В.С. Булыгин

ФИЗИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА
НАЧАЛА ДИНАМИКИ

МФТИ
2019

Р е ц е н з е н т ы
доцент кафедры «Высшая математика» МФТИ
к.ф.-м.н. *Бурцев А.А.*,
доцент кафедры «Теоретическая физика» МФТИ
к.ф.-м.н. *Иванов М.Г.*

Булыгин, В.С.
ФИЗИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. Кинематики и начала динамики : учеб.-метод. пособие по курсу Общая физика. — В.С. Булыгин. — М.: МФТИ, 2019.— 14 с.

Вступительная лекция раздела «Механика», которая читается в рамках курса общей физики в МФТИ. Рассказывается о понятиях вектора и производной в физике, приводятся начальные сведения о нестандартном (инфинитезимальном) математическом анализе, указываются связи классической механики с теорией относительности и квантовой механикой. Сообщаются некоторые исторические сведения, относящиеся к излагаемому предмету.

Предназначено для преподавателей и студентов младших курсов физических специальностей.

Постановочная запись лекции с презентацией выложена на *YouTube*:
https://www.youtube.com/watch?v=yFdJxXBWA6Y&t=3s

Содержание

1 Закон движения

Кинематика — раздел физической механики, занимающийся *описанием* механического движения.

Механическое движение — это *изменение положения* движущего тела в пространстве.

Чтобы описать *положение* тела, надо сначала выбрать *систему отсчёта* т. е. совокупность физических объектов (или один объект), *относительно* которых и будет определятся положение в пространстве. Это может быть наша аудитория, здание (дом), планета Земля, Солнечная система, сверхмассивная чёрная дыра в центре нашей Галактики (Млечного пути), реликтовое электромагнитное излучение, заполняющее нашу Вселенную, и т. п.

Так как выбор системы отсчёта является произвольным, пространственное положение тела в силу этого оказывается *относительным*, поэтому и движение (т. е. изменение положения) также является относительным.

Для конкретного задания положения какого-либо объекта следует в системе отсчёта также выбрать *начало отсчёта* O.

Кинематическим *законом движения* (или просто — законом движения) называется описание изменения положения тела во времени относительно начала отсчёта.

Рассмотрим различные способы задания законов движения.

1.1 Естественный закон движения

Если известна *траектория* движения (например известно, что автомобиль движется по определённой дороге), то его положение может быть задано расстоянием (со знаком), отсчитанным от начала отсчёта O (рис. 1)

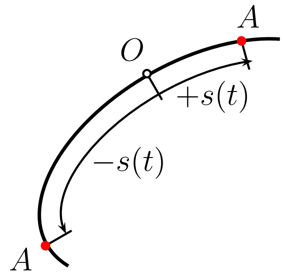


Рис. 1. Задание положения тела, движущегося по известной траектории.

Таким образом, *естественным законом движения* будет функция

$$s = s(t)\,. \tag{1}$$

1.2 Координатный закон движения

Положение тела A можно задать в какой-либо *системе координат*, например двумерной декартовой (рис. 2) или полярной (рис. 3):

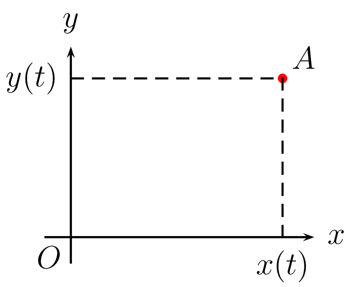


Рис. 2. Декартова система координат (x, y).

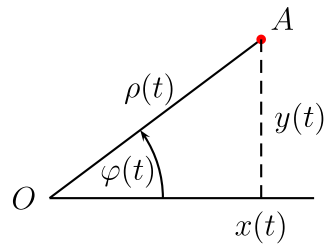


Рис. 3. Полярная система координат (ρ, φ).

Если движение происходит в пространстве, то к данным координатам добавляется ещё ось z (3–х мерная декартова, или же цилиндрическая системы координат, соответственно).

Таким образом, *координатными законами движения* будут в этом случае следующие функции:

$$x(t), y(t), z(t) \qquad \text{или} \qquad \rho(t), \varphi(t), z(t)\,. \tag{2}$$

1.3 Векторный закон движения

Наиболее общим и универсальным является задание положения с помощью *радиуса–вектора* — вектора, проведённого из начала отсчёта O в заданную точку, который определяет и расстояние от начала отсчёта до заданного места, и направление, в котором отсчитывается это расстояние.

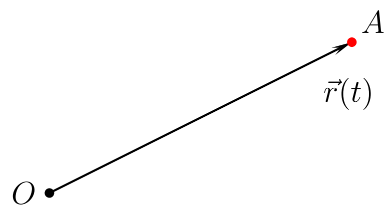


Рис. 4. Радиус–вектор $\vec{r}$ точки A, в точке O — начало отсчёта.

Таким образом, *векторный закон движения* задаётся вектор-значной функцией — зависимостью радиуса–вектора движущегося тела от времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\,. \tag{3}$$

Но какой объект имеет право называться вектором?

1.4 Отступление: *Что такое вектор?*

Частый ответ: *вектор — это направленный отрезок.* Я перескажу историю, которую на своих лекциях рассказывал профессор Андрей Петрович Мина́ков (1893–1954). Он читал лекции по механике первокурсникам мехмата МГУ (будущим профессиональным математикам), а также студентам Московского текстильного института (А.П. Минаков решил задачу, поставленную Эйлером, о равновесии нити на произвольной шероховатой поверхности — задачу, важную для текстильной промышленности) и, кроме того, курсантам Военно-воздушной инженерной академии им. Н.Е. Жуковского.

И вот, услышав от студентов столь разных вузов ответ, что вектор — это направленный отрезок, проф. Минаков рассказывал небольшой драматический этюд[1]: «*О праве вектора называться вектором*». Он делал это на московском примере пересечения ул. Горького (ныне ул. Тверская) и Садового кольца (где находится Концертный зал им. Чайковского), но сейчас там тоннель (пересечения улиц нет) и я перескажу эту историю на примере г. Долгопрудного (см. рис. 5).

Пусть по перекрёстку ул. Первомайской и Институтского переулка в сторону ст. «Новодачная» в минуту проезжает 4 автомобиля, а к Главному корпусу — 3 автомобиля. Изображаем эту информацию соответствующими направленными отрезками, см. рис. 5.

[1] А.П. Минаков обладал драматическими способностями (он, например, прекрасно декламировал стихи Есенина и др.), был знаком с К.С. Станиславским и нередко его цитировал. Минаков говорил не о «чтении», а об «исполнении» лекции, по его выражению «совершение лекции — это драматический акт». (*В. Б.)*

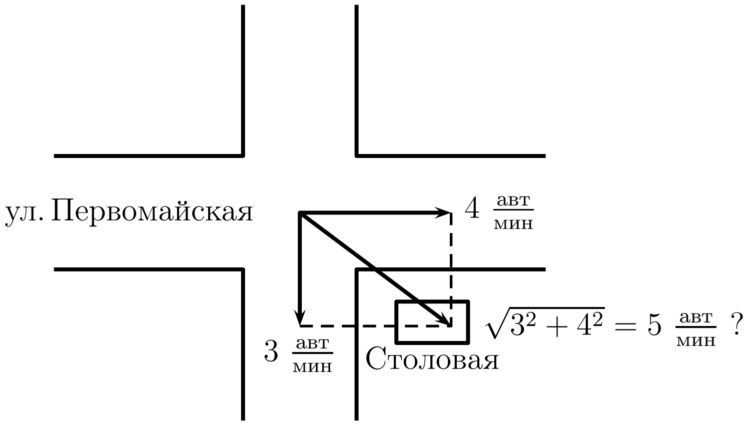


Рис. 5. Потоки автомобилей на перекрёстке.

Но означает ли данная картина что в нашу столовую каждую минуту въезжает 5 автомобилей? А только $(3+4)-5=2$ машины проезжают по дороге, мимо столовой? Конечно, нет! Итак:

> *Направленные отрезки только тогда являются векторами, если они складываются по правилу параллелограмма* (см. рис. 6).

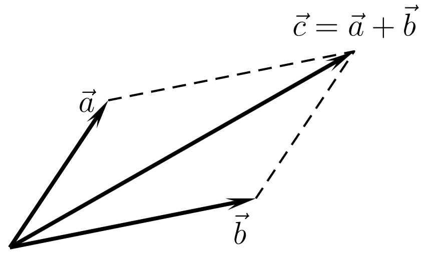


Рис. 6. Сложение векторов, «правило параллелограмма»

Так как диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника, то «правило параллелограмма» эквивалентно «*правилу треугольника*» (рис. 7 и 8).

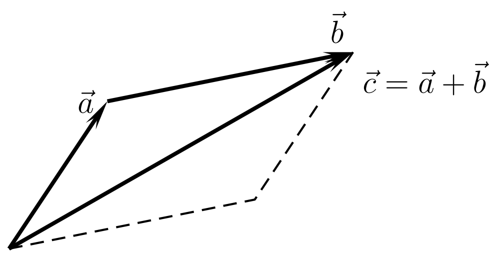


Рис. 7. Сложение векторов, «правило треугольника» $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$

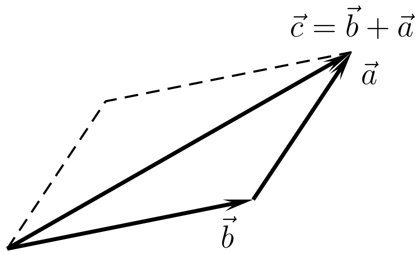


Рис. 8. Сложение векторов, «правило треугольника» $\vec{c}=\vec{b}+\vec{a}$

Следовательно, как это видно из рис. 7 и 8, если складываются два *вектора*, то результат *не зависит от порядка слагаемых*:

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}\,.$$

Таким образом вопрос, является ли направленный отрезок вектором или нет, является *экспериментальным* вопросом, проверяемым на опыте (мне в школе показывали, как складываются силы, создаваемые пружинными динамометрами).

Рис. 9.

Например, мы можем ввести направленный отрезок *угла поворота* $\vec{\varphi}$, *величина* которого равна величине угла поворота, а *направление* характеризует пространственное расположение оси поворота (по «правилу винта», см. рис. 9, где четыре пальца показывают, куда происходит поворот, большой палец — положительное направление оси поворота).

Повернём тело (с отмеченной точкой A) на два угла: $\varphi_1 = \varphi_2 = 90°$. Сначала сделаем поворот вокруг вертикальной оси $\vec{\varphi}_1$, затем вокруг горизонтальной оси $\vec{\varphi}_2$ (см. рис. 10):

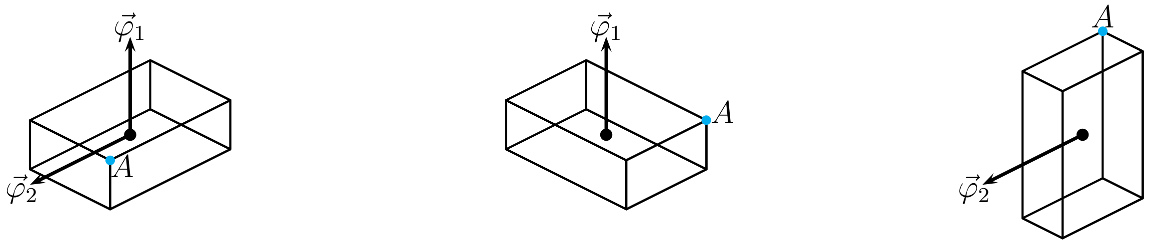


Рис. 10. Поворот вокруг вертикальной оси (на угол $\vec{\varphi}_1$), затем вокруг горизонтальной оси (на угол $\vec{\varphi}_2$)

А теперь сделаем сначала поворот вокруг горизонтальной оси $\vec{\varphi}_2$, а потом вокруг вертикальной оси $\vec{\varphi}_1$ (см. рис. 11):

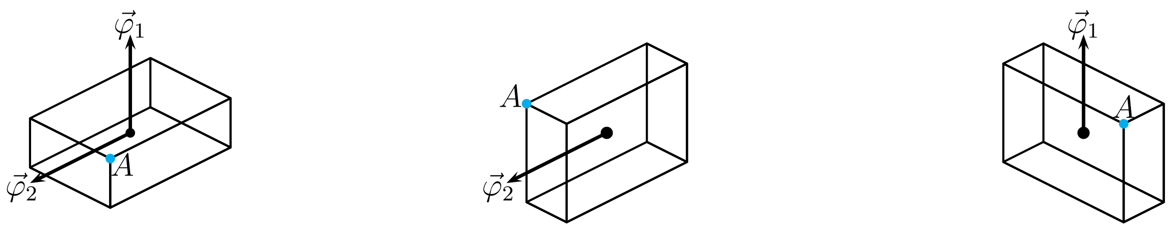


Рис. 11. Поворот вокруг горизонтальной оси (на угол $\vec{\varphi}_2$), затем вокруг вертикальной оси (на угол $\vec{\varphi}_1$)

Таким образом, опыт показывает (сравните рис. 10 и рис. 11), что результат сложения двух *конечных* поворотов (в данном случае — каждый на 90°) зависит от порядка сложения, т. е. направленный отрезок *конечного* угла поворота вектором *не является*!

Попробуем теперь сложить *малые* углы (на рис. 12 и рис. 13 $d\varphi_1 = 5°$, $d\varphi_2 = 7°$; $\simeq 0{,}1$ рад). Сначала повернём наше тело вокруг вертикальной оси на угол $d\varphi_1$, затем вокруг горизонтальной на угол $d\varphi_2$ (рис. 12):

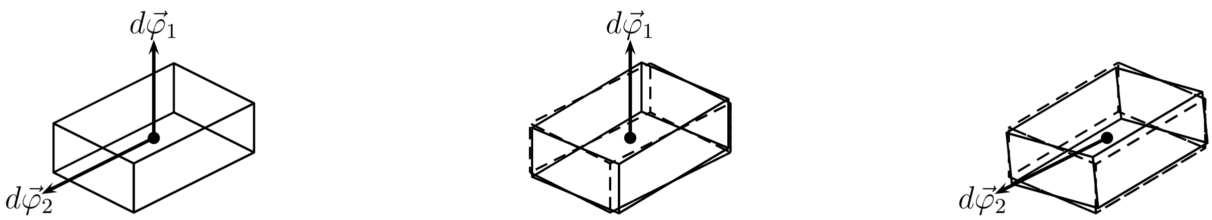


Рис. 12. Исходное положение, поворот на угол $d\vec{\varphi}_1$, и на угол $d\vec{\varphi}_2$

А теперь (см. рис. 13) сначала сделаем поворот вокруг горизонтальной оси на угол $d\varphi_2$, а затем вокруг вертикальной оси на угол $d\varphi_1$ (на последней части рис. 13 показан поворот на $d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$, $d\varphi = \sqrt{5^2 + 7^2} = 8{,}6°$):

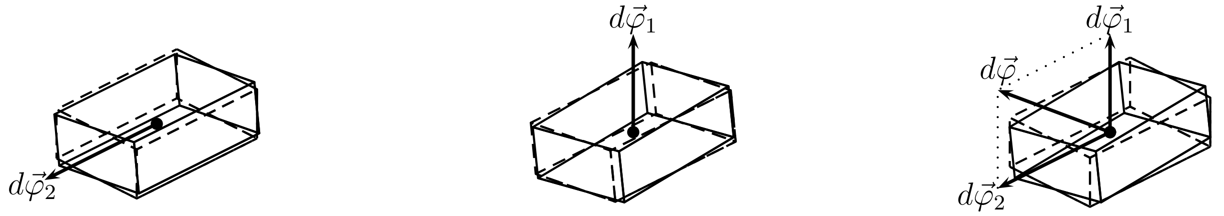


Рис. 13. Поворот: на угол $d\vec{\varphi}_2$, затем на угол $d\vec{\varphi}_1$; поворот на угол $d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2$

Итак, этот опыт показывает, что *малые* углы поворота $d\vec{\varphi}$ будут складываться по правилу параллелограмма, т. е. $d\vec{\varphi}$ — является вектором. Поэтому угловая скорость

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \tag{4}$$

тоже будет вектором, так как она является отношением вектора $d\vec{\varphi}$ и скаляра dt.

1.5 Сложение нескольких векторов

«Правило треугольника» удобнее «правила параллелограмма», так как легко обобщается на сумму или разность (когда прибавляется *противоположно* направленный вектор) любого количества векторов (рис. 14):

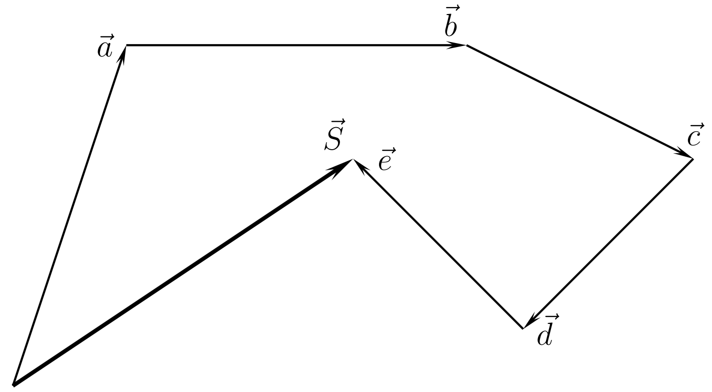


Рис. 14. Сложение нескольких векторов по «правилу треугольника», $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$.

«Правило параллелограмма» (или треугольника) для векторов работает потому, что нас окружает эвклидово пространство. На космологически больших расстояниях или вблизи экстремальных физических объектов (например, «чёрных дыр») пространство *неевклидово*, направление вектора при *параллельном* переносе зависит от траектории переноса и ОТО (общая теория относительности), которая описывает подобные физические ситуации, наряду с векторами использует более сложные математические объекты — *тензоры* [1].

Но вокруг нас справедлива евклидова геометрия и мы в курсе физической механики будем опираться только на неё.

1.6 Связь законов движения

Радиус–вектор равен сумме своих векторных составляющих вдоль координатных осей (см. рис. 15), поэтому *векторный и декартовый* законы движения связаны соотношением:

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_x x(t) + \vec{e}_y y(t) + \vec{e}_z z(t)$$

При этом связь *декартового и полярного* законов движения даётся соотношениями (см. рис. 3):

$$x(t) = \rho(t)\cos\varphi(t)\,, \qquad y(t) = \rho(t)\sin\varphi(t)\,;$$

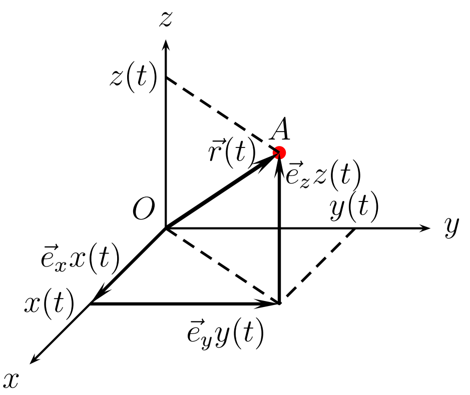


Рис. 15. Радиус–вектор $\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z$ (по «правилу треугольника»).

а связь *полярного и декартового* законов движения — соотношениями:

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}\,, \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} & \text{при } x(t) > 0\,, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y(t)}{x(t)} & \text{при } x(t) < 0\,, \\ \frac{\pi}{2} \cdot \operatorname{sign}(y(t)) & \text{при } x(t) = 0\,, \end{cases}$$

где функция

$$\operatorname{sign}(y) = \begin{cases} -1 & \text{при } y < 0\,, \\ 0 & \text{при } y = 0\,, \\ +1 & \text{при } y > 0\,. \end{cases}$$

2 Скорость и ускорение

Вектор скорости $\vec{v}$ характеризует направление и быстроту *изменения положения* движущегося тела. Исаак Нью́тон (1643–1747), живший в Англии, который одновременно с созданием классической механики создавал и математический анализ (дифференциальное и интегральное исчисление) обозначал скорость следующим образом:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

и называл её «флюксией» от $\vec{r}$. Готфрид Вильгельм Ле́йбниц (1646–1716), живший в Германии и независимо от Ньютона строивший математический анализ в Европе, предложил более физическое обозначение

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}\,,$$

названное им «производной», и которое он понимал как отношение двух бесконечно-малых («монад») — $d\vec{r}$ и dt, где $d\vec{r}$ — перемещение точки за промежуток времени dt, и эти бесконечно малые по Лейбницу не равны нулю и не стремятся к нулю!

Ускорение $\vec{a}$, характеризующее величину быстроты изменения скорости и направление изменения скорости равно, в обозначениях Ньютона:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}},$$

и в обозначениях Лейбница

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\,.$$

В механике, из-за своей простоты и удобства, часто используют обозначения Ньютона.

2.1 Отступление: *О бесконечно-малых*

Лейбниц во второй половине XVII века независимо от Ньютона создававший математический анализ, понимал производную как отношение двух, не равных нулю, бесконечно-малых. Эта точка зрения была отвергнута в процессе развития математики и производная стала определятся как *предел отношения*, когда соответствующие изменения стремятся к нулю, а подход Лейбница стал считаться нестрогим и неправильным.

И только в 1961 году американский математик Абрагам Ро́бинсон (1918–1974), специалист по математической логике, смог вернуть бесконечно-малые в строгую математику: для этого ему понабилось отрицание *аксиомы Архиме́да*[2] [2, с. 9, 18] (из 2-х неравных отрезков меньший отрезок можно последовательно откладывать до тех пор, пока результат сложения не превысит больший отрезок) — отрицание аксиомы Архимеда обеспечивает существование бесконечно-малых, а также понадобилась *лемма Цорна*[3] [2, с. 39] (у которой сложная формулировка), эквивалентная *аксиоме выбора* [2, с. 21], эта аксиома совершенно очевидна:

Аксиома выбора (Це́рмело[4]):

> *Для каждого семейства непустых непересекающихся множеств существует множество, которое имеет только один общий элемент с каждым из множеств семейства.*

Или более наглядно: *из совокупности раздельных кучек можно образовать новую кучку, взяв (скопировав) по одному элементу из каждой кучки.*

С помощью этой очевидной и, на первый взгляд, вполне «безобидной» аксиомы математически строго доказывается теорема (*парадокс Ба́наха*[5]*–Та́рского*[6] [2, с. 52]):

> **Теорема Банаха–Тарского.** *Трёхмерный шар S можно разрезать на шесть таких частей* (фактически на пять, так как одна из этих частей — множество $\{\oslash\}$, содержащее пустое множество $\oslash$, в котором нет ни одной точки шара S):
>
> $$S = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup \{\oslash\} \cup \{P\}\ ^7$$
>
> *что из частей*
>
> $$A_1 \text{ и } A_3 \cup \{\oslash\}$$
>
> *можно с помощью* вращений *составить целый шар S, а из оставшихся трёх частей*
>
> $$A_2,\ A_4 \text{ и } \{P\}$$
>
> *снова можно с помощью* вращений и переносов *составить ещё один сплошной трёхмерный шар S.*

Таким образом, из *одного* шара можно с помощью подходящих разрезаний и последующих перемещений сделать *два* шара первоначальной величины!

Доказательство этой теоремы *неконструктивно*, т. е. в теореме доказывается только, что такое разрезание шара существует, но не выясняется, как его можно сделать. Неконструктивность теоремы вызвана неконструктивностью аксиомы выбора — постулируется тот вполне

---

[2] Архиме́д (287 до н. э. – 212 до н. э.) — древнегреческий математик, физик и инженер-изобретатель. (*В. Б.*)

[3] Цорн Макс А́вгуст (1906–1993) — американский математик. (*В. Б.*)

[4] Це́рмело Эрнст (1871–1953) — немецкий математик. (*В. Б.*)

[5] Ба́нах Стефа́н (1892–1945) — польский математик. (*В. Б.*)

[6] Та́рский Альфре́д (1901–1983) — польский математик и логик. (*В. Б.*)

[7] Естественней было бы написать: $\ldots \cup A_5 \cup A_6$. По поводу привычки к необычным обозначениям в математике известный английский математик Джон Ли́тлвуд (1885–1977) выразился так [3]: «О книгах Жорда́на говорили, что если ему нужно было ввести четыре аналогичные или родственные величины (такие, как, например, a, b, c, d), то они у него получали обозначения: $a,\ M_3^{'},\ \varepsilon_2,\ \Pi_{1,2}^{''}$. (*В. Б.*)

очевидный факт, что из каждой «кучки» можно выбрать по одному элементу этой кучки, но не конкретизируется, по какому правилу выбираются эти элементы из каждой кучки.

Эта теорема противоречит нашей геометрической интуиции, но, оказывается, не входит в противоречие с физической интуицией: при столкновении 2-х энергичных протонов может образоваться *удвоенный объём* — 3 протона и 1 антипротон:

$$p + p \to p + p + p + \tilde{p} \ .$$

На этом пути Робинсон смог строго построить *нестандартный*, или *инфинитезимальный* анализ [2, 4], в котором числовая прямая расширяется включением бесконечно-малых чисел и в котором производная является отношением двух бесконечно малых (от этого отношения инфинитезимальный анализ требует ещё взять «стандартную часть»), а определённый интеграл является суммой бесконечно-большого числа бесконечно-малых слагаемых.

Таким образом — и это уже не будет противоречить современной математике — производная в физике *не является* пределом отношения при стремлении изменений к нулю, так как, например, при стремлении $\Delta x \to 0$ мы попадаем совсем в другую физику, в физику микромира, которая описывается уже совсем другой — *квантовой механикой*, итак:

> *производная в физике — это отношение двух элементарных количеств*, настолько малых что дальнейшее уменьшение уже *практически* (т. е. с приемлемой точностью) не изменяет это отношение.

При таком определении скорость считается отношением двух элементарных количеств $d\vec{r}$ и dt:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \,,$$

при этом элементарный промежуток времени dt выбирается таким, чтобы движение точки в течение этого промежутка могло бы считаться, с приемлемой точностью, *равномерным и прямолинейным* и, следовательно, скорость определялась бы как при равномерном движении: скорость равна по величине отношению пройденного пути к времени движения, и направлена по направлению перемещения.

Поэтому при изучения падения тел вблизи поверхности Земли бесконечно-малым промежутком времени можно считать $dt = 10^{-3}$ с, при изучении движения Земли вокруг Солнца бесконечно-малым можно считать $dt = 1$ мин (в каких-то задачах — даже 1 час), а при изучении движения Солнечной системы вокруг центра нашей Галактики (продолжительность галактического года $\sim 250 \cdot 10^6$ лет) за бесконечно-малый промежуток времени вполне можно взять $dt = 1000$ лет.

3 Движение по окружности

Скорость

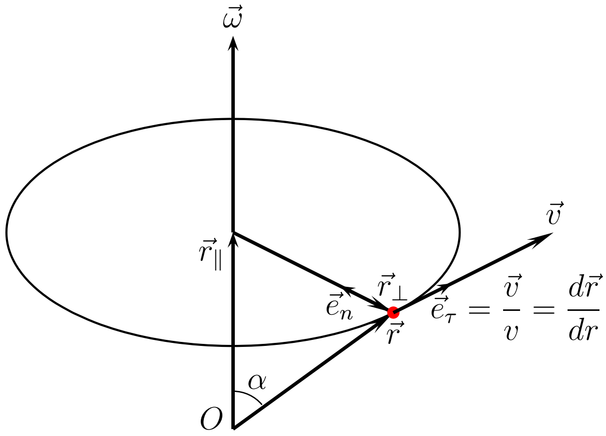
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{|d\vec{r}|}\frac{|d\vec{r}|}{dt} = \vec{e}_\tau \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \vec{e}_\tau \frac{|d\vec{r}|}{|dt|} = \vec{e}_\tau \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \vec{e}_\tau v \,, \tag{5}$$

где $\vec{e}_\tau$ — единичный вектор, направленный по направлению вектора $d\vec{r}$, т. е. по направлению вектора $\vec{v}$.

Скорость при движении по окружности может быть также записана в виде *векторного произведения*:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\vec{\omega}, (\vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp)\right] = \left[\vec{\omega}, \vec{r}_\parallel\right] + [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp] = 0 + [\vec{\omega}, \vec{r}_\perp] \ , \tag{6}$$

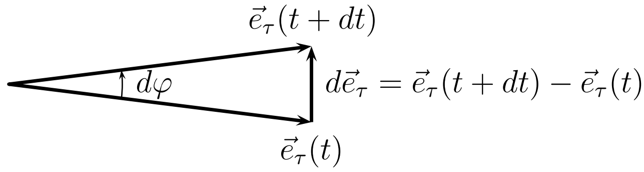
где вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ определяется выражением (4). Выражение (6) даёт правильное направление вектора скорости $\vec{v}$ («правило винта», см. рис. 9, где мысленный поворот производится от 1-го сомножителя ко 2-му на наименьший угол) и правильную величину скорости: $v = \omega r_\perp$.



Дифференцируя выражение (5) получаем, что ускорение состоит из 2-х составляющих (тангенциального и нормального ускорений):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{e}_\tau v) = \vec{e}_\tau \frac{dv}{dt} + \frac{d\vec{e}_\tau}{dt} v = \vec{e}_\tau \frac{dv}{dt} + \vec{e}_n \omega \cdot v =$$
$$= \vec{e}_\tau \dot{v} + \vec{e}_n \frac{v^2}{r_\perp} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\,,$$

поскольку изменение единичного вектора $d\vec{e}_\tau$ за время dt



при повороте $\vec{e}_\tau$ на малый угол $d\varphi = \omega\, dt$ направлено перпендикулярно $\vec{e}_\tau$ (т. е. по направлению единичного вектора $\vec{e}_n$), а величина этого изменения равна $|\vec{e}_\tau|\; d\varphi = 1 \cdot d\varphi = \omega\, dt$, т. е.

$$\frac{d\vec{e}_\tau}{dt} = \frac{\vec{e}_n\, \omega\, dt}{dt} = \vec{e}_n\, \omega = \vec{e}_n \frac{v}{r_\perp}\,.$$

Этот же результат получается дифференцированием первой части выражения (6) (учитываем, что $r \sin\alpha = r_\perp$):

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = [\vec{\omega}, \vec{r}]^{\cdot} = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \dot{\vec{r}}\right] = \left[\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}\right] + [\vec{\omega}, \vec{v}] =$$
$$= \vec{e}_\tau \dot{\omega} r_\perp + \vec{e}_n \omega v = \vec{e}_\tau \dot{v} + \vec{e}_n \frac{v^2}{r_\perp} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n\,.$$

Касательное ускорение $\vec{a}_\tau$, величина которого равна производной величины (модуля) скорости по времени $\dot{v}$, характеризует быстроту изменения скорости *по величине* (когда, например, изменяются показания спидометра автомобиля, движущегося по извилистой дороге), нормальное ускорение $\vec{a}_n$ характеризует изменение скорости *по направлению*; например, $\vec{a}_n \neq 0$ даже при равномерном движении по окружности (т. е. при движении с постоянной величиной скорости v).

4 Движение по произвольной траектории

Теперь можно рассмотреть движение по произвольной траектории. Движение в небольшой окрестности некоторой выбранной точки на траектории можно представить как движение по окружности, которая строится следующим образом: возьмём две точки (до и после выбранной точки) и через эти три точки проводим единственную окружность. Будем затем приближать соседние точки к нашей точке на траектории и по мере сближения этих 2-х точек с нашей, окружность приближается к окружности, *наиболее близкой* к траектории в окрестности выбранной точки на траектории.

Таким образом, мы можем считать, что в окрестности нашей точки движение происходит по этой, максимально близкой к траектории, окружности; радиус этой окружности называется *радиусом кривизны* ρ траектории в данной точке.

Мы видим, что вектор ускорения $\vec{a}$ при движении по произвольной траектории будет, как и при движении по окружности, равен векторной сумме касательного $\vec{a}_\tau$ и нормального $\vec{a}_n$ ускорений:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{e}_\tau \dot{v} + \vec{e}_n \frac{v^2}{\rho}\,,$$

причём здесь, также как и при движении по окружности, касательное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения *величины* скорости и нормальное ускорение $\vec{a}_n$ — быстроту изменения *направления* скорости.

5 2-й закон Ньютона

Закон движения (кинематический закон движения) находится решением *уравнения движения*, каковым является 2-й закон Нью́тона — основное уравнение механики.

Второй закон Ньютона справедлив для *материальной точки* — физического тела, движением частей которого друг относительно друга можно (в данной задаче) пренебречь и, следовательно, считать, что все части этого тела двигаются с одной скоростью и одним ускорением.

Ньютон (1643–1747) в своём основополагающем труде «*Математические начала философии природы*» (1686 г.) приписывал открытие своего 1-го и 2-го законов Галиле́о Галиле́ю (1564–1642) — именно в этом ключе читал П.Л. Ка́пица (1894–1984) в 1947 году курс «Физической механики» [5] студентам первого набора Физико-технического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

При этом Ньютон никогда не излагал свой 2-й закон в школьной формулировке $\vec{F} = m\vec{a}$, а формулировал его через скорость изменения импульса:

$$\dot{\vec{p}} = \vec{F} \qquad \text{или} \qquad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,. \tag{7}$$

В оригинальной формулировке Ньютона (7) его 2-й закон описывает не только динамику материальной точки с *переменной* массой (например, движение ракеты), но и, как показал французский математик и физик Жюль Анри́ Пуанкаре́ (1854–1912), остаётся справедливым в частной (специальной) теории относительности [6] (механике движения с произвольно большими, в том числе с околосветовыми скоростями); единственное, что сделал Пуанкаре — уточнил определение импульса (как векторной величины, сохраняющейся в релятивистских взаимодействиях) и заменил Ньютоновское определение импульса $\vec{p} = m\vec{v}$ на

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{8}$$

где c — скорость света (предельная скорость распространения любых физических взаимодействий).

При малых скоростях $v \ll c$ выражение для релятивистского импульса (8) переходит в Ньютоновское; разложив выражение (8) в ряд Тéйлора по малому параметру v^2/c^2 получаем:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = m\vec{v}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ldots\right] \simeq m\vec{v}\,.$$

Более того, для среднего значения импульса и среднего значения силы 2-й закон Ньютона в формулировке (7) остаётся справедливым и в механике микромира т. е. в квантовой механике, использующей для описания механического движения совсем другой язык (состояние описывается комплекснозначной волновой функцией, физическим величинам сопоставляются операторы, действующие на волновые функции, и т. д).

Согласно 2-й теореме Э́ренфеста[8] [7] среднее значение импульса $\langle\vec{p}\rangle$ и среднее значение силы $\left\langle\vec{F}\right\rangle$, вычисляемые по квантовомеханическим правилам, связаны между собой соотношением, соответствующим второму закону Ньютона в той форме (7), в которой его записывал сам Ньютон:

$$\frac{d\,\langle\vec{p}\rangle}{dt} = \left\langle\vec{F}\right\rangle\,,$$

в теореме Эренфеста используется связь среднего значения силы со средним значением градиента потенциальной энергии U:

$$\left\langle\vec{F}\right\rangle = -\left\langle\operatorname{grad} U\right\rangle\,.$$

Таким образом, Ньютон записал свой 2-й закон — *основное уравнение механики* в такой форме:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\,,$$

которая сохранила свой вид и в релятивистской механике, и в квантовой механике!

[8] Э́ренфест Пауль (1880–1933) — австрийский физик. (*В. Б.)*

Список литературы

[1] *Дирак П.А.М.* Общая теория относительности. — М.: Атомиздат, 1978.— 65 с.

[2] *Энгелер Э.* Метаматематика элементарной математики. — М.: Мир, 1987.— 128 с.

[3] *Литлвуд Дж.* Математическая смесь. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1965. С. 47.

[4] *Успенский В.А.* Что такое нестандартный анализ? — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 128 с.

[5] *Капица П.Л, Ландау Л.Д.* ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ (как изучали физику на ФТФ МГУ в 1947 г.), ред. В.С. Булыгин. — М.: МФТИ, 2017.— 217 с.

[6] *Логунов А.А.* К работам Анри Пуанкаре "О динамике электрона". — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Из-во МГУ, 1980. С. 75–76.

[7] *Л. Шифф.* Квантовая механика. — М.: Из-во иностранной литературы, 1959. С. 39–40.