

УДК 533.6

В. К. Фам

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Нестационарные процессы в гиперзвуковом пограничном слое

Исследованы нестационарные процессы в условиях сильного вязко-невязкого взаимодействия. Обнаружен сдвиг фаз распространения возмущений вверх по потоку из-за конечности скорости распространения возмущений вверх по потоку. Исследованы распределение давления и трения на пластине при разных фазах донного давления.

Ключевые слова: асимптотическая теория течений вязкого газа, нестационарные процессы, распространение возмущений вверх по потоку.

V. K. Pham

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University)

Nonstationary processes in a hypersonic boundary layer

Nonstationary processes in conditions of strong viscous inviscid interaction are studied. A phase shift is detected in the upstream propagation of disturbances due to the finiteness of the upstream transmission rate of disturbances. The distribution of pressure and skin friction on the plate at different phases of the bottom pressure are investigated.

Key words: asymptotic theory of viscous gas flows, nonstationary processes, upstream propagation of disturbances.

1. Введение

Развитие возмущений представляет собой часть проблемы гидродинамической устойчивости. Анализ процессов передачи возмущений в пограничном слое позволяет исследовать устойчивость к длинноволновым возмущениям и корректно постановить задачи в условиях сильного вязко-невязкого взаимодействия.

При анализе системы уравнений пограничного слоя в [1, 2] показано, что характеристики представляют собой линии, перпендикулярные обтекаемой поверхности. На основе анализа характеристик и субхарактеристик была сформулирована постановка задачи для нестационарного двумерного пограничного слоя.

В данной статье рассмотрены нестационарные процессы в гиперзвуковом пограничном слое в условиях сильного вязко-невязкого взаимодействия. Из-за взаимодействия распределение давления заранее неизвестно и оно должно определяться в процессе решения задачи. В этом случае существует дополнительный механизм передачи возмущений, связанный с распространением волн давления. Поскольку в пограничном слое существует область дозвукового течения вблизи поверхности обтекаемого тела, эффект передачи возмущений вверх по потоку имеет место.

Исследование процессов распространения возмущений в пограничных слоях в условиях сильного гиперзвукового вязко-невязкого взаимодействия [4] позволило определить субхарактеристические поверхности, отделяющие области докритического (в среднем дозвукового) течения от закритического (в среднем сверхзвукового). В [5] было дано определение

докритического и закритического течений. Докритическими называются области, где возмущения могут распространяться на расстояния, значительно превышающие толщины пограничного слоя, а закритическими – на расстояния, сравнимые с толщиной пограничного слоя.

В работах [6–8] рассмотрены нестационарные сверхзвуковые течения. В данной работе рассмотрены нестационарные процессы распространения возмущений в гиперзвуковом пограничном слое при условиях сильного взаимодействия. Такой случай имеет место, когда параметр взаимодействия [9] существенно больше 1 [3].

2. Постановка задачи

Рассмотрено обтекание плоской поверхности (в том числе пластины и клина), расположенной под нулевым углом атаки, гиперзвуковым потоком вязкого газа в условиях сильного вязко-невязкого взаимодействия [9]:

$$M_\infty \rightarrow \infty, M_\infty \tau \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где M_∞ – число Маха на бесконечности, τ – безразмерная толщина пограничного слоя.

Вводятся следующие обозначения для координат, отсчитываемых вдоль поверхности пластины и по нормали к ней, времени, компонентов вектора скорости, плотности, давления, полной энтальпии, коэффициента вязкости: $lx, ly, lt/u_\infty, u_\infty u, u_\infty v, \rho_\infty \rho, \rho_\infty u_\infty^2 p, u_\infty^2 H/2, \mu_\infty \mu$ соответственно. Параметр l – некоторая характерная длина. $\tau = (\rho_\infty u_\infty l / \mu_0)$, где индекс ∞ относится к размерным параметрам невозмущенного набегающего потока; μ_0 – величина динамического коэффициента вязкости, определенного при температуре торможения. Несмотря на то, что в гиперзвуковых потоках эффекты реального газа играют существенную роль, в данной работе пренебрегаем этими эффектами, поскольку их учет в общем не меняет соотношений, полученных ниже. Предполагается, что число Рейнольдса велико, но не превосходит критического значения, так что сохраняется ламинарный режим течения. Кроме того, при увеличении числа Маха также возрастает число Рейнольдса перехода.

Согласно теории сильного взаимодействия [9] можно разделить возмущенную область течения на две подобласти: I – ударный слой и II – пограничный слой.

В подобласти I функции течения и координат представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} (x, y, t) &= (x_1, \tau y_1, t_1), \\ (u, v) &= (1 + \dots, \tau v_1 + \dots), \\ (p, \rho, H) &= (\tau^2 p_1 + \dots, \rho_1 + \dots, H_1 + \dots). \end{aligned}$$

Подставляя вышеуказанные разложения в систему уравнений Навье-Стокса, получим следующую систему уравнений, описывающую возмущенное невязкое течение в ударном слое:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial y_1} &= 0, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial y_1} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \right) + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \right) &= 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями на ударной волне

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x_1, t_1), \rho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \\ p_1 &= \frac{(\gamma + 1) v_1^2}{2}, v_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial t_1} \right) \end{aligned}$$

и на внешней границе пограничного слоя

$$y_1 = \delta_1(x_1, t_1), v_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\partial \delta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta_1}{\partial t_1} \right).$$

Для дальнейшего анализа использовалась формула касательного клина в нестационарном случае для установки связи между толщиной пограничного слоя и индуцированным возмущением давления:

$$p_1 = \frac{\gamma + 1}{2} v_1^2.$$

Для подобласти II функции течения и координат представлены в следующем виде:

$$(x, y, t) = (x_1, \tau y_1, t_1),$$

$$(u, v) = (u_2 + \dots, \tau v_2 + \dots),$$

$$(p, \rho, H) = (\tau^2 p_2 + \dots, \tau^2 \rho_2 + \dots, H_2 + \dots).$$

Подставляя последние разложения в систему уравнений Навье–Стокса, учитывая предельный переход (1), получим следующую систему уравнений нестационарного пограничного слоя:

$$X \frac{\partial U}{\partial T} + X \left(U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) - \frac{F}{4} \frac{\partial U}{\partial Y} + \beta \frac{\gamma - 1}{4\gamma} Q = \frac{P}{C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (2)$$

$$X \frac{\partial G}{\partial T} + X \left(U \frac{\partial G}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} \right) - \frac{F}{4} \frac{\partial G}{\partial Y} = X \frac{\gamma - 1}{\gamma P} Q \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{P}{C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0, \beta = -1 + \frac{2X}{P} \frac{\partial P}{\partial X}, \Delta = \int_0^\infty Q dY, \quad (4)$$

$$P = \frac{\gamma + 1}{2} \left(\frac{3\Delta}{4} + X \left(\frac{\partial \Delta}{\partial X} + \frac{\partial \Delta}{\partial T} \right) \right)^2, \quad Q = G - U^2, \quad (5)$$

где

$$Y = \sqrt{\left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma C_0} \right)} x_1^{-1/4} \int_0^{y_1} R dy_1; \delta_1 = x_1^{3/4} \Delta; u_2 = U = \frac{\partial F}{\partial Y},$$

$$X = x_1; T = t_1; p_2 = x_1^{-1/2} P; \rho_2 = x_1^{-1/2} R; C_0 = P(0, T); G = H_2;$$

граничные условия

$$U = F = 0, G = g_w, Y = 0,$$

$$U = 1, G = 1, Y = \infty,$$

$$P(X = 1, T) = P(T).$$

Для определения единственного решения необходимо задать дополнительное условие на некоторой линии ниже по течению от передней кромки, например донное давление на задней кромке [3]. Появление дополнительного условия связано с возможным распространением возмущений вверх по потоку и их влиянием на течение в пограничном слое.

3. Анализ субхарактеристик

Рассмотрены характеристические (субхарактеристические) поверхности $\Omega(X, T)$, связанные с функцией $P(X, T)$, которая заранее не известна и должна определяться в процессе решения. После введения новых переменных $X, Y, T \rightarrow \Omega(X, T), Y, T$ краевая задача

(2–5) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial \Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} \right) - \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X} + A_1 \frac{\partial P}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X} = B_u, \quad (6)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} \right) - \frac{\partial G}{\partial Y} \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X} + A_2 \frac{\partial P}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial T} = B_g, \quad (7)$$

$$P = \frac{\gamma + 1}{2} \left(X \frac{\partial \Delta}{\partial X} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} + \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right) + \frac{3\Delta}{4} + X \frac{\partial \Delta}{\partial T} \right)^2, \quad (8)$$

$$A_1 = \frac{(\gamma - 1)Q}{2\gamma P}, A_2 = \frac{(\gamma - 1)Q}{\gamma P}. \quad (9)$$

Используя определение толщины вытеснения пограничного слоя, производную в правой части выражений (8–9) можно писать следующим образом:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \Omega} = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)C_0}{2\gamma P^2}} \left(\int_0^\infty \frac{\partial Q}{\partial \Omega} dY - \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \Omega} \int_0^\infty Q dY \right).$$

Для нахождения производной $\frac{\partial Q}{\partial \Omega}$ преобразуем систему уравнений (6–7) к уравнению для функции

$$D = \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X}.$$

Из (6) получим уравнение

$$A_0 \frac{\partial D}{\partial Y} + D \frac{\partial A_0}{\partial Y} + B_1 Q \frac{\gamma - 1}{2\gamma P} \frac{\partial P}{\partial \Omega} = B_0, \quad (10)$$

где $A_0 = \frac{\partial \Omega}{\partial T} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X}$; $B_1 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)^2$.

Уравнение (10) имеет решение

$$D = -B_1 A_0 \frac{\gamma - 1}{2\gamma P} \frac{\partial P}{\partial \Omega} \int_0^Y \frac{Q}{A_0^2} dY + A_0 \int_0^Y \frac{B_0}{A_0^2} dY,$$

которое приводит к следующим выражениям для производных:

$$\frac{\partial U}{\partial \Omega} = \frac{1}{A_0} \left(D \frac{\partial U}{\partial Y} - A_1 \frac{\partial P}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X} + B_u \right),$$

$$\frac{\partial G}{\partial \Omega} = \frac{1}{A_0} \left(D \frac{\partial G}{\partial Y} - A_2 \frac{\partial P}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial T} + B_g \right).$$

Окончательно получим выражение для производной индуцированного давления в направлении, перпендикулярном к субхарактеристической поверхности:

$$\frac{\partial P}{\partial \Omega} = \frac{PB_p}{N} \frac{\partial \Omega}{\partial X}, N = \frac{\gamma - 1}{2} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)^2 I_1 - I_0, \quad (11)$$

$$I_0 = \int_0^\infty (G - U^2) dY, I_1 = \int_0^\infty \frac{(G - U^2)^2}{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)^2} dY. \quad (12)$$

После введения скорости перемещения субхарактеристической поверхности

$$a = -\frac{1}{B_1} \frac{\partial \Omega}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial T}.$$

Тогда выражение для N в (11–12) имеет вид

$$N = \frac{\gamma - 1}{2} \int_0^\infty \frac{(G - U^2)^2}{(a + U)^2} dY - \int_0^\infty (G - U^2) dY. \quad (13)$$

Субхарактеристическая поверхность $\Omega(X, T)$ определяется условием $N = 0$. Последнее уравнение определяет среднюю скорость распространения возмущений вверх по потоку, если известны профиль скорости и энтальпии. Уравнение $N = 0$ представляет собой модификационный интеграл Пирсона [10].

4. Метод решения задачи

Для решения задачи выбрана разностная схема для равномерной сетки, построенной на прямоугольной области $0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq Y_\infty = 7$.

Задача решена маршевым методом слева направо по каждому слою при фиксированном X .

Выбрана разностная схема второго порядка точности для дискретизации по X [11].

Выбрана неявная трехточечная разностная компактная схема шестого порядка точности (three-point sixth-order combined compact scheme) для дискретизации по Y (построены матрицы дифференцирования первого и второго порядка $D1y, D2y$) [14,15].

Выбрана схема Кранка–Николсона второго порядка точности для дискретизации по времени.

Интеграл для толщины вытеснения пограничного слоя вычислен методом интегрирования шестого порядка точности (этот метод представляет собой следствие метода Симпсона четвертого порядка точности и экстраполяции Ричардсона).

Заданы функция $f(x)$ и 5 точек выборки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 с приращением h , тогда из формулы Симпсона получим:

$$A_0 = \int_{x_1}^{x_5} f(x) dx,$$

$$A_h = \frac{h}{3} f(x_1) + \frac{4h}{3} f(x_2) + \frac{h}{3} f(x_3) + \frac{h}{3} f(x_4) + \frac{4h}{3} f(x_5) + \frac{h}{3} f(x_5),$$

$$A_{2h} = 2 \left(\frac{h}{3} f(x_1) + \frac{4h}{3} f(x_3) + \frac{h}{3} f(x_5) \right).$$

Используя экстраполяцию Ричардсона, получим метод интегрирования шестого порядка точности:

$$A_0 = A_h + \frac{1}{15}(A_h - A_{2h}) = \frac{16}{15}A_h - \frac{1}{15}A_{2h},$$

$$A_0 = \frac{2h}{45} (7f(x_1) + 32f(x_2) + 12f(x_3) + 32f(x_4) + 7f(x_5)).$$

Это так называемый метод Буля [16], для метода Буля погрешность интегрирования составляет лишь $-\frac{8}{945}h^7 f^{(6)}(c) = -(x_5 - x_1) \frac{2}{945}h^6 f^{(6)}(c), x_1 < c < x_5$.

Из-за вязко-невязкого взаимодействия распределение давления заранее неизвестно, в данной статье мы знаем значение давления только при $X = 0$ и $X = 1$. Предложен итерационный метод [11, 12, 13] для определения распределения давления. На каждом шаге итерационной процедуры вводится функция невязки, представляющая собой разность между заданным и полученным в процессе решения задачи распределениями давления. Эта функция представляет собой решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка относительно давлению.

Пусть в начале n -й итерации задано распределение давления $p^{(n)}(x)$ на равномерной по x сетке в расчетной области $[0, 1]$, удовлетворяющее граничному условию $p^{(n)}(0) = P_0, p^{(n)}(1) = P_1$. Тогда система уравнений (2–5) решается численно с релаксационным методом.

Рассчитанные переменные $U(x, y), G(x, y)$ позволяют определить толщину вытеснения $p^{(n)}(x)$ с помощью (4), таким образом вычислить полученное распределение давления с помощью (5). Новое распределение давления определяется следующим образом:

$$p^{(n+1)}(x) = p^{(n)}(x) + \Delta p^{(n)}(x),$$

где функция поправки $\Delta p^{(n)}(x)$ представляет собой решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с граничными условиями. В отличие от итерационного метода, предложенного в [11], в данной работе вводится еще коэффициент α_1 , что позволяет ускорять итерационную процедуру:

$$\frac{d^2 \Delta p^{(n)}(x)}{dx^2} + \alpha_1 \frac{d \Delta p^{(n)}(x)}{dx} - \alpha \Delta p^{(n)}(x) = \alpha \left(p^{(n)} - p_\delta^{(n)} \right), \Delta p^{(n)}(x=0; 1) = 0,$$

где α, α_1 – некоторые положительные константы.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока функции не совпадут с заданной точностью на всем расчетном интервале. Для обеспечения устойчивости итерационного процесса численные эксперименты показывают, что значение коэффициентов α, β должно лежать в следующих интервалах $0.01 \leq \alpha \leq 0.5, -30 \leq \alpha_1 \leq -20$. Итерационный процесс закончится, если удовлетворяются критерии для абсолютной разности $p^{(n)} - p_\delta^{(n)} \leq 5 \cdot 10^{-5}$ или для относительной разности $\frac{p^{(n)} - p_\delta^{(n)}}{p^{(n)}} \leq 1 \cdot 10^{-4}$. Требуется 150–300 итераций для достижения этого критерия сходимости на каждом шаге по времени.

Чтобы доказать рассуждение о том, что $\Delta p^{(n)}(x) \rightarrow 0, p^{(n+1)}(x) - p^{(n)}(x) \rightarrow 0$ при $p^{(n)}(x) - p_\delta^{(n)}(x) \rightarrow 0$, рассмотрим однородную задачу

$$\frac{d^2 \Delta p^{(n)}(x)}{dx^2} + \alpha_1 \frac{d \Delta p^{(n)}(x)}{dx} - \alpha \Delta p^{(n)}(x) = 0, \Delta p^{(n)}(x=0; 1) = 0,$$

$$\Delta p^{(n)}(x) = C_1 e^{\gamma_1 x} + C_2 e^{\gamma_2 x}, \gamma_{1,2} = -\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + 4\alpha},$$

$$\Delta p^{(n)}(x=0; 1) = 0 \Rightarrow C_1 e^0 + C_2 e^0 = 0; C_1 e^{\gamma_1} + C_2 e^{\gamma_2} = 0,$$

$$\Rightarrow C_1 = 0; C_2 = 0 \Rightarrow \Delta p^{(n)}(x) \equiv 0, \forall x.$$

В этом случае обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка имеет только тривиальное решение.

5. Результаты

Исследовано влияние дискретизаций по пространству и времени. Численные эксперименты показали, что шаги дискретизации по пространству и времени $dX = 0.025, dY = 0.25, dT = 0.01$ обеспечивают необходимую точность решения задачи. Для дальнейших расчетов выбраны эти шаги дискретизации.

Дальше рассмотрен случай, когда донное давление меняется по синусоидальному закону с частотой $f = \omega/(2\pi) = 0.5$ и амплитудой $amp = 0.1, P_{X=1} = P_{X=0} + amp * \sin(2\pi f T)$.

Наблюдался сдвиг фаз распространения возмущений давления вверх по потоку из-за конечности скорости подачи возмущений вверх по потоку. Мы можем определить скорость распространения возмущений с помощью (13), если известны профиль скорости и энтальпии. Из-за конечности скорости подачи возмущений через некоторое время область, находящаяся вверх по потоку от задней кромки, получает информацию о течении на задней

кромке. Был обнаружен эффект «замораживания» течения в областях, находящихся вверх по потоку, когда информация о течении на задней кромке пока не доходит до этих областей.

Из распределения давления и трения на пластине при разных фазах донного давления обнаружено явление того, что при увеличении давления трение уменьшается и, наоборот, при уменьшении давления трение увеличивается.

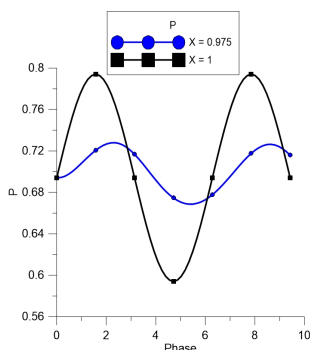


Рис. 1. Изменение возмущений давления при $X = 1$ и $X = 0.975$

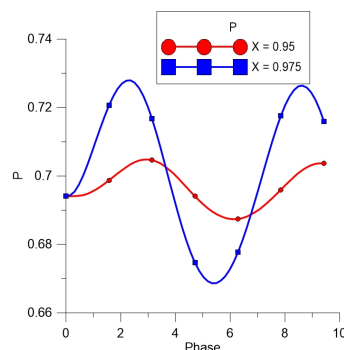


Рис. 2. Изменение возмущений давления при $X = 0.975$ и $X = 0.95$

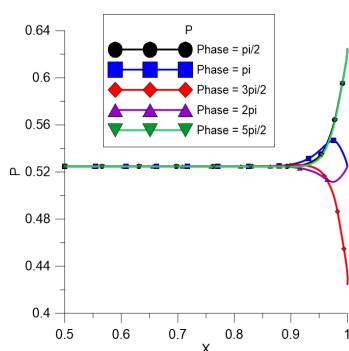


Рис. 3. Распределение давления при разных фазах донного давления

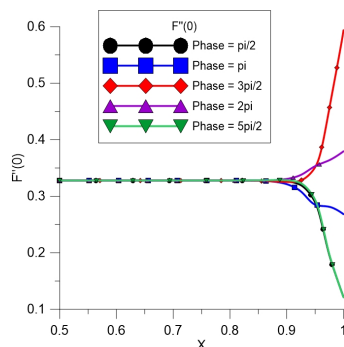


Рис. 4. Распределение трения на пластине при разных фазах донного давления

6. Заключение

Получены следующие выводы.

1. Обнаружен сдвиг фаз распространения возмущений вверх по потоку из-за конечности скорости распространения возмущений вверх по потоку. Обнаружен эффект «замораживания» течения области, находящейся вверх по потоку, в начальный момент времени.

2. Наблюдалось явление того, что распределение давления оказывается в противофазе с распределением трения на поверхности пластины.

Литература

1. Нейланд В.Я., Боголепов В.В., Дудин Г.Н., Липатов И.И. Асимптотическая теория сверхзвуковых течений вязкого газа. Москва : Физматлит, 2003. 456 с.
2. Wang K.C. On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary layer equations // J. Fluid Mech. 1971. V. 48, Pt. 2. P. 397–404.
3. Нейланд В.Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 4. С. 40–49

4. *Нейланд В.Я.* К теории взаимодействия с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 48, № 2. С. 70–79
5. *Crocco L.* Considerations on the shock-boundary layer interactions // Proc. Conf. High-Speed Aeron. Brooklyn: Polytechn. Inst. Brooklyn. 1955. P. 75–112.
6. *Липатов И.И.* О распространении возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, вып. 3. С. 457–464.
7. *Lipatov I.I.* Disturbances Propagation in Supersonic Boundary Layers // IUTAM Symp. on Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary Layers: Proc. Dordrecht : Kluwer Acad. Publ. 1996. P. 369–378.
8. *Lipatov I.I.* Internal Shock Formation in the Laminar Boundary Layer Due to Supercritical Subcritical Transition // AIAA Paper. 1995. N 95. P. 2217.
9. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений газа. Москва : Изд-во иностр. лит., 1962. 607 с.
10. *Pearson H., Holliday J.B., Smith S.F.* A Theory of the cylindrical ejector propelling nozzle // J. Roy. Aeron. Soc. 1958. V. 62, N 574. P. 746–751.
11. *Башкин В.А., Дудин Г.Н.* Пространственные гиперзвуковые течения вязкого газа. Москва : Физматлит, 2000. 289 с.
12. *Дудин Г.Н., Ледовский А.В.* Течение в окрестности точки излома передней кромки тонкого крыла на режиме сильного взаимодействия // Учен. зап. ЦАГИ. 2011. Т. 42, № 2. С. 11–25.
13. *Дудин Г.Н., Лыжсин Д.О.* Об одном методе расчета режима сильного вязкого взаимодействия на треугольном крыле // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1983. № 4. С. 119–124
14. *Chu P.C., Fan C.* Three – Point Combined Compact Difference Scheme // Journal of Computational Physics. 1998. V. 140. P. 370–399.
15. *Li Jichun, Chen Yi-Tung* Computational Partial Differential Equations Using MATLAB — CRC Press, 2008. 384 p.
16. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables — United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964. P. 886.

References

1. *Neiland V.Ya., Bogolepov V.V., Dudin G.N., Lipatov I.I.* Asymptotic theory of supersonic viscous gas flows. Moscow : Fizmatlit, 2003. 456 p. (in Russian).
2. *Wang K.C.* On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary layer equations. J. Fluid Mech. 1971. V. 48, Pt. 2. P. 397–404.
3. *Neiland V.Ya.* Propagation of disturbances upstream in the interaction of hypersonic flow with boundary layer. Izv. Akad. Nauk SSSR., Mekh. Zhid. i Gaza. 1970. N 4. P. 40–49. (in Russian).
4. *Neiland V.Ya.* On the theory of interaction with boundary layer for separated two-dimensional and spatial flows. Part 1. Three-Dimensional flows. Uchenye Zapiski TsAGI. 1974. V. 48, N 2. P. 70–79. (in Russian).
5. *Crocco L.* Considerations on the shock-boundary layer interactions. Proc. Conf. High-Speed Aeron. Brooklyn: Polytechn. Inst. Brooklyn 1955. P. 75–112.

6. *Lipatov I.I.* On propagation of disturbances in supersonic boundary layers. *Prikl. Mat. i Mekh.* 1996. V. 60, N 3. P. 457–464. (in Russian).
7. *Lipatov I.I.* Disturbances Propagation in Supersonic Boundary Layers. IUTAM Symp. on Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary Layers: Proc. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 1996. P. 369–378.
8. *Lipatov I.I.* Internal Shock Formation in the Laminar Boundary Layer Due to Supercritical Subcritical Transition. AIAA Paper. 1995. N 95. P. 2217.
9. *Hayes W.D., Probstein R.F.* Hypersonic Flow Theory. Moscow : Izd-vo inostr. lit., 1962. 607 p. (in Russian).
10. *Pearson H., Holliday J.B., Smith S.F.* A Theory of the cylindrical ejector propelling nozzle. *J. Roy. Aeron. Soc.* 1958. V. 62, N 574. P. 746–751.
11. *Bashkin V.A., Dudin G.N.* Spatial Hypersonic Viscous Gas Flow. Moscow : Fizmatlit, 2000. 289 p. (in Russian).
12. *Dudin G.N., Ledovski A.V.* Flow in the vicinity of the break point of leading edge of a thin wing in the strong interaction mode. *Uchenye Zapiski TsAGI.* 2011. V. 42, N 2. P. 11–25. (in Russian).
13. *Dudin G.N., Lyzhin D.O.* On a method of calculation regime of strong viscous interaction on delta wing. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Mekh. Zhid. i Gaza.* 1983. N 4. P. 119–124. (in Russian).
14. *Chu P.C., Fan C.* Three – Point Combined Compact Difference Scheme. *Journal of Computational Physics.* 1998. V. 140. P. 370–399.
15. *Li Jichun, Chen Yi-Tung* Computational Partial Differential Equations Using MATLAB. CRC Press, 2008. 384 p.
16. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables — United States Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1964. P. 886.

Поступила в редакцию 15.08.2019