми-частиц $\hat{a}(\varphi_1)\hat{a}^+(\varphi_2) + \hat{a}^+(\varphi_2)\hat{a}(\varphi_1)$?
34. Чему равен антикоммутатор для системы тождественных ферми-частиц $\hat{a}_{\mathbf{p}_1, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \sigma'}^+ + \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \sigma'}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \sigma}$, где $|\mathbf{p}, \sigma\rangle$ – состояние с определенным импульсом и проекцией спина?
35. Чему равен коммутатор для системы тождественных бозе-частиц $\hat{a}_{\mathbf{p}_1, \sigma} \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \sigma'}^+ - \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \sigma'}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \sigma}$, где $|\mathbf{p}, \sigma\rangle$ – состояние с определенным импульсом и проекцией спина?
36. Для системы тождественных бозе-частиц определить результат действия оператора рождения на вектор состояния в пространстве чисел заполнения $a_\beta^+ |n_1, n_2, \dots\rangle = ?$
37. Для системы тождественных бозе-частиц определить результат действия оператора уничтожения на вектор состояния в пространстве чисел заполнения $a_\beta |n_1, n_2, \dots\rangle = ?$
38. Какой смысл имеет оператор $a_\beta^+ a_\beta$, действующий в пространстве чисел заполнения?
39. Чему равно действие оператора $\sum_\beta a_\beta^+ a_\beta$ на вектор состояния в пространстве чисел заполнения?
40. Для системы тождественных ферми-частиц определить результат действия оператора рождения на вектор состояния в пространстве чисел заполнения $a_\beta^+ |n_1, n_2, \dots\rangle = ?$
41. Для системы тождественных ферми-частиц определить результат действия оператора уничтожения на вектор состояния в пространстве чисел заполнения $a_\beta |n_1, n_2, \dots\rangle = ?$
42. Для системы тождественных ферми-частиц выразить оператор $a_\alpha a_\alpha^+$ через оператор числа частиц \hat{N}_α в состоянии $|\alpha\rangle$.
43. Для системы бозе-частиц определить среднее значение оператора $\hat{a}_\beta^+ \hat{a}_\beta$.
44. Для системы бозе-частиц определить среднее значение оператора $\hat{a}_\beta \hat{a}_\beta^+$.
45. Для системы ферми-частиц определить среднее значение оператора $\hat{a}_\alpha^+ \hat{a}_\alpha$.
46. Для системы ферми-частиц определить среднее значение оператора $\hat{a}_\alpha \hat{a}_\alpha^+$.
47. Чему равен коммутатор полевых операторов для системы тождественных бозе-частиц $\hat{\psi}(\mathbf{r}')\hat{\psi}^+(\mathbf{r}) - \hat{\psi}^+(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}')$?
48. Чему равен антикоммутатор полевых операторов для системы тождественных ферми-частиц $\hat{\psi}(\mathbf{r}')\hat{\psi}^+(\mathbf{r}) + \hat{\psi}^+(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r}')$?
49. Записать полевой оператор $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ через операторы уничтожения a_n состояний дискретного базиса $\varphi_n(\mathbf{r})$.
50. Записать полевой оператор $\hat{\psi}^+(\mathbf{r})$ через операторы рождения a_n^+ состояний дискретного базиса $\varphi_n(\mathbf{r})$.
51. Выразить оператор плотности частиц $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ через полевые операторы.
52. Выразить оператор числа частиц \hat{N} через полевые операторы.

53. Записать полевой оператор $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ через операторы уничтожения $a_{\mathbf{p},\sigma}$ в базисе состояний свободных частиц.
54. Записать полевой оператор $\hat{\psi}^+(\mathbf{r})$ через операторы рождения $a_{\mathbf{p},\sigma}^+$ в базисе состояний свободных частиц.
55. Записать операторы уничтожения $a_{\mathbf{p},\sigma}$ через полевые операторы $\hat{\psi}(\mathbf{r})$.
56. Записать одночастичный оператор в представлении чисел заполнения.
57. Записать оператор двухчастичного взаимодействия в представлении чисел заполнения.
58. Записать гамильтониан системы тождественных частиц в представлении чисел заполнения в собственном базисе.

Магнитные взаимодействия

1. Для заряженной частицы записать связь оператора кинематического импульса с обобщенным.
2. Связь оператора магнитного момента со спином частицы.
3. Записать гамильтониан Паули системы заряженных частиц.
4. Преобразование волновой функции частицы при калибровочном преобразовании потенциалов.
5. Записать оператор взаимодействия системы заряженных частиц с электромагнитным полем.
6. Какой вид имеет оператор взаимодействия системы заряженных частиц с однородным магнитным полем?
7. В каком виде можно представить оператор спин-орбитального взаимодействия заряженной частицы в центральном поле? Каков порядок этого взаимодействия по сравнению с атомной?
8. Оценить порядок величины сверхтонкого взаимодействия в атоме водорода.
9. Как определяется гамильтониан свободного электромагнитного поля?
10. Чему равен коммутатор операторов рождения и уничтожения для свободного электромагнитного поля $[a_{\mathbf{k},\alpha}, a_{\mathbf{k},\beta}^+] = ?$
11. Запишите энергетический спектр свободного электромагнитного поля.
12. Как можно определить произвольное состояние свободного электромагнитного поля из основного (вакуума)?
13. Оценить порядок величины электрического дипольного взаимодействия системы зарядов со свободным электромагнитным полем.
14. Как определяется время жизни системы зарядов в возбужденном состоянии в электрическом дипольном приближении?
15. Оценить время жизни свободного атома в возбужденном состоянии в электрическом дипольном приближении.

Матрица плотности

1. Как, зная матрицу плотности системы, определить среднее значения оператора физической величины?
2. В каком виде всегда можно представить матрицу плотности чистого состояния?
3. Для матрицы плотности $\text{Tr} \rho = ?$
4. В каком случае $\text{Tr} \rho^2 = 1$?
5. В каком виде всегда можно представить матрицу плотности смешанного состояния?
6. Для матрицы плотности определить связь ρ^\dagger и ρ .
7. Какой физический смысл имеют диагональные элементы матрицы плотности?
8. Записать уравнение Лиувилля для эволюции матрицы плотности.
9. Записать формальное решение уравнения Лиувилля с помощью оператора эволюции.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Статистические ансамбли

1. Число состояний системы N бесструктурных частиц.
2. Число состояний и энтропия системы.
3. Определение энтропии системы с помощью матрицы плотности.
4. Микроканонический ансамбль.
5. Равновесная матрица плотности микроканонического ансамбля.
6. Канонический ансамбль.
7. Статистическая сумма канонического ансамбля.
8. Какой вид имеет равновесная матрица плотности канонического ансамбля?
9. Зная равновесную матрицу плотности малого канонического ансамбля, записать определение его энергии.
10. Большой канонический ансамбль.
11. Статистическая сумма большого канонического ансамбля.
12. Зная равновесную матрицу плотности большого канонического ансамбля, записать определение его энергии и числа частиц.
13. Функция распределения микроканонического ансамбля.
14. Определите число состояний в микроканоническом ансамбле системы невзаимодействующих бесструктурных частиц.
15. Определите энтропию микроканонического ансамбля системы невзаимодействующих бесструктурных частиц.

Термодинамические соотношения

1. Законы термодинамики.
2. Термодинамическое определение энтропии. Термодинамическая температура.

3. Теплоемкость системы.
4. Основное термодинамическое тождество.
5. Запишите связь между собой всех термодинамических потенциалов.
6. Связь термодинамических производных с якобианами.
7. Чему равен якобиан $\partial(T, S)/\partial(P, V)$?
8. Вычислите якобиан $\partial(T, S)/\partial(\mu, N)$?
9. Условия термодинамического равновесия.
10. Показать, что теплоемкость $C_V > 0$.
11. Связь параметров статистического распределения с термодинамическими величинами.
12. Флуктуации термодинамических величин.

Идеальный больцмановский газ

1. Как можно факторизовать статистическую сумму идеального больцмановского газа?
2. Вычислите статистическую сумму поступательного движения идеального больцмановского газа.
3. Получите свободную энергию идеального больцмановского газа.
4. Получите уравнение состояния идеального больцмановского газа.
5. Определите теплоемкость C_V идеального больцмановского газа.
6. Вычислите $C_p - C_V$ идеального больцмановского газа.
7. Вычислите статистическую сумму ансамбля двухуровневых систем.
8. Вычислите статистическую сумму ансамбля гармонических осцилляторов.

Идеальные квантовые газы

1. Запишите распределение Ферми.
2. Запишите распределение Бозе.
3. Какой знак у химического потенциала бозе-газа.
4. Как определяется Ω -потенциал идеального ферми- и бозе газов?
5. Уравнение состояния идеальных квантовых газов.
6. Импульс и энергия Ферми.
7. Понятие вырожденного ферми-газа.
8. Температурные поправки к термодинамическому потенциалу вырожденного ферми-газа.
9. Температурная зависимость химического потенциала вырожденного ферми-газа.
10. Энтропия вырожденного ферми-газа.
11. Теплоемкость вырожденного ферми-газа.

12. Понятие вырожденного бозе-газа.
13. Определите температуру бозе-конденсации идеального газа.
14. Зависимость от температуры числа частиц в бозе-конденсате.
15. Энтропия вырожденного бозе-газа.
16. Теплоемкость вырожденного бозе-газа.
17. Температурная зависимость химического потенциала идеального бозе-газа в окрестности T_0 при $T > T_0$.
18. Химический потенциал идеальных квантовых газов при высокой температуре.
19. Квантовые поправки к уравнению состояния идеального бoльцмановского газа.

Фазовые переходы

1. Условия равновесия фаз.
2. Классификация фазовых переходов.
3. Фазовый переход I рода. Уравнение Клапейрона-Клаузиуса.
4. Теория фазовых переходов II рода Ландау.
5. Параметр порядка. Разложение термодинамического потенциала по степеням параметра порядка.
6. Зависимость параметра порядка от температуры.
7. Скачок теплоемкости в теории Ландау.
8. Параметр порядка для сверхпроводников.
9. Уравнения Гинзбурга-Ландау.
10. Выражение сверхпроводящего тока через волновую функцию сверхпроводящих электронов.
11. Получить корреляционный радиус ξ из уравнений Гинзбурга-Ландау.
12. Как зависит от температуры корреляционный радиус ξ в теории Гинзбурга-Ландау?
13. Получить уравнение Лондонов из уравнений Гинзбурга-Ландау
14. Как зависит от температуры глубина проникновения поля в сверхпроводник δ в теории Гинзбурга-Ландау.
15. Определить глубину проникновения поля в сверхпроводник δ из уравнений Гинзбурга-Ландау.
16. Определите величину критического магнитного поля из уравнений Гинзбурга-Ландау.
17. Как зависит от температуры отношение $\kappa = \xi/\delta$?