

## ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 9

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция  $f(x)$  принимает соответственно значения 6, 5 и 5. Найдите наименьшее возможное значение  $f(x)$ .
2. Известно, что числа  $x, y, z$  образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью  $\alpha = \arccos\left(-\frac{3}{7}\right)$ , а числа  $\frac{1}{\cos x}, \frac{7}{\cos y}, \frac{1}{\cos z}$  также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите  $\cos^2 y$ .

3. Решите неравенство

$$\log_9 4 + (16 - \log_3^2 2) \log_{162} 3 \leq 64^{\log_4^2 x} - 15 \cdot x^{\log_4 x}.$$

4. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность радиуса 7. Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  пересекаются в точке  $Q$ . Известно, что треугольники  $ADP$  и  $QAB$  подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке).

а) Найдите  $AC$ .

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ACD$  касаются отрезка  $AC$  в точках  $K$  и  $T$  соответственно, причём  $CK : KT : TA = 6 : 1 : 7$  (точка  $T$  лежит между  $K$  и  $A$ ). Найдите  $\angle DAC$  и площадь четырёхугольника  $ABCD$ .

5. Дано число  $5300\dots0035$  (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 495. Сколькими способами это можно сделать?
6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых существует значение параметра  $b$  такое, что система

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{a-y}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{4-x}{4}\right), \\ x^2 + y^2 - 8x - 8y = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды  $MABCD$  со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = 1$ ,  $CD = DA = 2$ , а каждая из плоскостей боковых граней  $MAB$ ,  $MBC$ ,  $MCD$ ,  $MDA$  составляет угол  $45^\circ$  с плоскостью основания.

а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины  $M$ , равна  $\frac{9}{5}$ .

б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

## ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 10

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция  $f(x)$  принимает соответственно значения  $-9$ ,  $-9$  и  $-15$ . Найдите наибольшее возможное значение  $f(x)$ .
2. Известно, что числа  $x, y, z$  образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью  $\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{7}}{4}$ , а числа  $\frac{1}{\sin x}, \frac{4}{\sin y}, \frac{1}{\sin z}$  также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите  $\sin^2 y$ .
3. Решите неравенство

$$\log_5 250 + (4 - \log_5^2 2) \log_{50} 5 \leq 125^{\log_5^2 x} - 24 \cdot x^{\log_5 x}.$$

4. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность радиуса 4. Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  пересекаются в точке  $Q$ . Известно, что треугольники  $ADP$  и  $QAB$  подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке).
  - а) Найдите  $AC$ .
  - б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ACD$  касаются отрезка  $AC$  в точках  $K$  и  $T$  соответственно, причём  $CK : KT : TA = 3 : 1 : 4$  (точка  $T$  лежит между  $K$  и  $A$ ). Найдите  $\angle DAC$  и площадь четырёхугольника  $ABCD$ .
5. Дано число  $800 \dots 008$  (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 198. Сколькими способами это можно сделать?
6. Найдите все значения параметра  $a$  такие, что система

$$\begin{cases} \arccos \left( \frac{4+y}{4} \right) = \arccos(x-a), \\ x^2 + y^2 - 4x + 8y = b \end{cases}$$

имеет не более одного решения при любом значении параметра  $b$ .

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды  $TABCD$  со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = 2$ ,  $CD = DA = 3$ , а каждая из плоскостей боковых граней  $TAB, TBC, TCD, TDA$  составляет угол  $30^\circ$  с плоскостью основания.
  - а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины  $T$ , равна 2.
  - б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

## ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 11

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция  $f(x)$  принимает значения 13, 13 и 35 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение  $f(x)$ .
2. Известно, что числа  $x, y, z$  образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью  $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$ , а числа  $\frac{1}{\cos x}, \frac{3}{\cos y}, \frac{1}{\cos z}$  также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите  $\cos^2 y$ .

3. Решите неравенство

$$27^{\log_3^2 x} - 8 \cdot x^{\log_3 x} \geq \log_{25} 4 + (9 - \log_5^2 2) \log_{250} 5.$$

4. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность радиуса 7. Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  пересекаются в точке  $Q$ . Известно, что треугольники  $ADP$  и  $QAB$  подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке).

а) Найдите  $AC$ .

б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ACD$  касаются отрезка  $AC$  в точках  $K$  и  $T$  соответственно, причём  $CK : KT : TA = 5 : 2 : 7$  (точка  $T$  лежит между  $K$  и  $A$ ). Найдите  $\angle DAC$  и площадь четырёхугольника  $ABCD$ .

5. Дано число  $500 \dots 005$  (80 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 165. Сколькими способами это можно сделать?

6. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых существует значение параметра  $b$  такое, что система

$$\begin{cases} \arcsin\left(\frac{a+y}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{x+3}{3}\right), \\ x^2 + y^2 + 6x + 6y = b \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды  $KABCD$  со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = 3$ ,  $CD = DA = 4$ , а каждая из плоскостей боковых граней  $KAB$ ,  $KBC$ ,  $KCD$ ,  $KDA$  составляет угол  $45^\circ$  с плоскостью основания.

а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины  $K$ , равна 2.

б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?

## ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

БИЛЕТ 12

ШИФР \_\_\_\_\_

Заполняется ответственным секретарем

1. Известно, что для трёх последовательных натуральных значений аргумента квадратичная функция  $f(x)$  принимает соответственно значения 6, 14 и 14. Найдите наибольшее возможное значение  $f(x)$ .
2. Известно, что числа  $x, y, z$  образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью  $\alpha = \arccos \frac{2}{3}$ , а числа  $\frac{1}{\sin x}, \frac{6}{\sin y}, \frac{1}{\sin z}$  также образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите  $\sin^2 y$ .
3. Решите неравенство

$$8^{\log_2^2 x} - 2 \cdot x^{\log_2 x} \geq \log_6 108 + (4 - \log_6^2 3) \log_{108} 6.$$

4. Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность радиуса 6. Лучи  $AB$  и  $DC$  пересекаются в точке  $P$ , а лучи  $BC$  и  $AD$  пересекаются в точке  $Q$ . Известно, что треугольники  $ADP$  и  $QAB$  подобны (вершины не обязательно указаны в соответствующем порядке).
  - а) Найдите  $AC$ .
  - б) Пусть дополнительно известно, что окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ACD$  касаются отрезка  $AC$  в точках  $K$  и  $T$  соответственно, причём  $CK : KT : TA = 2 : 1 : 3$  (точка  $T$  лежит между  $K$  и  $A$ ). Найдите  $\angle DAC$  и площадь четырёхугольника  $ABCD$ .
5. Дано число  $200 \dots 002$  (100 нулей). Требуется заменить некоторые два нуля на ненулевые цифры так, чтобы после замены получилось число, делящееся на 66. Сколькими способами это можно сделать?
6. Найдите все значения параметра  $a$  такие, что система

$$\begin{cases} \arccos \left( \frac{4-y}{4} \right) = \arccos \left( \frac{a+x}{2} \right), \\ x^2 + y^2 + 2x - 8y = b \end{cases}$$

имеет не более одного решения при любом значении параметра  $b$ .

7. Рассматриваются четырёхугольные пирамиды  $TABCD$  со следующими свойствами: основание пирамиды – выпуклый четырёхугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = BC = 1, CD = DA = 2$ , а каждая из плоскостей боковых граней  $TAB, TBC, TCD, TDA$  составляет угол  $60^\circ$  с плоскостью основания.
  - а) Найдите объём такой пирамиды, если её высота, опущенная из вершины  $T$ , равна 2.
  - б) При какой длине высоты объём рассматриваемых пирамид максимален и чему равен этот объём?