УДК 519.179.1+519.174

С. М. Тепляков

Кафедра математической статистики механико-математического факультета МГУ
Кафедра дискретной математики ФИВТ МФТИ

О многоцветных раскрасках гиперграфов

В 1961 году Эрдеш и Хайнал поставили задачу об отыскании величины $m(n)$, равной наименьшему количеству ребер в n-однородном гиперграфе с хроматическим числом больше двух. На текущий момент известны множество оценок данной величины, а также и ее обобщений. В данной статье мы рассмотрим два варианта обобщения данной величины: $m_k(n)$, введенное в 2004 году А.М. Райгородским и Д.А. Шабановым, и $m_k(n, r)$, которое мы определим по ходу статьи. В работе нам удалось получить верхние оценки указанных величин при k близких к $n/2$ для первого обобщения и k близких к n/r для второго обобщения. Кроме того, мы получили результаты, связанные со свойствами этих оценок.

Ключевые слова: гиперграф, хроматическое число.

S. M. Teplyakov

Faculty of mathematics and mechanics, Moscow State University
Discrete mathematics, Department of innovation and high technology, MIPT

Multicolor coloring of hypergraphs

In 1961, Erdos and Hajnal set up the problem of searching $m(n)$ which is equal to a minimum number of edges in n-uniform hypergraph with a chromatic number more than two. Nowdays there are a lot of different estimates of this value and its generalizations. In this article, we would consider two options of the generalization of this value: $m_k(n)$ introduced by A.M. Raygorodskiy and D.A. Shabanov and $m_k(n, r)$ which we define in this article. We are able to find upper bounds of these values for k close to $n/2$ in the first generalization and n/r in the second generaliztion. In addition, we find some properties of these bounds and prove it.

Key words: hypergraph, chromatic number.

1. Введение

В данной статье мы изучим задачу, являющуюся обобщением классической проблемы П. Эрдеша и А. Хайнала в экстремальной теории гиперграфов (см. [1]). Напомним, что гиперграф – это пара $H = (V, E)$, где V – произвольное (конечное) множество, называемое множеством вершин гиперграфа, а E – любая совокупность подмножеств множества V, называемая множеством ребер гиперграфа. Гиперграф n-однороден, если все его ребра имеют мощность n. В частности, обычный граф – это 2-однородный гиперграф.

В 1961 году Эрдеш и Хайнал доказали [2], что если у n-однородного гиперграфа достаточно мало ребер (относительно n), то этот гиперграф обладает естественным аналогом свойства двудольности (множество его вершин можно так покрасить в два цвета, чтобы все его ребра были неодноцветны). Это свойство они предложили называть свойством B. Однако если ребер у гиперграфа достаточно много, то такой гиперграф может и не обладать свойством B. В работе [2] была введена в рассмотрение величина

$$m(n) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } H \text{ не обладает свойством } B\}.$$

В обзоре [3] можно найти оценки ее значений, известные на сегодняшний день. Так, например, известно неравенство

$$0.1\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{2}}2^n \leqslant m(n) \leqslant e(\ln 2)n^2 2^{n-2}(1+o(1)).$$

Нижняя оценка величины $m(n)$ получена Радхакришнаном и Сринивасаном в работе [4]. Верхнюю оценку доказал Эрдеш [5].

В 2004 году Шабановым в работе [6] было предложено обобщение свойства B – свойство B_k. Гиперграф $H=(V,E)$ обладает свойством B_k, если существует раскраска множества вершин V в два цвета таким образом, чтобы вершин каждого из цветов в любом ребре было по крайней мере k. Отсюда следует, что B_1 и есть обычное свойство B. Была определена аналогичная величина:

$$m_k(n) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } H \text{ не обладает свойством } B_k\}.$$

На текущий момент для величины $m_k(n)$ известны различные верхние и нижние оценки.

Нижние оценки:

1) Если $k=k(n)$ таково, что $k \leqslant \gamma \ln n$, где $0<\gamma<(2+4\ln 2)^{-1}$, то асимптотически наибольшая оценка, полученная в работе [7]:

$$m_k(n) \geqslant c\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2^{1-k}e^{-\frac{k}{2}}}{\sqrt{2k-1}}\frac{2^{n-1}}{C_n^{k-1}}.$$

2) Если же $k \geqslant (2+4\ln 2)^{-1}\ln n$ и $2k^2(n-k) < (n-2k)^2$, то асимптотически наибольшей является оценка, полученная в работе [8]:

$$m_k(n) \geqslant 0.19 n^{1/4}\frac{2^{n-1}}{C_n^{k-1}}.$$

3) Наконец, если $2k^2(n-k) \geqslant (n-2k)^2$, то наибольшей является оценка, получаемая вероятностным методом в работе [3]:

$$m_k(n) \geqslant \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}.$$

Верхние оценки:

1) Если k удовлетворяет соотношению $k=\bar{o}(n)$ при $n\to\infty$, то асимптотически наименьшей является оценка, полученная в работах [6] и [9],

$$m_k(n) \leqslant \frac{e\ln 2}{4}n^2\frac{2^n}{\sum_{i=0}^{k-1} C_n^i}(1+\bar{o}(1)).$$

2) Если $k = C\cdot n$, $n\to\infty$, наименьшей является оценка

$$m_k(n) \leqslant m(n-k+1) < \frac{e\ln 2}{4}\cdot(n-k+1)^2\cdot 2^{n-k+1}(1+\bar{o}(1)).$$

Из доказанных оценок следует, что наименее изученной остается область значений $k \sim n/2$ при $n\to\infty$. Нижняя оценка становится тривиальной, а верхняя оценка асимптотически экспоненциальная. Также из работ [10] и [11] известно, что

$$m_2(4)=4, m_2(5)=7, m_3(7)\leqslant 7, m_4(9)\leqslant 8.$$

В данной статье мы докажем верхние оценки величины $m_k(2k+q)$ при разных значениях параметра q, где $q\in\mathbb{Z}$ и $q\geqslant 0$. В работе [12] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Для произвольного целого числа $q \geqslant 0$ существует такая константа $C > 0$, что*

$$m_k(2k+q) \leqslant C(\ln k)^{q+1}. \tag{1}$$

Оказывается, существуют такие возрастающие подпоследовательности $k_1, \ldots, k_s, \ldots$, где $k_i < k_j$ для $i < j$, при которых величину $m_{k_s}(2k_s + q)$ можно оценить функцией, возрастающей медленнее, чем $\ln^{q+1}(k)$ при $s \to \infty$. Более того, существуют такие последовательности $k_1, \ldots, k_s, \ldots$, при которых эта функция оценивается сверху константой. Мы попытаемся разобраться, какую мощность имеет множество тех k, для которых для данной функции f натурального аргумента k выполнена оценка $m_k(2k+q) \leqslant f(k)$. Для этого введем специальное обозначение:

$$\omega(f,q,M) = \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, m_k(2k+q) < f(k)\}|}{M}.$$

Нам удалось доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть целое число $q \geqslant 0$ и произвольное число $C > 0$ таковы, что*

$$\big(C(q+1)! - q - 1\big)^{\frac{1}{q+1}} \geqslant 56. \tag{2}$$

Пусть

$$D = (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\lim_{M\to\infty} \omega(C,q,M) \geqslant 1 - \left(\frac{D}{e(2q+1)(\ln D + 2)}\right)^{-\frac{D}{\ln D + 2}}. \tag{3}$$

Кроме того, для любой монотонно возрастающей неограниченной функции f верно, что

$$\lim_{M\to\infty} \omega(f,q,M) = 1.$$

Далее рассмотрим случай нескольких цветов. Для этого введем определения.

Определение. Гиперграф $H = (V, E)$ обладает свойством $B_k(r)$, если существует раскраска его вершин в r цветов, такая, что в любом ребре $e \in E$ число вершин каждого из цветов по крайней мере k.

Определение. Через $m_k(r, n)$ определим минимальное число ребер n-однородного гиперграфа, не обладающего свойством $B_k(r)$.

В настоящей работе мы докажем утверждение, аналогичное верхней оценке для $m_k(2k+q)$, в случае r цветов.

Теорема 3. *Для любых фиксированных r и q существует такая константа $C > 0$, что*

$$m_k(r, rk+q) < C \cdot (\ln k)^{q+1}. \tag{4}$$

Как и в случае двух цветов, попробуем разобраться, какую мощность имеет множество тех k, при которых для данной функции f выполнена оценка $m_k(r, rk+q) \leqslant f(k)$, и как эта мощность зависит от r. Введем обозначение:

$$\omega(f,q,M,r) = \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, m_k(r, rk+q) < f(k)\}|}{M}.$$

Теорема 4. *Пусть число* $r \geqslant 3$, *число* $q \geqslant 0$ *и произвольное число* $C > 0$ *таковы, что*

$$\left(C(q+1)! - q - 1\right)^{\frac{1}{q+1}} \geqslant 56. \tag{5}$$

Пусть

$$D = (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\varliminf_{M\to\infty} \omega(C, q, M, r) \geqslant 1 - r\left(\frac{D}{e(2q+1)(\ln D + 2)}\right)^{-\frac{D}{\ln D+2}}. \tag{6}$$

Кроме того, для любой монотонно возрастающей неограниченной функции f *справедливо, что*

$$\lim_{M\to\infty} \omega(f, q, M, r) = 1.$$

Дальнейшая структура статьи будет следующая. В разделе 2 мы докажем теорему 1, которая в работе [12] доказана лишь для случая $q = 1$. Кроме того, в этой работе есть неточность в доказательстве случая $q = 1$. В разделе 3 мы докажем теорему 2, после чего перейдем к доказательству утверждений для обобщенной величины $m_k(n, r)$ и в разделе 4 докажем теорему 3, являющуюся обобщением утверждения, сформулированного в теореме 1. В разделе 5 мы докажем теорему 4, которая является аналогом теоремы 2 для случая произвольного числа цветов. А в разделе 6 мы приведем некоторые численные значения полученных оценок.

2. Доказательство теоремы 1

Данное утверждение уже доказано для случая $q = 1$ в работе [12]. Остается привести доказательство для $q = 0$ и $q \geqslant 2$. Справедлива

Лемма 1. *Пусть фиксировано* $k \in \mathbb{N}$. *Если нечетное число* p *таково, что* $\sqrt{2k+q} > p > 1$, *и* $2k+q$ *не сравнимо с* $0, 1, -1, \ldots, q, -q$ *по модулю* p, *то*

$$m_k(2k+q) \leqslant C_{p+q+1}^{p}.$$

Доказательство. Разделим $2k+q$ на p с остатком: $2k+q = pr + y$. Если r – нечетное число, то положим $t = r$, иначе положим $t = r+1$. Имеем $2k+q = pt + x$, где t – нечетное число, а $|x| < p$. В этом случае есть два варианта.

1. $x > 0$. Построим гиперграф $H = (V, E)$. Для этого рассмотрим набор $p+q+2$ произвольных непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_{p+q+1}, A$, где мощности A_i равны t, а $|A| = x$. Объединение всех элементов этих множеств положим множеством вершин искомого гиперграфа

$$V = A_1 \cup \ldots \cup A_{p+q+1} \cup A.$$

В качестве ребер гиперграфа положим произвольные объединения по p множеств из набора

$$A_1, \ldots, A_{p+q+1},$$

к каждому из которых добавим A. Таким образом, ребро гиперграфа имеет вид

$$A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_p} \cup A.$$

Построенный гиперграф является $(2k+q)$-однородным, и у него C^p_{p+q+1} ребер. Покажем, что свойство B_k для гиперграфа H не выполняется.

Рассмотрим произвольную раскраску в два цвета множества V. Скажем, что для ребра A_i доминирует некоторый цвет, если вершин этого цвета больше, чем вершин другого цвета. Поскольку t не кратно двум, то для каждого множества A_i можно определить доминирующий цвет в данной раскраске. Тогда либо среди множеств $A_1, \ldots, A_{p+q+1}$ найдутся p, на которых доминирует один и тот же цвет, либо нет.

В первом случае ребро, образованное этим набором A_i, имеет по крайней мере на $p-x$ вершин одного цвета больше, чем вершин другого цвета. Поскольку $2k+q$ не сравнимо с $0, 1, -1, \ldots, q, -q$ по модулю p, то $p-x>q$. Следовательно, существует ребро, в котором вершин одного цвета по крайней мере на $q+1$ больше, чем вершин другого цвета. Поскольку длина ребра $2k+q$, значит, свойство B_k не выполнено.

Во втором случае существует по крайней мере $q+1$ множеств $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{q+1}}$ одного доминирующего цвета и $q+1$ множеств $A_{j_1}, \ldots, A_{j_{q+1}}$ другого доминирующего цвета. Значит, в ребрах, составленных без $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{q+1}}$ и без $A_{j_1}, \ldots, A_{j_{q+1}}$, количество вершин одного из цветов отличается по крайней мере на $q+1$. Поэтому хотя бы в одном из этих ребер раскраска неправильная.

2. $x<0$. Построим гиперграф $H=(V,E)$. Для этого рассмотрим $p+q+1$ произвольных непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_{p+q+1}$, где мощности A_i равны t. В качестве множества вершин положим объединение всех множеств A_i. В качестве ребер положим произвольные объединения $p-1$ множеств из набора $A_2, \ldots, A_{p+q+1}$ и некоторого фиксированного набора вершин $A \subset A_1$, где $|A| = t+x$. В данном случае $t+x>0$, поскольку $p<\sqrt{2k+q}$, а значит, $t>p>|x|$. Также в $E(H)$ добавим ребра, получающиеся объединением p множеств A_i из набора $A_2, \ldots, A_{p+q+1}$ и выкидыванием произвольных $|x|$ вершин. В итоге получается $(2k+q)$-однородный гиперграф, имеющий ровно $C^{p-1}_{p+q} + C^p_{p+q} = C^p_{p+q+1}$ ребер.

Рассмотрим произвольную раскраску множества V в два цвета. Как и в предыдущем случае, либо среди множеств $A_2, \ldots, A_{p+q+1}$ найдется p множеств с одинаковым доминирующим цветом, либо нет. В первом случае ребро, составленное из этих A_i с выкидыванием произвольных $|x|$ вершин, оказывается раскрашенным неправильно. Во втором случае существует по крайней мере $q+1$ множеств $A_{i_1}, \ldots, A_{i_{q+1}}$ с доминирующим первым цветом и $q+1$ множеств $A_{j_1}, \ldots, A_{j_{q+1}}$ с доминирующим вторым цветом. Тогда одно из ребер, составленных либо без A_{i_k}, либо без A_{j_l}, раскрашено неверно. Доказательство леммы завершено.

Доказательство теоремы 1. Покажем, что для достаточно больших k всегда можно выбрать такое p, удовлетворяющее условиям леммы 1, что $p \leqslant C \cdot \ln k$ с некоторой заранее установленной константой C. Из этого будет следовать оценка (1) из формулировки теоремы:

$$m_k(2k+q) \leqslant C^p_{p+q+1} = \frac{(p+1)\cdot(p+2)\cdot\ldots\cdot(p+q+1)}{(q+1)!} \leqslant C' \cdot (\ln k)^{q+1}.$$

Пусть натуральное число k достаточно велико. Обозначим через P множество всех нечетных чисел не превосходящих величину $(2q+2)\ln k$. Пусть p_0 – минимальное нечетное число, по модулю которого $2k+q$ не сравним с $0, -1, 1, \ldots, -q, q$.

Покажем, что $p_0 \in P$. Предположим противное. Тогда для любого $p \in P$ одно из чисел

$$2k+q, 2k+q+1, 2k+q-1, \ldots, 2k, 2k+2q$$

делится на p. Рассмотрим множество Pr, состоящее из всех простых чисел в множестве P. Согласно асимптотическому закону распределения простых в натуральном ряде (см. например [13]), $|Pr| \geqslant \frac{(2q+1.6)\ln k}{\ln\ln k}$ (если k велико). Отсюда следует, что по крайней мере $\frac{(1+0.8/q)\ln k}{\ln\ln k}$ элементов множества Pr делят одно из чисел $2k+q, 2k+q+1, 2k+q-1, \ldots, 2k, 2k+2q$.

Обозначим это число d. Тогда d делится на произведение соответствующих простых. Обозначим это множество простых чисел $R(d)$. Имеет место соотношение

$$\left(\prod_{p\in R(d)} p\right) \mid d.$$

Оценим это произведение снизу:

$$\left(\prod_{p\in R(d)} p\right) \geqslant |R(d)|! \geqslant \left(\frac{|R(d)|}{e}\right)^{|R(d)|} \geqslant \left(\frac{(1+0.8/q)\ln k}{e\ln\ln k}\right)^{\frac{(1+0.8/q)\ln k}{\ln\ln k}} \geqslant$$

$$\geqslant e^{(1+0.7/q)\ln k} > 2k+2q > d.$$

Получаем противоречие. Таким образом, заявленная в теореме оценка получена.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Это утверждение мы докажем сначала для случая $q = 0$, а затем произведем доказательство для произвольной константы $q \geqslant 1$. В принципе можно было сразу рассмотреть все q, но нам представляется, что так общее рассуждение будет понятнее.

Случай 1. $q = 0$. В данном случае, согласно доказанному в теореме 1 утверждению леммы 1, имеет место следующая оценка: $m_k(2k) \leqslant p+1$, где p — нечетное число, такое что $p < \sqrt{2k}$ и $2k$ не кратно p. Это означает, что

$$\omega(C,0,M) \geqslant \frac{|\{k : k\in\mathbb{N}, k\leqslant M, \exists \text{ нечётное } p : p<\sqrt{2k}, p\nmid 2k, p+1<C\}|}{M}.$$

Отсюда следует

$$1-\omega(C,0,M) \leqslant \frac{|\{k : k\in\mathbb{N}, k\leqslant M, \forall \text{ нечётного } p : p+1<C \text{ либо } p\geqslant\sqrt{2k}, \text{ либо } p\mid 2k\}|}{M} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^2}{2M} + \frac{|\{k : k\in\mathbb{N}, k\leqslant M, \forall \text{ нечётного } p : p+1<C,\ p\mid 2k\}|}{M} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^2}{2M} + \frac{|\{k : k\in\mathbb{N}, k\leqslant M, \forall \text{ простого } p : p<C-1,\ p\mid 2k\}|}{M} \leqslant \frac{C^2}{2M} + \frac{1}{\prod_{p_i<(C-1)} p_i},$$

где p_i – простые числа.

Рассмотрим множество простых, не превосходящих $D = C-1$. Далее согласно асимптотическому закону $\pi(Q) \to \frac{Q}{\ln Q}$ при $Q\to\infty$. Мы же воспользуемся более конкретным результатом, полученным в работе [14]. А именно в этой работе доказано, что для $Q > 55$ имеет место неравенство: $\pi(Q) \geqslant \frac{Q}{\ln Q+2}$. Таким образом, для $D > 55$ имеем

$$\prod_{p_i<D} p_i \geqslant p_1\cdot\ldots\cdot p_{\pi(D)} > \pi(D)! \geqslant \left(\frac{\pi(D)}{e}\right)^{\pi(D)} \geqslant \left(\frac{D}{e(\ln D+2)}\right)^{\frac{D}{\ln D+2}}.$$

Подставляя полученное соотношение в исходную оценку, имеем

$$\lim_{M\to\infty}(1-\omega(C,0,M)) \leqslant \left(\frac{D}{e(\ln D+2)}\right)^{-\frac{D}{\ln D+2}}.$$

Соотношение (3) доказано в текущем случае.

Нам остается доказать, что при подстановке вместо константы C произвольной неограниченной монотонной возрастающей функции f натурального аргумента k верно, что

$$\lim_{M\to\infty}(1-\omega(f,0,M))=0.$$

Для этого достаточно проверить, что для любого $\varepsilon>0$ существует такая константа $N>0$, что для любого $M>N$ справедливо неравенство

$$1-\omega(f,0,M)\leqslant\varepsilon.$$

Положим R таким числом, что $\left(\frac{R-1}{e(\ln(R-1)+2)}\right)^{-\frac{R-1}{\ln(R-1)+2}}\leqslant\varepsilon/2$. Тогда из доказательства выше следует существование такого $N_1>0$, что для любого $M>N_1$ выполнено

$$1-\omega(R,0,M)\leqslant\varepsilon/4+\left(\frac{R-1}{e(\ln(R-1)+2)}\right)^{-\frac{R-1}{\ln(R-1)+2}}\leqslant 3\varepsilon/4.$$

Далее, существует такая константа $Q>0$, что $f(Q)>R$. Но тогда из определения величины $\omega(f,0,M)$ получается следующая цепочка неравенств:

$$\omega(f,0,M)=\frac{|\{k:k\in\mathbb{N},k\leqslant M,m_k(2k)<f(k)\}|}{M}=$$

$$=\frac{|\{k:k\in\mathbb{N},k\leqslant Q,m_k(2k)<f(k)\}|}{M}+\frac{|\{k:k\in\mathbb{N},Q<k\leqslant M,m_k(2k)<f(k)\}|}{M}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{|\{k:k\in\mathbb{N},Q<k\leqslant M,m_k(2k)<R\}|}{M}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{|\{k:k\in\mathbb{N},k\leqslant M,m_k(2k)<R\}|}{M}-\frac{|\{k:k\in\mathbb{N},k\leqslant Q,m_k(2k)<R\}|}{M}\geqslant$$

$$\geqslant\omega(R,0,M)-\frac{Q}{M}.$$

Наконец, существует такая константа $N_2>0$, что для любого $M>N_2$ справедливо $\frac{Q}{M}<\varepsilon/4$. Полагая $N=\max(N_1,N_2)$, получаем, что для любого $M>N$ верно, что

$$\omega(f,0,M)\geqslant\omega(R,0,M)-\frac{Q}{M}\geqslant 1-\frac{3\varepsilon}{4}-\frac{\varepsilon}{4}=1-\varepsilon,\text{ то есть}$$

$$1-\omega(f,0,M)\leqslant\varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Утверждение в случае 1 доказано.

Случай 2. $q\geqslant 1$. Согласно доказанному в теореме 1 утверждению леммы 1, имеет место следующая оценка: $m_k(2k+q)\leqslant C^p_{p+q+1}$, где p — нечетное число, такое что $\sqrt{2k+q}>p$ и $2k+q$ не сравнимо с $0,1,-1,\ldots,q,-q$ по модулю p. Это означает, что

$$\omega(C,q,M)\geqslant\frac{|\{k:k\in\mathbb{N},k\leqslant M,\exists\text{ нечёт }p:p<\sqrt{2k+q},p\nmid(2k)(2k+1)\cdot\ldots\cdot(2k+2q),C^p_{p+q+1}<C\}|}{M}.$$

Аналогично предыдущему случаю отсюда следует, что

$$1-\omega(C,q,M)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\{k:k\in\mathbb{N},k\leqslant M,\forall\text{ нечёт }p:C^p_{p+q+1}<C,\text{ либо }p\geqslant\sqrt{2k+q},\text{ либо }p\mid(2k)(2k+1)\ldots(2k+2q)\}|}{M}.$$

Если $k\geqslant\frac{(C(q+1)!)^{\frac{2}{q+1}}}{2}$, то

$$C^p_{p+q+1}=\frac{(p+q+1)\ldots(p+1)}{(q+1)!}\geqslant\frac{p^{q+1}}{(q+1)!}\geqslant\frac{(\sqrt{2k+q})^{q+1}}{(q+1)!}>C.$$

Поэтому

$$\frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall \text{ нечёт } p : C^p_{p+q+1} < C, \text{ либо } p \geqslant \sqrt{2k+q}, \text{ либо } p \mid (2k)(2k+1)\ldots(2k+2q)\}|}{M} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(C(q+1)!)^{\frac{2}{q+1}}}{2M} + \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall \text{ нечёт } p : C^p_{p+q+1} < C, p \mid (2k)(2k+1)\ldots(2k+2q)\}|}{M}.$$

Оценим второе слагаемое. Для этого заметим, что $C^p_{p+q+1} \leqslant \frac{(p+q+1)^{q+1}}{(q+1)!}$, а значит при $p < (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}$ имеем $C^p_{p+q+1} < C$, откуда

$$\frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall \text{ нечёт } p : C^p_{p+q+1} < C, p \mid (2k)(2k+1)\ldots(2k+2q)\}|}{M} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall \text{ простого } p : p < (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}, p \mid (2k)(2k+1)\ldots(2k+2q)\}|}{M}.$$

Для оценки мощности множества в числителе заметим, что для любого нечетного простого числа p доля чисел k на любом отрезке $[1; L]$ натурального ряда, для которых $(2k)(2k+1)\ldots(2k+2q)$ делится на p, не превосходит $\frac{q+1}{p}$. Также верно, что если числа p_1 и p_2 взаимно просты, то доля тех значений k на отрезке $[1; L]$, при которых $(2k)(2k+1)\ldots(2k+2q)$ кратно и p_1 и p_2, не превосходит $\frac{q+1}{p_1} \cdot \frac{q+1}{p_2}$. Для удобства воспользуемся обозначением $D = (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}$. Таким образом, имеем

$$\frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall \text{ простого } p : p < (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}, p \mid (2k)(2k+1)\ldots(2k+2q)\}|}{M} =$$

$$= \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall \text{ простого } p : p < D, p \mid (2k)(2k+1)\ldots(2k+2q)\}|}{M} \leqslant \frac{(2q+1)^{\pi(D)}}{\prod_{p_i < D} p_i},$$

где $p_1 < \ldots < p_{\pi(D)}$ – все простые нечетные числа, не превосходящие D.

Рассмотрим множество простых чисел, не превосходящих D. По условию теоремы $D \geqslant 56$, а значит, $\pi(D) \geqslant \frac{D}{\ln D + 2}$. Получаем следующую цепочку неравенств:

$$\frac{\prod_{p_i < D} p_i}{(2q+1)^{\pi(D)}} = \frac{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{\pi(D)}}{(2q+1)^{\pi(D)}} > \frac{\pi(D)!}{(2q+1)^{\pi(D)}} \geqslant \left(\frac{\pi(D)}{e(2q+1)}\right)^{\pi(D)} \geqslant \left(\frac{D}{e(2q+1)(\ln D + 2)}\right)^{\frac{D}{\ln D + 2}}.$$

Последнее неравенство выполнено за счет соотношения (2). В результате для оценки величины $1 - \omega(C, q, M)$ мы получили следующее неравенство:

$$1 - \omega(C, q, M) \leqslant \frac{(C(q+1)!)^{\frac{2}{q+1}}}{2M} + \left(\frac{D}{e(2q+1)(\ln D + 2)}\right)^{-\frac{D}{\ln D + 2}}.$$

Переходя к пределу, получаем требуемое соотношение:

$$\lim_{M \to \infty} (1 - \omega(C, q, M)) \leqslant \left(\frac{D}{e(2q+1)(\ln D + 2)}\right)^{-\frac{D}{\ln D + 2}}.$$

Соотношение (3) доказано в текущем случае. Доказательство для случая произвольной неограниченной монотонной возрастающей функции f натурального аргумента k повторяет рассуждения случая 1. Доказательство для случая $q \geqslant 1$ закончено. Доказательство теоремы завершено.

4. Доказательство теоремы 3

Разобьем доказательство на несколько случаев, в зависимости от значений параметров r и q. Для начала рассмотрим случай $q = 0$.

Лемма 2. *Пусть фиксировано $k \in \mathbb{N}$. Если не кратное r число $p > 1$ таково, что rk не делится на p и, кроме того, $p < \sqrt{rk}$, то*

$$m_k(r, rk) \leqslant C_{p+1}^{p}.$$

Доказательство. Наша цель построить rk-однородный гиперграф, который будет содержать не более $C_{p+1}^p = p + 1$ ребер и не будет обладать свойством $B_k(r)$. Разделим rk на p с остатком $rk = pt + x$. Возможны два случая.

1. Число t не кратно r. В этом случае рассмотрим набор $p + 2$ произвольных непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_{p+1}, A$, где мощности A_i равны t, а $|A| = x$. Объединение всех элементов этих множеств положим множеством вершин искомого гиперграфа $V = A_1 \cup \ldots \cup A_{p+1} \cup A$. В качестве ребер гиперграфа положим произвольные объединения по p множеств из набора $A_1, \ldots, A_{p+1}$, к каждому из которых добавим A. Таким образом, ребро гиперграфа выглядит следующим образом: $A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_p} \cup A$. Построенный гиперграф является rk-однородным, и у него C_{p+1}^p ребер. Покажем, что свойство $B_k(r)$ не выполняется.

Рассмотрим произвольную раскраску в r цветов множества V. Назовем конфигурацией раскраски A_i соотношение вершин каждого из цветов. Пусть некоторое A_h имеет h_i вершин цвета i, а ребро A_g имеет g_i вершин цвета i (для всех $i = 1, \ldots, r$), где $\sum_{i=1}^r h_i = \sum_{i=1}^r g_i = rk$. A_h и A_g имеют одинаковую конфигурацию раскраски, если и только если $h_1 = g_1, h_2 = g_2, \ldots, h_r = g_r$. Поскольку $|A_i| = t$ и t не кратно r, то в любой конфигурации раскраски A_i существуют два цвета a, b, для которых справедливо, что количество вершин цвета a не равно количеству вершин цвета b. Возможны два варианта: либо среди множеств $A_1, \ldots, A_{p+1}$ есть p с одинаковой конфигурацией раскраски, либо таких p множеств нет.

В первом случае для некоторых цветов a и b число вершин цвета a больше числа вершин цвета b в каждом A_i для $i = 1, \ldots, p + 1$ по крайней мере на один. Мощность множества A равна x, которое по условию не превосходит p. Значит, какой бы ни была раскраска оставшейся части A, ребро, образованное p множествами, объединенными с множеством A, нарушает правильность раскраски.

Во втором случае пусть A_i и A_j имеют разные конфигурации раскраски. Рассмотрим ребро $R = A_1 \cup \ldots \cup A_{i-1} \cup A_{i+1} \cup \ldots \cup A_{p+1} \cup A$ и ребро $Q = A_1 \cup \ldots \cup A_{j-1} \cup A_{j+1} \cup \ldots \cup A_{p+1} \cup A$. Так как конфигурации A_i и A_j разные, то и количество вершин одного из цветов в R не равно количеству вершин того же цвета в Q. Поэтому одно из ребер Q, R раскрашено неверно.

2. Число t кратно r. В этом случае сначала запишем полученное разложение rk в виде $rk = p(t+1) - (p-x)$, где $t+1$ не кратно r, а $0 < p - x < p$. Рассмотрим $p+1$ произвольных непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_{p+1}$, где мощности A_i равны $t + 1$. В качестве множества вершин положим объединение всех множеств A_i. В качестве ребер положим произвольные объединения $p - 1$ множеств из набора $A_2, \ldots, A_{p+1}$ и некоторого фиксированного набора вершин $A \subset A_1$. Поскольку $p < \sqrt{rk}$, то $p < t$, а значит, мощность множества A, равная $x - p + t + 1$, удовлетворяет следующему неравенству: $0 \leqslant x - p + t + 1 \leqslant t$. Также в набор ребер добавим ребро, получающееся объединением A_i для $i = 2, \ldots, p + 1$ и выкидыванием $p - x$ произвольных вершин. В итоге получается rk-однородный гиперграф, имеющий ровно $C_p^{p-1} + 1 = C_{p+1}^p$ ребер.

Рассмотрим произвольную раскраску множества V в r цветов. Так как $t + 1$ не кратно r, для любой конфигурации раскраски A_i справедливо, что число вершин некоторого цвета a больше, чем число вершин некоторого цвета b в A_i. Возможны два варианта: либо среди $A_2, \ldots, A_{p+1}$ все p множеств с одинаковой конфигурацией раскраски, либо же нет. В первом случае легко убедиться, что ребро $\{A_2 \cup \ldots \cup A_{p+1}\} \setminus \{v_1, \ldots, v_{p-x}\}$ оказывается раскрашенным неправильно. Во втором случае, так как A_i и A_j имеют разные конфигурации раскраски, одно из ребер $R = A_2 \cup \ldots \cup A_{i-1} \cup A_{i+1} \cup \ldots \cup A_{p+1} \cup A$ или $Q = A_2 \cup \ldots \cup A_{j-1} \cup A_{j+1} \cup \ldots \cup A_{p+1} \cup A$ раскрашено неправильно. Доказательство закончено.

Рассмотрим теперь случай, когда $q \geqslant 1$ и q не кратно r.

Лемма 3. *Пусть фиксировано $k \in \mathbb{N}$ и $q \geqslant 1$ не кратно r. Пусть число p, не кратное r, таково, что $\sqrt{rk+q} > p > rq$ и $(rk+q)$ не дает такие вычеты x по модулю p, что $|x| \leqslant q$. Тогда*

$$m_k(r, rk+q) \leqslant C_{p+q+1}^{p}.$$

Доказательство. Построим $(rk+q)$-однородный гиперграф, который будет содержать не более C_{p+q+1}^{p} ребер и не будет обладать свойством $B_k(r)$. Разделим $(rk+q)$ на p с остатком: $rk+q = pt + x$. Возможны три случая.

1. $x = 0$**.** Построим гиперграф $H = (V, E)$. Для этого рассмотрим набор $p+q+1$ произвольных непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_{p+q+1}$, где мощности A_i равны t. Объедение всех элементов этих множеств положим множеством вершин искомого гиперграфа $V = A_1 \cup \ldots \cup A_{p+q+1}$. В качестве ребер гиперграфа положим произвольные объединения по p множеств из набора $A_1, \ldots, A_{p+q+1}$. Таким образом, ребро гиперграфа имеет вид: $A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_p}$. Построенный гиперграф является $(rk+q)$-однородным, и у него C_{p+q+1}^{p} ребер. Покажем, что свойство $B_k(r)$ для гиперграфа H не выполняется.

Рассмотрим произвольную раскраску в r цветов множества V. Обозначим через $V_i(A_h)$ число вершин цвета i в множестве A_h. Возможны три подслучая.

1.1. Найдутся два цвета i и j и по крайней мере $q+1$ множеств $A_{h_1}, \ldots A_{h_{q+1}}$, для которых справедливо, что $V_i(A_{h_l}) > V_j(A_{h_l})$ для всех $l = 1, \ldots, q+1$. В этом случае либо найдется по крайней мере p множеств из $A_1, \ldots, A_{p+q+1}$, где вершин цвета i больше, чем вершин цвета j, и тогда в объединяющем их ребре раскраска неправильная, либо найдется по крайней мере $q+1$ множеств $A_{d_1}, \ldots, A_{d_{q+1}}$, для которых будет справедливо: $V_i(A_{d_z}) \leqslant V_j(A_{d_z})$. В этом случае в одном из ребер $(A_1 \cup \ldots \cup A_{p+q+1}) \setminus (A_{h_1} \cup \ldots \cup A_{h_{q+1}})$ или $(A_1 \cup \ldots \cup A_{p+q+1}) \setminus (A_{d_1} \cup \ldots \cup A_{d_{q+1}})$ раскраска нарушена.

1.2. Найдутся два цвета i и j и два набора множеств $A_{h_1}, \ldots, A_{h_a}$ и $A_{g_1}, \ldots, A_{g_b}$, для которых справедливо, что $V_i(A_{h_l}) > V_j(A_{h_l})$ и $V_i(A_{g_l}) < V_j(A_{g_l})$. При этом $a \leqslant q, b \leqslant q$, но $a + b > q$. В этом случае в одном из ребер, составленных без $A_{h_1} \cup \ldots \cup A_{h_a}$ или без $A_{g_1}, \ldots, A_{g_b}$, раскраска нарушена.

1.3. Для произвольной пары цветов i и j справедливо, что по крайней мере для $p+1$ множества из $A_1, \ldots, A_{p+q+1}$ число вершин цвета i равно числу вершин цвета j. Поскольку $p > rq$, найдется по крайней мере одно множество A_h, в котором всех цветов будет поровну, но по условию $|A_h| = t$, а t не кратно r. Противоречие. Следовательно, такая раскраска невозможна.

2. $x > 0$**,** $x - q$ **не кратно** r**.** Построим гиперграф $H = (V, E)$. Для этого рассмотрим набор $p+q+2$ произвольных непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_{p+q+1}, A$, где мощности A_i равны t, а мощность A равна x. Объедение всех элементов этих множеств положим множеством вершин искомого гиперграфа $V = A_1 \cup \ldots \cup A_{p+q+1} \cup A$. В качестве ребер гиперграфа положим произвольные объединения по p множеств из набора $A_1, \ldots, A_{p+q+1}$, к каждому из которых добавим A. Таким образом, ребро гиперграфа выглядит следующим образом: $A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_p} \cup A$. Построенный гиперграф является $(rk+q)$-однородным, и у него C_{p+q+1}^{p} ребер. Покажем, что для гиперграфа H свойство $B_k(r)$ не выполняется.

Рассмотрим произвольную раскраску в r цветов множества V. Возможны также три подслучая.

2.1. Найдутся два цвета i и j и по крайней мере $q+1$ множеств $A_{h_1}, \ldots, A_{h_{q+1}}$ для которых справедливо, что $V_i(A_{h_l}) > V_j(A_{h_l})$ для всех $l = 1, \ldots, q+1$. В этом случае либо найдется по крайней мере p множеств из $A_1, \ldots, A_{p+q+1}$, где вершин цвета i больше, чем вершин цвета j, либо найдется по крайней мере $q+1$ множеств $A_{d_1}, \ldots, A_{d_{q+1}}$, для которых будет справедливо $V_i(A_{d_z}) \leqslant V_j(A_{d_z})$. В первом случае ребро, объединяющее эти p множеств и множество A, раскрашено неверно, так как $|A| = x < p-q$ и перевес числа вершин цвета i над числом вершин цвета j в построенном ребре будет больше q. Во втором случае в одном из ребер $(A_1 \cup \ldots \cup A_{p+q+1} \cup A) \setminus (A_{h_1} \cup \ldots \cup A_{h_{q+1}})$ или $(A_1 \cup \ldots \cup A_{p+q+1} \cup A) \setminus (A_{d_1} \cup \ldots \cup A_{d_{q+1}})$ раскраска нарушена.

2.2. Найдутся два цвета i и j и два набора множеств $A_{h_1}, \ldots, A_{h_a}$ и $A_{g_1}, \ldots, A_{g_b}$, для которых справедливо, что $V_i(A_{h_l}) > V_j(A_{h_l})$ и $V_i(A_{g_l}) < V_j(A_{g_l})$. При этом $a \leqslant q, b \leqslant q$, но $a + b > q$. В этом случае в одном из ребер, составленных без $A_{h_1} \cup \ldots \cup A_{h_a}$ или без $A_{g_1}, \ldots, A_{g_b}$, раскраска нарушена.

2.3. Для произвольной пары цветов i и j справедливо, что по крайней мере для $p + 1$ множества из $A_1, \ldots, A_{p+q+1}$ число вершин цвета i равно числу вершин цвета j. Поскольку $p > rq$, найдется по крайней мере одно множество A_h, в котором всех цветов будет поровну, но по условию $|A_h| = t$, а поскольку $x - q$ не кратно r, то и t не кратно r. Противоречие. Следовательно, такая раскраска невозможна.

3. $x > 0$, $x - q$ **кратно** r**.** Построим гиперграф $H = (V, E)$. В этом случае t кратно r. Рассмотрим наименьшее число m, такое, что $m > rk + q$ и m делится на p. Положим $z = m/p = t+1$. Заметим, что z не делится на r. Рассмотрим $p+q+1$ произвольных непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_{p+q+1}$, где мощности A_i равны z. В качестве множества V вершин положим объединение всех множеств A_i. В качестве ребер положим произвольные объединения $p-1$ множеств из набора $A_2, \ldots, A_{p+q+1}$ и некоторого фиксированного набора вершин $A \subset A_1$. Это возможно, так как $pt + x - (p-1)(t+1) = x - p + t + 1$, а это число положительное, так как $p < \sqrt{rk+q}$, а значит, $p < t$, и в то же время это число не больше $|A_1| = t+1$, так как $x < p$. Также в набор ребер добавим ребра, получающиеся объединением некоторых p множеств из $A_2, \ldots, A_{p+q+1}$ и выкидыванием произвольных $p - x$ вершин. Легко проверить, что в итоге получился $(rk + q)$-однородный гиперграф, имеющий ровно $C_{p+q}^{p-1} + C_{p+q}^{p} = C_{p+q+1}^{p}$ ребер.

Рассмотрим произвольную раскраску в r цветов множества V. Как и ранее, возможны три подслучая.

3.1. Найдутся два цвета i и j и по крайней мере $q+1$ множеств $A_{h_1}, \ldots, A_{h_{q+1}}$ из множеств $A_2, \ldots, A_{p+q+1}$, для которых справедливо, что $V_i(A_{h_l}) > V_j(A_{h_l})$ для всех $l = 1, \ldots q+1$. В этом случае либо найдется по крайней мере p множеств из $A_2, \ldots, A_{p+q+1}$, где вершин цвета i больше чем вершин цвета j, либо найдется по крайней мере $q + 1$ множеств $A_{d_1}, \ldots, A_{d_{q+1}}$, для которых будет справедливо $V_i(A_{d_z}) \leqslant V_j(A_{d_z})$. В первом случае ребро, объединяющее эти p множеств с выкидыванием произвольных $p - x$ вершин, раскрашено неверно, так как $x < p - q$ и вершин в A не хватит, чтобы уравнять перевес цвета i над цветом j. Во втором случае в одном из ребер, построенных без множеств $A_{h_1}, \ldots A_{h_{q+1}}$ или без множеств $A_{d_1}, \ldots, A_{d_{q+1}}$, раскраска нарушена.

3.2. Найдутся два цвета i и j и два набора множеств $A_{h_1}, \ldots, A_{h_a}$ и $A_{g_1}, \ldots, A_{g_b}$, для которых справедливо, что $V_i(A_{h_l}) > V_j(A_{h_l})$ и $V_i(A_{g_l}) < V_j(A_{g_l})$. При этом $a \leqslant q, b \leqslant q$, но $a + b > q$. В этом случае в одном из ребер, составленных без $A_{h_1} \cup \ldots \cup A_{h_a}$ или без $A_{g_1}, \ldots, A_{g_b}$, раскраска нарушена.

3.3. Для произвольной пары цветов i и j справедливо, что по крайней мере для p множеств из $A_2, \ldots, A_{p+q+1}$ число вершин цвета i равно числу вершин цвета j. Поскольку $p > rq$, найдется по крайней мере одно множество A_h, в котором всех цветов будет поровну. По условию $|A_h| = z$, и z не кратно r. Противоречие. Следовательно, такая раскраска невозможна. Лемма доказана.

Доказательство в случае, когда q кратно r, повторяет рассуждения, приведенные в случае, когда q не кратно r. Таким образом, справедлива

Лемма 4. *Пусть фиксировано* $k \in \mathbb{N}$ *и* $q \geqslant 1$ *кратно* r*. Пусть число* p*, не кратное* r*, таково, что* $\sqrt{rk+q} > p > rq$ *и* $(rk+q)$ *не дает такие вычеты* x *по модулю* p*, что* $|x| \leqslant q$*. Тогда*

$$m_k(r, rk+q) \leqslant C_{p+q+1}^{p}.$$

Доказательство теоремы 3. Покажем, что для достаточно больших k всегда можно выбрать такое p, удовлетворяющее условиям леммы 2 для $q = 0$ и условиям леммы 3 и леммы 4 для $q \geqslant 1$, что $p \leqslant C_1 \cdot \ln k$, с некоторой заранее установленной константой C_1. Из этого будет следовать оценка (4) из формулировки теоремы:

$$m_k(r, rk+q) \leqslant C_{p+q+1}^p = \frac{(p+1)(p+2)\cdot \ldots \cdot (p+q+1)}{(q+1)!} \leqslant C \cdot (\ln k)^{q+1}.$$

Пусть натуральное число k достаточно велико. Обозначим P' множество всех не кратных r чисел, не больших величины $(2q+4)\ln k$. Пусть p_0 — минимальное не кратное r число, по модулю которого $rk+q$ не дает остатки, по абсолютной величине меньшие q.

Покажем, что $p_0 \in P'$. Предположим противное. Тогда для любого $p \in P'$ одно из чисел

$$rk+q, rk+q-1, rk+q+1, \ldots, rk+2q, rk$$

делится на p. Рассмотрим множество Pr', состоящее из всех простых чисел в множестве P'. Согласно асимптотическому закону распределения простых чисел в натуральном ряде, $|Pr'| \geqslant \frac{(2q+3.6)\ln k}{\ln\ln k}$ (если k велико). Отсюда следует, что не менее $\frac{\left(1+\frac{1.8}{q}\right)\ln k}{\ln\ln k}$ элементов множества Pr' делят одно из чисел $rk+q, rk+q-1, rk+q+1, \ldots, rk+2q, rk$. Пусть это будет число D. Тогда D делится на произведение соответствующих простых. Обозначим это множество простых чисел R'. Имеет место соотношение:

$$\left(\prod_{p\in R'} p\right) \mid D.$$

Оценим это произведение снизу:

$$\left(\prod_{p\in R'} p\right) \geqslant |R'|! \geqslant \left(\frac{|R'|}{e}\right)^{|R'|} \geqslant \left(\frac{\left(1+\frac{1.8}{q}\right)\ln k}{e\ln\ln k}\right)^{\frac{\left(1+\frac{1.8}{q}\right)\ln k}{\ln\ln k}} \geqslant e^{\left(1+\frac{1.7}{q}\right)\ln k} > rk+2q > D.$$

Получаем противоречие. Таким образом, оценка получена. Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 4

Как и при доказательстве теоремы 2, это утверждение мы докажем сначала для случая $q = 0$, а затем произведем доказательство для произвольной константы $q \geqslant 1$.

Случай 1. $q = 0$. В данном случае, согласно доказанному в теореме 3 утверждению леммы 2, имеет место следующая оценка: $m_k(r, rk) \leqslant p+1$, где p — некратное r число, такое, что $p < \sqrt{rk}$ и rk не кратно p. Это означает, что

$$\omega(C, 0, M, r) \geqslant \frac{|\{k : k\in\mathbb{N}, k\leqslant M, \exists p : r\nmid p, p<\sqrt{rk}, p\nmid rk, p+1<C\}|}{M}.$$

Отсюда следует

$$1-\omega(C,0,M,r) \leqslant \frac{|\{k : k\in\mathbb{N}, k\leqslant M, \forall p : r\nmid p, p+1<C \text{ либо } p\geqslant\sqrt{rk}, \text{ либо } p\mid rk\}|}{M} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^2}{rM} + \frac{|\{k : k\in\mathbb{N}, k\leqslant M, \forall p : r\nmid p, p+1<C,\ p\mid rk\}|}{M} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^2}{rM} + \frac{|\{k : k\in\mathbb{N}, k\leqslant M, \forall \text{ простого (за исключением } r, \text{ если } r - \text{простое) } p : p<(C-1),\ p\mid rk\}|}{M} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C^2}{rM} + \frac{r}{\prod_{p_i<C-1} p_i},$$

где p_i – простые числа. В последнем переходе мы домножили числитель на величину r, поскольку r может быть простым числом.

Рассмотрим множество простых, не превосходящих $D = (C-1)$. Далее согласно асимптотическому закону $\pi(Q) \to \frac{Q}{\ln Q}$ при $Q \to \infty$. Мы же снова воспользуемся результатом, полученным в работе [14]. Таким образом, для $D > 55$ имеем

$$\prod_{p_i < D} p_i \geqslant p_1 \cdot \ldots \cdot p_{\pi(D)} > \pi(D)! \geqslant \left(\frac{\pi(D)}{e}\right)^{\pi(D)} \geqslant \left(\frac{D}{e(\ln D + 2)}\right)^{\frac{D}{\ln D + 2}}.$$

Подставляя полученное соотношение в исходную оценку, имеем

$$\lim_{M\to\infty}(1 - \omega(C, 0, M)) \leqslant r\left(\frac{D}{e(\ln D + 2)}\right)^{-\frac{D}{\ln D + 2}}.$$

Соотношение (6) доказано в текущем случае.

Нам остается доказать, что при подстановке вместо константы C произвольной неограниченной монотонной возрастающей функции f натурального аргумента k верно, что

$$\lim_{M\to\infty}(1 - \omega(f, 0, M, r)) = 0.$$

Для этого достаточно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такая константа $N > 0$, что для любого $M > N$ справедливо неравенство

$$1 - \omega(f, 0, M, r) \leqslant \varepsilon.$$

Положим R таким числом, что $r\left(\frac{R-1}{e(\ln(R-1)+2)}\right)^{-\frac{R-1}{\ln(R-1)+2}} \leqslant \varepsilon/2$. Тогда из доказательства выше следует существование такого $N_1 > 0$, что для любого $M > N_1$ выполнено

$$1 - \omega(R, 0, M, r) \leqslant \varepsilon/4 + r\left(\frac{R-1}{e(\ln(R-1)+2)}\right)^{-\frac{R-1}{\ln(R-1)+2}} \leqslant 3\varepsilon/4.$$

Далее, существует такая константа $Q > 0$, что $f(Q) > R$. Но тогда из определения величины $\omega(f, 0, M)$ получается следующая цепочка неравенств:

$$\omega(f, 0, M, r) = \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, m_k(rk) < f(k)\}|}{M} =$$

$$= \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant Q, m_k(rk) < f(k)\}|}{M} + \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, Q < k \leqslant M, m_k(rk) < f(k)\}|}{M} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, Q < k \leqslant M, m_k(rk) < R\}|}{M} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, m_k(rk) < R\}|}{M} - \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant Q, m_k(rk) < R\}|}{M} \geqslant$$

$$\geqslant \omega(R, 0, M, r) - \frac{Q}{M}.$$

Наконец, существует такая константа $N_2 > 0$, что для любого $M > N_2$ справедливо $\frac{Q}{M} < \varepsilon/4$. Полагая $N = \max(N_1, N_2)$, получаем, что для любого $M > N$ верно, что

$$\omega(f, 0, M, r) \geqslant \omega(R, 0, M, r) - \frac{Q}{M} \geqslant 1 - \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = 1 - \varepsilon, \text{ то есть}$$

$$1 - \omega(f, 0, M, r) \leqslant \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Утверждение в случае 1 доказано.

Случай 2. $q \geqslant 1$. Согласно доказанному в теореме 3 утверждениям леммы 4 и леммы 5, имеет место следующая оценка: $m_k(rk+q) \leqslant C^p_{p+q+1}$, где p – некратное r число такое, что $\sqrt{rk+q} > p$ и $rk+q$ не дает такие вычеты x по модулю p, что $|x| < q$. Это означает, что

$$\omega(C,q,M,r) \geqslant \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \exists p : r \nmid p, p < \sqrt{rk+q}, p \nmid (rk)(rk+1)\cdot\ldots\cdot(rk+2q), C^p_{p+q+1} < C\}|}{M}.$$

Аналогично предыдущему случаю отсюда следует, что

$$1 - \omega(C,q,M,r) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall p : r \nmid p, C^p_{p+q+1} < C, \text{ либо } p \geqslant \sqrt{rk+q}, \text{ либо } p \mid (rk)(rk+1)\ldots(rk+2q)\}|}{M}.$$

Если $k \geqslant \frac{(C(q+1)!)^{\frac{2}{q+1}}}{r}$, то

$$C^p_{p+q+1} = \frac{(p+q+1)\ldots(p+1)}{(q+1)!} \geqslant \frac{p^{q+1}}{(q+1)!} \geqslant \frac{(\sqrt{rk+q})^{q+1}}{(q+1)!} > C.$$

Поэтому

$$\frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall p : r \nmid p, C^p_{p+q+1} < C, \text{ либо } p \geqslant \sqrt{rk+q}, \text{ либо } p \mid (rk)(rk+1)\ldots(rk+2q)\}|}{M} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(C(q+1)!)^{\frac{2}{q+1}}}{rM} + \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall p : r \nmid p, C^p_{p+q+1} < C, p \mid (rk)(rk+1)\ldots(rk+2q)\}|}{M}.$$

Оценим второе слагаемое. Для этого заметим, что $C^p_{p+q+1} \leqslant \frac{(p+q+1)^{q+1}}{(q+1)!}$, а значит при $p < (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}$ имеем $C^p_{p+q+1} < C$, откуда

$$\frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall p : r \nmid p, C^p_{p+q+1} < C, p \mid (rk)(rk+1)\ldots(rk+2q)\}|}{M} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall \text{ простого (кроме } r) \ p : p < (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}, p \mid (rk)(rk+1)\ldots(rk+2q)\}|}{M}.$$

Для оценки мощности множества в числителе заметим, что для любого простого числа p доля чисел k на любом отрезке $[1;L]$ натурального ряда, для которых $(rk)(rk+1)\ldots(rk+2q)$ делится на p, не превосходит $\frac{2q+1}{p}$. Также верно, что если числа p_1 и p_2 взаимно просты, то доля тех значений k на отрезке $[1;L]$, при которых $(rk)(rk+1)\ldots(rk+2q)$ кратно и p_1 и p_2, не превосходит $\frac{2q+1}{p_1} \cdot \frac{2q+1}{p_2}$. Для удобства воспользуемся обозначением $D = (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}$. Таким образом, имеем

$$\frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall \text{ простого (кроме } r) \ p : p < (C(q+1)! - q - 1)^{\frac{1}{q+1}}, p \mid (rk)(rk+1)\ldots(rk+2q)\}|}{M} =$$

$$= \frac{|\{k : k \in \mathbb{N}, k \leqslant M, \forall \text{ простого (кроме } r) \ p : p < D, p \mid (rk)(rk+1)\ldots(rk+2q)\}|}{M} \leqslant \frac{r(2q+1)^{\pi(D)}}{\prod_{p_i<D} p_i},$$

где $p_1 < \ldots < p_{\pi(D)}$ – все простые числа, не превосходящие D.

Рассмотрим множество простых чисел, не превосходящих D. По условию теоремы $D \geqslant 56$, а значит $\pi(D) \geqslant \frac{D}{\ln D + 2}$. Получаем следующую цепочку неравенств:

$$\frac{\prod_{p_i<D} p_i}{r(2q+1)^{\pi(D)}} = \frac{p_1 \cdot \ldots \cdot p_{\pi(D)}}{r(2q+1)^{\pi(D)}} > \frac{\pi(D)!}{r(2q+1)^{\pi(D)}} \geqslant \frac{1}{r}\left(\frac{\pi(D)}{e(2q+1)}\right)^{\pi(D)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{r}\left(\frac{D}{e(2q+1)(\ln D + 2)}\right)^{\frac{D}{\ln D + 2}}.$$

Последнее неравенство выполнено за счет соотношения (5). В результате для оценки величины $1-\omega(C,q,M,r)$ мы получили следующее неравенство:

$$1-\omega(C,q,M,r) \leqslant \frac{(C(q+1)!)^{\frac{2}{q+1}}}{rM} + r\left(\frac{D}{e(2q+1)(\ln D+2)}\right)^{-\frac{D}{\ln D+2}}.$$

Переходя к пределу, получаем требуемое соотношение:

$$\lim_{M\to\infty}(1-\omega(C,q,M,r)) \leqslant r\left(\frac{D}{e(2q+1)(\ln D+2)}\right)^{-\frac{D}{\ln D+2}}.$$

Соотношение (6) доказано в текущем случае. Доказательство для случая произвольной неограниченной монотонной возрастающей функции f натурального аргумента k повторяет рассуждения случая 1. Доказательство для случая $q \geqslant 1$ закончено. Доказательство теоремы завершено.

6. Численные результаты

В данном разделе мы приведем численные значения оценок из теорем 2 и 4. Сначала рассмотрим случай $r=2$. Из доказательства теоремы 2 следует, что

$$1-\omega(C,q,M) \leqslant \frac{(2q+1)^{\pi(D)}}{\prod_{p_i<D} p_i},$$

где p_i – нечетные простые числа, а $D=(C(q+1)!-q-1)^{\frac{1}{q+1}}$. Приведем численные значения величины C, необходимой для того, чтобы оценка $\frac{(2q+1)^{\pi(D)}}{\prod_{p_i<D} p_i}$ была больше α при разных q и α.

Таблица 1

q / α	0.50	0.70	0.90	0.95	0.99
0	4	6	6	8	12
1	26	26	62	86	146
2	368	368	820	1144	2029
3	3481	5431	11661	29471	38481

Аналогичные оценки можно привести и в случе $r>2$. Из доказательства теоремы 4 оценка в этом случае имеет вид $\frac{r(2q+1)^{\pi(D)}}{\prod_{p_i<D} p_i}$. Таблица в случае $r=3$ выглядит следующим образом.

Таблица 2

q / α	0.50	0.70	0.90	0.95	0.99
0	4	6	6	8	12
1	62	86	86	146	182
2	820	1144	2029	2029	4066
3	29471	29471	38481	38481	78091

Случай $r=4$ отображён в табл. 3.

Таким образом, в табл. 1, 2 и 3 мы, как и обещали, привели численнные значения оценок из теорем 2 и 4.

Т а б л и ц а 3

q / α	0.50	0.70	0.90	0.95	0.99
0	6	6	8	8	12
1	62	86	86	146	182
2	1144	1144	2029	2029	4066
3	29471	29471	38481	38481	78091

Литература

1. *Kostochka A.V.* Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey // More Sets, Graphs and Numbers (Ed. by E. Győri, G.O.H. Katona, L. Lovász). Budapest: Bolyai Society Mathematical Studies. 2006. V. 15. P. 175–198.
2. *Erdős P., Hajnal A.* On a property of families of sets // Acta Mathematica of the Academy of Sciences. 1961. V. 12, N 1–2. P. 87–123.
3. *Райгородский А.М., Шабанов Д.А.* Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы // Успехи математических наук. 2011. Т. 66, вып. 5. С. 109–182.
4. *Radhakrishnan J., Srinivasan A.* Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring // Random Structures and Algorithms. 2000. V. 16, N 1. P. 4–32.
5. *Erdős P.* On a combinatorial problem, II // Acta Mathematica of the Academy of Sciences. 1964. V. 15, N 3–4. P. 445–447.
6. *Шабанов Д.А.* Об одной комбинаторной задаче Эрдеша // Доклады Академии наук. 2004. Т. 396, № 2. С. 166–169.
7. *Шабанов Д.А.* Рандомизированные алгоритмы раскрасок гиперграфов // Математический сборник. 2008. Т. 199, № 7. С. 139–160.
8. *Розовская А.П.* О двухцветных раскрасках общего вида для равномерных гиперграфов // Доклады Академии наук. 2009. Т. 429, № 3. С. 309–311.
9. *Тепляков С.М.* Верхняя оценка в задаче Эрдеша–Хайнала о раскраске гиперграфа // Математические заметки. 2013. Т. 93, вып. 1. С. 148–151.
10. *Розовская А.П., Титова М.В., Шабанов Д.А.* О половинных раскрасках гиперграфов // Фундаментальная и прикладная математика. 2009. Т. 15, вып. 7. С. 141–163.
11. *Тепляков С.М.* Рекуррентные верхние оценки в задаче Эрдеша–Хайнала о раскраске гиперграфа и в ее обобщениях // Труды МФТИ. 2012. Т. 4, № 1(13). С. 141–150.
12. *Черкашин Д.Д., Куликов А.Б.* О двухцветных раскрасках гиперграфов // Доклады Академии наук. 2011. Т. 463, № 3. С. 316–319.
13. *Карацуба А.А.* Основы аналитической теории чисел. М.: Эдиториал УРСС, 2004.
14. *Rosser B.* The n-th Prime is greater than $n \log n$. London: Proc. London. Math. Soc., 1938.

References

1. *Kostochka A.V.* Color-Critical Graphs and Hypergraphs with Few Edges: A Survey. More Sets, Graphs and Numbers (Ed. by E. Győri, G.O.H. Katona, L. Lovász). Budapest: Bolyai Society Mathematical Studies. 2006. V. 15. P. 175–198.
2. *Erdős P., Hajnal A.* On a property of families of sets. Acta Mathematica of the Academy of Sciences. 1961. V. 12, N 1–2. P. 87–123.

3. *Raygorodskiy A. M., Shabanov D. A.* Problem of coloring of hypergraphs by Erdos–Hajnal, its generalizations and related problems. Success of Mathematical Sciences. 2011. V. 66, I. 5. P. 109–182. (in Russian).
4. *Radhakrishnan J., Srinivasan A.* Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring. Random Structures and Algorithms. 2000. V. 16, N 1. P. 4–32.
5. *Erdős P.* On a combinatorial problem, II. Acta Mathematica of the Academy of Sciences. 1964. V. 15, N 3–4. P. 445–447.
6. *Shabanov D.A.* About Erdos combinatorial problem. Reports of the Academy of Sciences. 2004. V. 396, N 2. P. 166–169. (in Russian).
7. *Shabanov D.A.* Randomized algorithms of coloring of hypergraphs. Mathematics sbornik. 2008. V. 199, N 7. P. 139–160. (in Russian).
8. *Rozovskaya A.P.* About two-coloring of uniform hypergraphs. Reports of the Academy of Sciences. 2009. V. 429, N 3. P. 309–311. (in Russian).
9. *Teplyakov S.M.* Upper bound in Erdos–Hajnal problem of coloring of hypergraphs. Mathematical notes. 2013. V. 93, I. 1. P. 148–151. (in Russian).
10. *Rozovskaya A.P., Titova M.V., Shabanov D.A.* About half-coloring of hypergraphs. Fundamental and Applied Mathematics. 2009. V. 15, I. 7. P. 141–163. (in Russian).
11. *Teplyakov S.M.* Recurrence upper bounds in Erdos–Hajnal problem of coloring of hypergraphs and its generalizations. Proceedings of MIPT. 2012. V. 4, N 1(13). P. 141–150. (in Russian).
12. *Cherkashin D.D., Kulikov A.B.* Abount two-coloring of hypergraphs. Reports of the Academy of Sciences. 2011. V. 463, N 3. P. 316–319. (in Russian).
13. *Karatsuba A.A.* Fundamentals of analytic number theory. M.: Editorial URSS, 2004. (in Russian).
14. *Rosser B.* The n-th Prime is greater than $n \log n$. London: Proc. London. Math. Soc., 1938.

Поступила в редакцию 01.01.2017