УДК 532.546

Н. А. Маркитантова, А. П. Черняев

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Фильтрация при степенном законе в случае несимметричного расположения скважины

Рассматривается плоская стационарная фильтрация к горизонтальной скважине при степенном законе. Скважина расположена несимметрично относительно кровли и подошвы пласта.

Ключевые слова: стационарная фильтрация, плоская задача, степенной закон фильтрации, несжимаемая жидкость, несимметричное расположение скважины.

Известно, что пористые и проницаемые пласты, в которых залегает нефть и природный газ, имеют непроницаемые кровлю и подошву, состоящую чаще всего из глины или соли. Газ, нефть, подземные воды находятся в порах и трещинах горных пород. Фильтрация происходит либо вследствие естественных причин, либо при извлечении полезных ископаемых через твердые (в общем случае деформируемые) тела, содержащие связанные между собой поры, трещины.

Пласт может рассматриваться как бесконечная горизонтальная полоса в плоскости (x, y) ширины h (рис. 1). Непроницаемость кровли и подошвы пласта означает равенство нулю вертикальной составляющей скорости фильтрации на верхней и нижней границах пласта (на рис. 1 границы пласта изображены прямыми BA и CA).

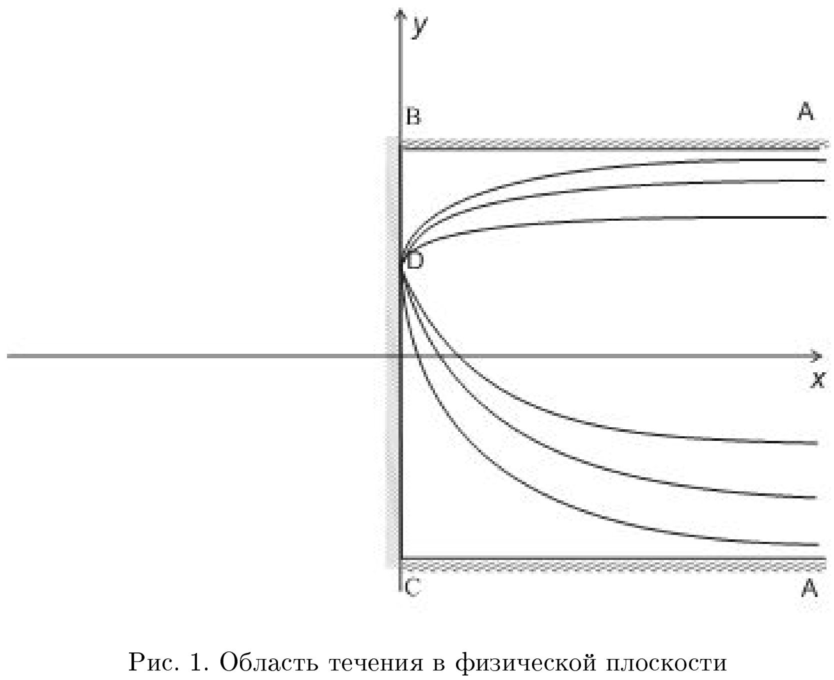

Рис. 1. Область течения в физической плоскости

При изучении элементарных фильтрационных потоков в подземной гидромеханике основными являются модели установившейся и неустановившейся фильтрации однофазных флюидов (несжимаемых или сжимаемых) в однородной (изотропной) пористой среде.

В данном случае рассматривается плоское движение несжимаемой однофазной жидкости в пласте к горизонтальной скважине, которая расположена несимметрично относительно кровли и подошвы (в точке $D(x_0, y_0)$ на рис. 1). Скважину мы рассматриваем в виде точечного стока (источника). Система уравнений, описывающих движение флюида в пористой среде, имеет вид

$$\begin{cases} -\mathrm{grad}H = \Phi(w)\dfrac{\overrightarrow{w}}{w}, \\ \mathrm{div}\overrightarrow{w} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где H — напор, $\Phi(w)$ — выражение для функции, определяющей закон фильтрации, $\overrightarrow{w}$ — скорость фильтрации. Напор является одной из основных характеристик двжения флюида в пористой среде, задаваемым выражением

$$\mathrm{H} = \frac{p}{\rho g} + y,$$

где p — давление, ρ — плотность флюида, y — некоторая начальная высота.

Первое уравнение системы (1.1) представляет собой закон фильтрации, т.е. связь между градиентом напора и скоростью фильтрации или, другими словами, связь между скоростью фильтрации и силой сопротивления [1], причем для имеющих физический смысл законов

$$\Phi(w) \geqslant 0,$$
$$\Phi'(w) \geqslant 0.$$

Второе уравнение системы (3.10) является уравнением неразрывности для установившегося движения несжимаемой жидкости.

Вводится разрез плоскости, представляющий собой луч с началом в точке D (см. рис. 1), задаваемый уравнением

$$y = y_0,\ x < x_0,$$

и достаточно отыскать функцию тока ψ такую, что равенства

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v,\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = u$$

справедливы вне этого разреза, где u и v — компоненты вектора скорости фильтрации $\overrightarrow{w}$ по осям x и y соответственно.

Считая, что интенсивность источника равна Q, получим, что на линии DBA (рис. 1) $\psi = Q/4$, на линии DCA $\psi = -Q/4$.

Течение является симметричным относительно прямой $x = x_0$, поэтому достаточно построить решение задачи только в области $x > x_0$.

Самым простым законом фильтрации, часто используемым для получения качественных зависимостей, является закон Дарси. Однако вблизи добывающих скважин течения флюидов испытывают значительные отклонения от линейного закона сопротивления среды [2]. При больших скоростях необходимо использовать нелинейные законы фильтрации. В работах [3, 4] рассмотрена фильтрация при степенном законе. Здесь также рассмотрено точное решение задачи при степенном законе фильтрации, но, в отличие от работ [3, 4], решение получено в общем случае, когда скважина расположена в произвольной, необязательно симметричной, точке пласта. Область решения в данной работе представляет собой половину физической плоскости $x > x_0$, тогда как в работах [3, 4] решение получено в одном квадранте плоскости.

1. Переход в плоскость годографа скорости. Функция тока и напор при законе Дарси

Для решения задачи при нелинейном (степенном) законе фильтрации необходимо выполнить преобразование к переменным годографа скорости, а затем получить выражения для функции тока и напора при линейном законе Дарси, так как данные выражения используются при постановке граничных условий в задаче нелинейной фильтрации. Поэтому в настоящем разделе рассматривается связь между переменными годографа скорости и переменными физической плоскости при законе Дарси и получены выражения для функции тока и напора в переменных годографа скорости.

Найдем, во что отображается область решения задачи (см. $ABDCA$ на рис. 1) при применении преобразования годографа. Новыми переменными будут (θ, w), где θ — угол наклона вектора скорости фильтрации в данной точке, w — модуль вектора скорости, т.е. для компонент вектора скорости u и v имеем

$$u = w\cos\theta,\ v = w\sin\theta.$$

К задачам фильтрации впервые это преобразование было применено С. А. Христиановичем в работе [5].

Часть линии тока DB, на которой $\psi = Q/4$ (рис. 1), переходит в вертикальный луч $\theta = \pi/2$, $w > 0$ (рис. 2). Часть линии тока BA, на которой $\psi = Q/4$, в физической плоскости это луч $y = h/2$, $x > x0$ (рис. 1), переходит в вертикальный отрезок BA на оси ординат. Часть линии тока DC, на которой $\psi = -Q/4$ (рис. 1), переходит в вертикальный луч $\theta = -\pi/2$, $w > 0$ (рис. 2). Часть линии тока CA, на которой $\psi = -Q/4$, в физической плоскости это луч $y = -h/2$, $x > x0$ (рис. 1), переходит в вертикальный отрезок CA на оси ординат (рис. 2).

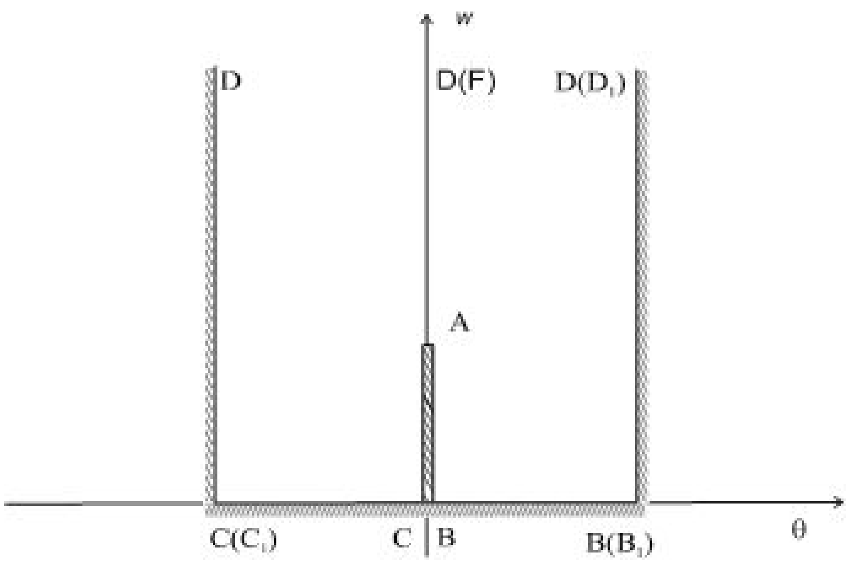

Рис. 2. Область решения задачи в плоскости годографа скорости

Заметим, что взаимная однозначность отображения нарушается в точках B, C физической плоскости. Они отображаются на отрезки $w = 0$, $0 < \theta < \pi/2$ и $w = 0$, $-\pi/2 < \theta < 0$. Ордината точки A в плоскости годографа находится следующим образом. В точке A $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} = w_A$, следовательно, $\psi = w_A y + C$, где C — константа. Так как в точке A $\psi(y = -h/2) = -Q/4$, а $\psi(y = h/2) = Q/4$, то $C = 0$, и для нахождения ординаты точки A получим выражение

$$w_A = \frac{Q}{2h}.$$

Переобозначим некоторые точки на границах области, на рис. 2 в скобках указаны новые обозначения.

Знаяя функцию тока, можно найти скорости течения. Также нас интересует давление p. Для построения решения использовался обобщенный напор:

$$H = \frac{k}{\mu}\left(\frac{p}{\rho g} + y\right),$$

здесь k — коэффициент проницаемости пористой среды, μ — вязкость жидкости.

Для начала рассмотрим случай применимости закона Дарси. Искомое решение для случая несимметричного расположения скважины относительно кровли и подошвы пласта получено в работе [6], функция тока

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\left\{\frac{\sin(my)\operatorname{ch}[m(x-x_0)] - \sin(my_0)}{\cos(my)\operatorname{sh}[m(x-x_0)]}\right\} \text{ при } x > x_0,$$

напор

$$H = -\frac{Q}{4\pi}\ln(\operatorname{sh}^2[m(x-x_0)]\cos^2(my) + (\operatorname{ch}[m(x-x_0)]\sin(my) - \sin(my_0))^2),$$

где $m = \pi/h$, h — толщина пласта, Q — интенсивность источника.

Получим связь между переменными физической плоскости и переменными годографа скорости и найдем выражения для функции тока и напора в переменных годографа скорости.

Для этого получим частные производные $\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$. Обозначим $x - x_0 = x'$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{Qm}{2\pi}\frac{\cos(my)[ch(mx')\sin(my_0) - \sin(my)]}{sh^2(mx') + \sin^2(my) - 2\sin(my)\sin(my_0)ch(mx') + \sin^2(my_0)} = -v,\\ \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{Qm}{2\pi}\frac{sh(mx')[ch(mx') - \sin(my)\sin(my_0)]}{sh^2(mx') + \sin^2(my) - 2\sin(my)\sin(my_0)ch(mx') + \sin^2(my_0)} = u.\end{aligned} \tag{1.2}$$

Затем воспользуемся соотношениями

$$tg\theta = \frac{v}{u},\ w^2 = u^2 + v^2. \tag{1.3}$$

Подставим соотношения (1.2) в (1.3), упростим получившиеся выражения и введем обозначения $a = \sin my$, $b = \operatorname{ch}(mx')$. Получим систему уравнений, которую необходимо разрешить относительно переменных a, b. Приведем систему к виду

$$\begin{cases}\dfrac{(1-a^2)(a - b\sin(my_0))^2}{(b^2-1)(b - a\sin(my_0))^2} = \operatorname{tg}^2\theta,\\ \dfrac{b^2 - a^2}{(a - b\sin(my_0))^2 + (b^2-1)\cos^2(my_0)} = s,\end{cases} \tag{1.4}$$

где $s = \left(\dfrac{2\pi w}{Qm}\right)^2$.

Обозначим

$$(a - b\sin(my_0))^2 = t,\ (b - a\sin(my_0))^2 = p.$$

Тогда

$$b^2 - a^2 = (p - t)/\cos^2(my_0).$$

Система (1.4) примет вид

$$\begin{cases}\dfrac{(1-a^2)t}{(b^2-1)p} = \operatorname{tg}^2\theta,\\ \dfrac{(p-t)/\cos^2(my_0)}{t + (b^2-1)\cos^2(my_0)} = s.\end{cases} \tag{1.5}$$

Из второго уравнения (1.5) выразим (b^2-1). Заметим, что $1 - a^2 = b^2 - a^2 - (b^2 - 1)$. Подставим выражения для $b^2 - 1$ и $1 - a^2$ в первое уравнение (1.5):

$$\frac{t + p(s\cos^2(my_0) - 1)}{p - t(1 + s\cos^2(my_0))}\frac{t}{p} = \operatorname{tg}^2\theta.$$

Введем новую переменную $t/p = q$. Получим квадратное уравнение с одной неизвестной, имеющее следующее решение:

$$q_{1,2} = \frac{1}{2\cos^2\theta}\left(-s\cos^2(my_0) + \cos(2\theta) \pm \sqrt{s^2\cos^4(my_0) - 2s\cos^2(my_0)\cos(2\theta) + 1}\right). \quad (1.6)$$

Вернемся к переменным a, b:

$$\frac{(a - b\sin(my_0))^2}{(b - a\sin(my_0))^2} = q. \quad (1.7)$$

Заметим, что при знаке «$-$» перед корнем в выражении (1.6) переменная q отрицательна. Кроме того, a, b, $\sin(my_0)$ — величины действительные. Поэтому уравнение (1.7) не имеет смысла при $q < 0$.

То есть

$$\frac{1}{2\cos^2\theta}\left(-s\cos^2(my_0) + \cos(2\theta) \pm \sqrt{s^2\cos^4(my_0) - 2s\cos^2(my_0)\cos(2\theta) + 1}\right) \geqslant 0. \quad (1.8)$$

Если знак перед корнем «+», то неравенство (1.8) выполняется, если правая часть отрицательна

$$1)\ s\cos^2(my_0) - \cos(2\theta) < 0,$$

при положительной правой части неравенство (1.8) верно для всех s, θ.

Если знак «$-$» перед корнем в выражении (1.6), то нетрудно показать, что неравенство (1.8) не имеет решений.

Таким образом, в рассматриваемой задаче

$$q = \frac{1}{2\cos^2\theta}\left(-s\cos^2(my_0) + \cos(2\theta) + \sqrt{s^2\cos^4(my_0) - 2s\cos^2(my_0)\cos(2\theta) + 1}\right). \quad (1.9)$$

Выразим отношение a/b через $q(s,\theta)$ из (1.7):

$$\frac{a}{b} = \frac{\pm\sqrt{q(s,\theta)} + \sin(my_0)}{1 \pm \sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0)}. \quad (1.10)$$

Знак «+» перед корнем $\sqrt{q(s,\theta)}$ в выражении (1.10) имеем при

$$1)\ \left.\begin{array}{c} \sin(my_0) \geqslant 0 \\ \sin(my_0) \leqslant \dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{1}{\sin(my_0)} \end{array}\right\},$$

или

$$2)\ \left.\begin{array}{c} \sin(my_0) < 0 \\ \dfrac{a}{b} \geqslant \sin(my_0);\ \dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{1}{\sin(my_0)} \end{array}\right\}. \quad (1.11)$$

Знак «$-$» перед корнем $\sqrt{q(s,\theta)}$ в выражении (1.10) имеем при

$$1)\ \left.\begin{array}{c} \sin(my_0) \geqslant 0 \\ \dfrac{a}{b} > \dfrac{1}{\sin(my_0)};\ \dfrac{a}{b} < \sin(my_0) \end{array}\right\},$$

или

$$2)\ \left.\begin{array}{c} \sin(my_0) < 0 \\ \dfrac{1}{\sin(my_0)} < \dfrac{a}{b} < \sin(my_0) \end{array}\right\}. \quad (1.12)$$

Для того чтобы записать выражение для функции тока в переменных годографа, удобно выписать выражения для a^2, b^2, ab через $q(s,\theta)$:

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{(q(s,\theta)+\mathrm{tg}^2\theta)(\sin(my_0)+\sqrt{q(s,\theta)})^2}{q(s,\theta)(\sin(my_0)+\sqrt{q(s,\theta)})^2+tg^2\theta(1+\sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0))^2}, \\ b^2 = \dfrac{(q(s,\theta)+tg^2\theta)(1+\sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0))^2}{q(s,\theta)(\sin(my_0)+\sqrt{q(s,\theta)})^2+tg^2\theta(1+\sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0))^2}, \\ ab = \dfrac{(q(s,\theta)+tg^2\theta)(1+\sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0))(\sin(my_0)+\sqrt{q(s,\theta)})}{q(s,\theta)(\sin(my_0)+\sqrt{q(s,\theta)})^2+tg^2\theta(1+\sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0))^2} \end{cases}$$

при выполнении (1.11).

При других условиях (1.12)

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{(q(s,\theta)+\mathrm{tg}^2\theta)(\sin(my_0)-\sqrt{q(s,\theta)})^2}{q(s,\theta)(\sin(my_0)-\sqrt{q(s,\theta)})^2+tg^2\theta(1-\sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0))^2}, \\ b^2 = \dfrac{(q(s,\theta)+tg^2\theta)(1-\sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0))^2}{q(s,\theta)(\sin(my_0)-\sqrt{q(s,\theta)})^2+tg^2\theta(1-\sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0))^2}, \\ ab = \dfrac{(q(s,\theta)+tg^2\theta)(1-\sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0))(\sin(my_0)-\sqrt{q(s,\theta)})}{q(s,\theta)(\sin(my_0)-\sqrt{q(s,\theta)})^2+tg^2\theta(1-\sqrt{q(s,\theta)}\sin(my_0))^2}. \end{cases}$$

Таким образом, выражение для функции тока в переменных годографа следующее:

$$\psi_D = \frac{Q}{2\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{ab-\sin(my_0)}{\sqrt{(1-a^2)(b^2-1)}}\right) = \frac{Q}{2\pi}\,\mathrm{arctg}\left[T(q,\theta)\right], \tag{1.13}$$

где $T(q,\theta)$ в зависимости от нижеприведенных условий имеет следующий вид:

$$T(q,\theta) = \frac{(q+\mathrm{tg}^2\,\theta)(1+\sqrt{q}\sin(my_0))(\sin(my_0)+\sqrt{q})}{\mathrm{tg}\,\theta(1-q)\sqrt{q}\cos^2(my_0)} - \\ - \frac{\sin(my_0)[q(\sin(my_0)+\sqrt{q})^2+\mathrm{tg}^2\,\theta(1+\sqrt{q}\sin(my_0))^2]}{\mathrm{tg}\,\theta(1-q)\sqrt{q}\cos^2(my_0)}$$

при условии (1.11). Или выражение для $T(q,\theta)$ имеет вид

$$T(q,\theta) = \frac{(q+\mathrm{tg}^2\,\theta)(1-\sqrt{q}\sin(my_0))(\sin(my_0)-\sqrt{q})}{\mathrm{tg}\,\theta(1-q)\sqrt{q}\cos^2(my_0)} - \\ - \frac{\sin(my_0)[q(\sin(my_0)-\sqrt{q})^2+\mathrm{tg}^2\,\theta(1-\sqrt{q}\sin(my_0))^2]}{\mathrm{tg}\,\theta(1-q)\sqrt{q}\cos^2(my_0)},$$

если выполняется (1.12).

2. Фильтрация при степенном законе

Рассмотрим фильтрацию для степенного закона, имеющего вид

$$\Phi(w) = w^n,\ n = \mathrm{const} > 0. \tag{2.1}$$

Когда параметр n закона равен 1, из выражения (2.1) получается линейный закон Дарси.

Систему уравнений (1.1) запишем в виде [7]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\theta}{\partial\psi} - \dfrac{\Phi\,(w)}{w}\dfrac{\partial w}{\partial H} = 0, \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial H} + \dfrac{w\Phi'\,(w)}{\Phi^2\,(w)}\dfrac{\partial w}{\partial\psi} = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Систему можно свести к уравнению эллиптического вида, позволяющему найти функцию тока [8]:

$$\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\Phi^2(w)}{w\Phi'(w)}\frac{\partial\psi}{\partial w}\right) + \frac{\Phi(w)}{w^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0. \tag{2.3}$$

Уравнение (2.3) для степенного закона фильтрации имеет вид

$$\frac{w^2}{n}\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2} + w\frac{\partial\psi}{\partial w} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0. \tag{2.4}$$

Граничные условия задаются так же, как для линейного закона Дарси (см. рис. 2):

$$\begin{cases} \psi\left(\dfrac{\pi}{2}, w\right) = \dfrac{Q}{4}, & w \in [0, +\infty), \\ \psi(\theta, 0) = \dfrac{Q}{4}, & \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \psi(\theta, w) = \dfrac{Q}{4}, & w \in [0, w_A]\,, \theta \to +0, \\ \psi(\theta, w) = -\dfrac{Q}{4}, & w \in [0, w_A]\,, \theta \to -0, \\ \psi(\theta, 0) = -\dfrac{Q}{4}, & \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right], \\ \psi\left(-\dfrac{\pi}{2}, w\right) = -\dfrac{Q}{4}, & w \in [0, +\infty). \end{cases} \tag{2.5}$$

Заметим, что линии тока в переменных годографа скорости симметричны относительно $\theta = 0$ и

$$\psi(0, w) = 0,\ w \in (w_A, +\infty).$$

Для решения задачи при степенном законе фильтрации введем функцию

$$\Psi = \psi - \psi_D,$$

где ψ_D задается выражениями (1.13). Уравнение для функции имеет вид

$$\frac{w^2}{n}\frac{\partial^2\Psi}{\partial w^2} + w\frac{\partial\Psi}{\partial w} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial\theta^2} = -\left[\frac{w^2}{n}\frac{\partial^2\psi_D}{\partial w^2} + w\frac{\partial\psi_D}{\partial w} + \frac{\partial^2\psi_D}{\partial\theta^2}\right]. \tag{2.6}$$

Поскольку граничные условия (2.5) при обоих законах фильтрации одинаковы, то в задаче для функции граничные условия нулевые:

$$\begin{cases} \Psi(\theta, 0) = 0, & \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ \Psi(\theta, w) = 0, & w \in [0, w_A]\,, \theta \to +0, \\ \Psi(\theta, w) = 0, & w \in [0, w_A]\,, \theta \to -0, \\ \Psi(\theta, 0) = 0, & \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right], \\ \Psi\left(-\dfrac{\pi}{2}, w\right) = 0, & w \in [0, +\infty), \\ \Psi\left(\dfrac{\pi}{2}, w\right) = 0, & w \in [0, +\infty), \end{cases} \tag{2.7}$$

причем $\Psi(0, w) = 0$, $w \in (w_A, +\infty)$.

Сделаем преобразование независимой переменной и неизвестной функции, полагая

$$w = \exp\left\{\frac{z}{\sqrt{n}}\right\}, \ \Psi\{z,\theta) = \exp\left\{\frac{1-n}{2\sqrt{n}}z\right\}\Pi(z,\theta). \qquad (2.8)$$

Тогда согласно преобразованию (2.8) исходная область (рис. 2) с границей, задаваемой выражениями

$$\begin{array}{ll} \theta = -\dfrac{\pi}{2}, & w \in (0,+\infty); \\ \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right), & w = 0; \\ \theta = 0, & w \in (0, w_A); \\ \theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right], & w = 0; \\ \theta = \dfrac{\pi}{2}, & w \in (0,+\infty); \end{array}$$

переходит в область с границей (рис. 3):

$$\begin{array}{ll} \theta = -\dfrac{\pi}{2}, & z \in (-\infty,+\infty); \\ \theta = 0, & z \in (-\infty, \sqrt{n}\ln w_A]\,; \\ \theta = \dfrac{\pi}{2}, & z \in (-\infty,+\infty), \end{array}$$

а уравнение (2.4) примет вид

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial\theta^2} - \frac{(1-n)^2}{4n}\Pi = -\exp\left\{\frac{n-1}{2\sqrt{n}}z\right\}\left[\frac{\partial^2\psi_D}{\partial z^2} + \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\frac{\partial\psi_D}{\partial z} + \frac{\partial^2\psi_D}{\partial\theta^2}\right]. \qquad (2.9)$$

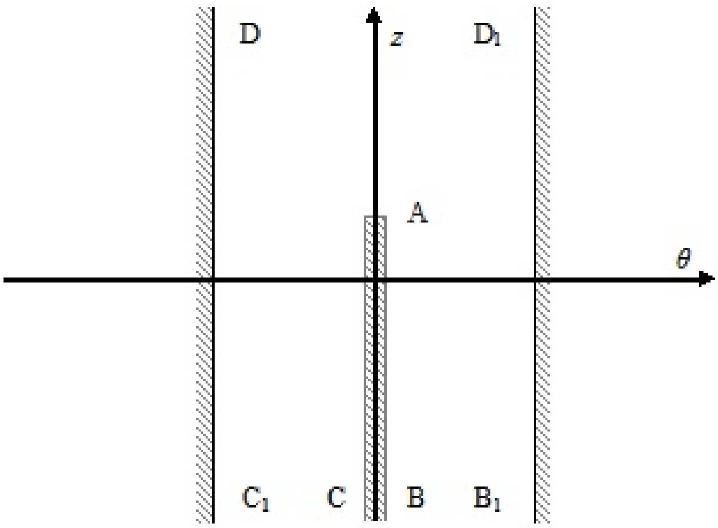

Рис. 3. Область решения в переменных (z,θ)

Фундаментальное решение однородного уравнения (2.9) в плоскости (z,θ) обладает тем свойством, что оно зависит лишь от расстояния до начала координат, т.е. от $\sqrt{z^2+\theta^2}$, и имеет логарифмическую особенность в этой точке. Это решение имеет вид [8]

$$\Pi_0(\theta, z) = K_0\left(\frac{|1-n|}{2\sqrt{n}}\sqrt{z^2+\theta^2}\right).$$

Здесь K_0 — функция Макдональда нулевого порядка. В работе [2, 3] было рассмотрено решение для случая симметрично расположенной относительно кровли и подошвы скважины в полосе $\theta \in [0,\pi/2]$, $z \in (-\infty,+\infty)$, являющейся половиной рассматриваемой здесь области. Для полосы $\theta \in [0,\pi/2]$, $z \in (-\infty,+\infty)$ была найдена функция Грина для однородного уравнения Гельмгольца. После этого решение неоднородного уравнения (2.9) может быть найдено по второй формуле Грина. Как известно, значение в некоторой точке искомой функции представляется в формуле Грина через значение фундаментального решения в этой точке.

Для построения функции источника для полосы $\theta \in [0, \pi/2]$, $z \in (-\infty, +\infty)$ источник помещается в произвольной точке (z, θ) и методом отражений относительно линий $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$ можно добиться того, чтобы на этих линиях функция источника обращалась в ноль. (При этом на линии $\theta = -\pi/2$ функция источника также обращается в ноль.) В результате приходим к бесконечной системе источников вида [8]

$$G(z,\theta,\sigma,\tau) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left[K_0\left(\frac{|1-n|}{2\sqrt{n}}\sqrt{(z-\sigma)^2+(\theta-\tau-\pi l)^2}\right) - \right.$$
$$\left. - K_0\left(\frac{|1-n|}{2\sqrt{n}}\sqrt{(z-\sigma)^2+(\theta+\tau+\pi l)^2}\right)\right].$$

В переменных (w, θ) функция источника имеет вид

$$G(w,\theta,\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\left[K_0\left(\frac{|1-n|}{2\sqrt{n}}\sqrt{n(\ln w-\ln\xi)^2+(\theta-\eta-\pi l)^2}\right) - \right.$$
$$\left. - K_0\left(\frac{|1-n|}{2\sqrt{n}}\sqrt{n(\;lnw-ln\xi)^2+(\theta+\eta+\pi l)^2}\right)\right].$$

Заметим, что $G(w,-\theta,\xi,\eta) = G(w,\theta,\xi,\eta)$, таким образом, при $\theta = -\pi/2$ функция источника также равна 0.

Для области решения, рассматриваемой в данной работе, получим следующее выражение для функции тока течения жидкости при степенном законе фильтрации:

$$\psi(\theta,w) = \psi_D - \frac{Qw^{\frac{1-n}{2}}\sqrt{n}}{2\pi} \times \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{G(w,\theta,\xi,\eta)}{\xi}\left[\frac{\xi^2}{n}\frac{\partial^2\psi_D}{\partial\xi^2}+\xi\frac{\partial\psi_D}{\partial\xi}+\frac{\partial^2\psi_D}{\partial\eta^2}\right]d\eta d\xi, \quad (2.10)$$

где

$$\psi_D = \frac{Q}{2\pi}arctg\left(\frac{ab-\sin(my_0)}{\sqrt{(1-a^2)(b^2-1)}}\right) = \frac{Q}{2\pi}\operatorname{arctg}\left[T(q,\theta)\right],$$

а $T(q,\theta)$ в зависимости от нижеприведенных условий имеет следующий вид:

$$T(q,\theta) = \frac{(q+tg^2\theta)(1+\sqrt{q}\sin(my_0))(\sin(my_0)+\sqrt{q})}{tg\theta(1-q)\sqrt{q}\cos^2(my_0)} -$$
$$-\frac{\sin(my_0)[q(\sin(my_0)+\sqrt{q})^2+tg^2\theta(1+\sqrt{q}\sin(my_0))^2]}{tg\theta(1-q)\sqrt{q}\cos^2(my_0)}$$

при условии (1.11). Или

$$T(q,\theta) = \frac{(q+tg^2\theta)(1-\sqrt{q}\sin(my_0))(\sin(my_0)-\sqrt{q})}{tg\theta(1-q)\sqrt{q}\cos^2(my_0)} -$$
$$-\frac{\sin(my_0)[q(\sin(my_0)-\sqrt{q})^2+tg^2\theta(1-\sqrt{q}\sin(my_0))^2]}{tg\theta(1-q)\sqrt{q}\cos^2(my_0)},$$

если выполняется (1.12).

Функция (2.10) является решением задачи. Итак, построено точное решение в плоскости годографа для функции тока при степенном законе фильтрации. Найденная функция тока связана с напором уравнениями (2.2), что дает возможность найти частные производные напора по θ и по w. Значит, нам также известно поле градиента напора.

Нелинейность рассматриваемого закона фильтрации обуславливает сложность возникающих уравнений, но позволяет описывать движение флюида в окрестности горизонтальных скважин точнее, чем линейный закон Дарси, который не выполняется при больших скоростях фильтрации.

Область решения в физической плоскости, отображение которой на плоскость годографа скорости выполняется в данной работе, представляет собой полуплоскость, что позволяет получить решение для скважины, расположенной в произвольной точке пласта. Актуальность рассматриваемых в данной работе задач фильтрации обусловлена активным применением технологии горизонтального бурения на практике в настоящее время, в результате чего возникает необходимость в построении теоретических моделей притока природных жидкостей к горизонтальным скважинам. Полученные решения можно использовать для получения приближенного решения задачи притока жидкости к горизонтальной скважине большой протяженности.

Литература

1. *Бернардинер М.Г., Ентов В.М.* Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. — М.: Наука, 1975. — 199 с.
2. *Басниев К.С., Кочина И.Н., Максимов В.М.* Подземная гидромеханика. — М.: Недра, 1993. — 415 с.
3. *Черняев А.П.* Нелинейная фильтрация для специального и степенного закона сопротивления среды // Труды МФТИ. — 2011. — Т. 3, № 1. — С. 156–161.
4. *Черняев А.П.* Нелинейная фильтрация для степенного закона сопротивления среды // Вестник ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Т. 13. — Вып. 2. — С. 215–223.
5. *Христианович С.А.* Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси // ПММ. — 1940. — Т. IV. — Вып. 1. — С. 33–52.
6. *Черняев А.П., Лигостаева Н.А.* Моделирование линейной стационарной фильтрации к горизонтальной скважине большой протяженности // Математика: Фундаментальные вопросы, приложения, преподавание // Межведомственный сборник научных трудов. Вып. 2. — М.: Изд-во МГУП, 2002. — С. 220–227.
7. *Лейбензон Л.С.* Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. — М.: Гостоптехиздат, 1947. — 245 с.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 735 с.

Поступила в редакцию 17.03.2011