

УДК 519.766

DOI: 10.53815/20726759_2021_13_3_107

И. А. Решетников

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Сложность языка поворотов двух дуг*Краткое сообщение*

Работа посвящена изучению количества слов длины n , порождаемых поворотами всевозможных двух дуг окружности на фиксированный иррациональный угол поворота ε . В работе [1] (см. также [2]) получена кубическая оценка для арифметической сложности слов Штурма, откуда следует и кубическая оценка для количества слов, порождаемых поворотами двух дуг. В данной работе угол поворота предполагается фиксированным, в результате чего оценка на количество слов длины n получается квадратичной от n .

Ключевые слова: слова Штурма, арифметическая сложность, механические слова, динамические системы, поворот окружности, символическая динамика.

I. A. Reshetnikov

Moscow Institute of Physics and Technology

Complexity of the language of turns of two arcs*Short Communications Article*

The paper is devoted to the study of the number of words of length n generated by rotations of all possible two arcs of a circle by a fixed irrational angle of rotation ε . In [1], (see also [2], a cubic estimate for the arithmetic complexity of Sturm's words is obtained, which implies a cubic estimate for the number of words generated by rotations of two arcs. In this paper, the angle of rotation is assumed to be fixed, as a result of which the estimate for the number of words of length n is quadratic in n . This work was carried out with the help of the Russian Science Foundation Grant N 17-11-01377.

Key words: Sturmian words, arithmetic complexity, mechanical words, dynamical systems, circle rotation, symbolic dynamics.

1. Введение

Дана окружность единичной длины. Пусть ε — фиксированный иррациональный угол поворота. Цель данной работы — изучение количества слов длины n , порождаемых динамической системой поворота на ε двух дуг, на которые разбита окружность. В работе [1] получена кубическая оценка для арифметической сложности слов Штурма, откуда следует и кубическая оценка для количества слов, порождаемых поворотами двух дуг. Если угол поворота предполагается фиксированным, то оценка на количество слов длины n получается квадратичной от n .

2. Основная часть

Нас интересует динамическая система $(\omega, \alpha, R_\varepsilon, x_0)$ — повороты окружности ω длины 1, разбитой на две дуги длины α и $1 - \alpha$ на фиксированный иррациональный угол поворота ε с начальной точкой x_0 . Если $R_\varepsilon^n(x_0) \in \alpha$, то n -я буква слова w равна a , иначе b . Чтобы рассмотреть сразу все α , рассмотрим тор $T 1 \times 1$, в котором каждое сечение прямой $y = \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$ является окружностью, разбитой на дуги α и $1 - \alpha$. Тогда поворот тора $x = x + \varepsilon$ преобразует все окружности как в $(\omega, \alpha, R_\varepsilon, x_0)$. Прямые $x = 0 = 1$, $y = 0 = 1$ и $x = y$ разбивают тор на две части, в которых пишутся разные буквы при попадании. Вместо того, чтобы рассматривать то, как проходит траектория $R_\varepsilon(x_0)$ рассмотрим, как разбивают тор образы прямых $x = 0 = 1$, $y = 0 = 1$ и $x = y$ при обратном преобразовании $R_{-\varepsilon}$.

После $n - 1$ итераций $R_{-\varepsilon}$ мы получим n вертикальных прямых ($x = 0, x = -\varepsilon, x = \{-2\varepsilon\}, \dots$), n наклонных прямых ($x = y, x = y + \varepsilon, x = \{y + 2\varepsilon\}, \dots$) и одну горизонтальную $y = 0$. Чтобы подсчитать на сколько частей они разбивают тор, воспользуемся формулой Эйлера для графов на торе $V - E + F = 0$. В нашем случае множество вершин графа V — это точки пересечения указанных прямых, множество рёбер графа E — отрезки, на которые прямые разбиваются точками пересечения. Множество граней разбиения F — это множество областей, на которые прямые разбивают тор. Эти области соответствуют различным словам, порождённым символической динамикой $(\omega, \alpha, R_\varepsilon, x_0)$, где начальная точка x_0 лежит в соответствующей области. Каждая вертикальная прямая пересекает n наклонных, каждая наклонная пересекает n вертикальных. горизонтальная прямая также пересечена всеми наклонными и вертикальными, но только в n точках, являющимися итерациями точки $(0, 0)$. Итого $|V| = n^2$, $|E| = 2n^2 + n$. Отсюда получаем, что искомое число частей разбиения $F = E - V = n^2 + n$.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант № 17-11-01377.

Литература

1. Фрид А.Э. Нижняя оценка на арифметическую сложность слов Штурма // Сиб. электрон. матем. изв. 2005. N 2. С. 14–22.
2. Cassaigne J., Frid A.E. On the arithmetical complexity of Sturmian words // Theoret. Comput. Sci. 2007. N 3. P. 304–31.

References

1. Frid A.E. A lower bound for the arithmetic complexity of Sturmian words. Sib. Elektron. Mat. Izv. 2005. N 2. P. 14–22. (in Russian).
2. Cassaigne J., Frid A.E. On the arithmetical complexity of Sturmian words // Theoret. Comput. Sci. 2007. N 3. P. 304–31.

Поступила в редакцию 24.08.2021