УДК 517.9
DOI: 10.53815/20726759_2021_13_3_41

*К. О. Гук, О. А. Мыльцина*

Саратовский национальный исследовательский государственный университет
имени Н. Г. Чернышевского

# Метод решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в виде функции Хевисайда

Рассмотрен метод решения определенного типа дифференциального уравнения, содержащего переменные коэффициенты в виде функции Хевисайда. В качестве примера приведено решение задачи о безмоментном состоянии оболочки, состоящей из гладко сопряженных между собой сферы–цилиндра–сферы, находящейся под действием внутреннего давления.

Для композиции получим обобщенный радиус-вектор, компоненты метрического тензора, главные кривизны. Система дифференциальных уравнений для усилий $T^{11}$, $T^{22}$ и $T^{12}$ сводится к дифференциальному уравнению I-го порядка для $T^{11}$ с коэффициентами в виде функций Хевисайда. Получено аналитическое решение системы и построены графики усилий $T^{11}$ и $T^{22}$.

**Ключевые слова:** оболочка вращения, функция Хевисайда, обобщенный радиус-вектор, дифференциальные уравнения.

*K. O. Guk, O. A. Myltcina*

Saratov State University

# Method for solving differential equations with coefficients in the form of the Heaviside step function

The article deals with the method for solving differential equations and coefficients contain the Heaviside step function. As in an example, the solution of the firs order differential equation, which is the answer to the problem of momentless thermoelasticity on the surface under normal load is found.

For the composition we obtain a generalized radius-vector, components of the metric tensor, and principal curvatures. The system of differential equations for $T^{11}$, $T^{22}$, and $T^{12}$ is reduced to a first order differential equation for $T^{11}$ with coefficients as Heaviside functions. An analytical solution of the system is obtained and graphs of $T^{11}$ and $T^{22}$ efforts are constructed.

**Key words:** shell of revolution, Heaviside step function, generalized radius vector, differential equations.

## 1. Введение

Рассмотрим, линейное однородное уравнение $n$-го порядка в виде

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)\, y^{(1)} + a_n(x)\, y = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x)$ содержат функции Хевисайда $H(x - x_i)$, где $x_i$ – $k$ точек, в которых функции Хевисайда неопределены, но ограничены.

Решение ДУ (1) ищем в виде

$$y = y_1 + \sum_{i=1}^{k} (y_{i+1} - y_i) H(x - x_i). \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) приведет к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и условий в точках $x = x_i$.

## 2. Примеры решения дифференциальных уравнений, содержащих функции Хевисайда

Рассмотрим метод решения уравнений (1) на примерах.

**Пример 1.**

Найти фундаменталную систему решений для дифференциального уравнения

$$y^{(2)}(x) + H(x - x_1) y(x) = 0, \tag{3}$$

в котором $a_1(x) = 0, a_2(x) = H(x - x_1)$ – это смещенная функция Хевисайда [1].
Решение уравнения будем искать в виде [2]:

$$y(x) = y_1(x) + (y_2(x) - y_1(x)) H(x - x_1). \tag{4}$$

Продифференцируем два раза $y(x)$ по переменной $x$ и получим

$$y^{(1)}(x) = y_1^{(1)} + (y_2(x) - y_1(x)) \Big|_{x=x_1} \delta(x - x_1) + \left(y_2^{(1)}(x) - y_1^{(1)}(x)\right) H(x - x_1),$$

$$y^{(2)}(x) = y_1^{(2)} + \left(y_2^{(1)}(x) - y_1^{(1)}(x)\right) \Big|_{x=x_1} \delta(x - x_1) + \left(y_2^{(2)}(x) - y_1^{(2)}(x)\right) H(x - x_1). \tag{5}$$

Здесь $H'(x - x_1) = \delta(x - x_1)$ – $\delta$-функция Дирака, применяя её свойства [2], получаем

$$\begin{cases} (y_2(x) - y_1(x)) \Big|_{x=x_1} = 0 \\ \left(y_2^{(1)}(x) - y_1^{(1)}(x)\right) \Big|_{x=x_1} = 0 \end{cases} \text{– условия совмещения в точке } x = x_1. \tag{6}$$

После подстановки в (3) выражений (4) и (5), уравнение (3) распадется на систему из двух дифференциальных уравнений и условий (7):

$$\begin{cases} y_1^{(2)}(x) = 0, \\ y_2^{(2)}(x) - y_1^{(2)}(x) + y_2(x) = 0, \\ (y_2(x) - y_1(x)) \Big|_{x=x_1} = 0, \\ \left(y_2^{(1)}(x) - y_1^{(1)}(x)\right) \Big|_{x=x_1} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Решая (7) и подставляя в (4), получим ответ для (3) в виде функции, содержащей функции Хевисайда:

$$\begin{cases} y(x) = C_1 \cos(x_1)(x - x_1) + C_2 \sin(x_1)(x_1 - x) + C_1 \sin(x_1) + C_2 \cos(x_1) + \\ + \left[C_1(\sin(x) - \cos(x_1)(x - x_1) - \sin(x_1)) + C_2(\cos(x) - \sin(x_1)(x_1 - x) - \cos(x_1))\right] H(x - x_1), \\ C_1, C_2 = \text{const}. \end{cases}$$

Таким образом, фундаментальная система функций имеет вид

$$Y_1(x) = \cos(x_1)(x - x_1) + \sin(x_1) + [\sin(x) - \cos(x_1)(x - x_1) - \sin(x_1)] H(x - x_1);$$

$$Y_2(x) = \sin(x_1)(x_1 - x) + \cos(x_1) + [\cos(x) - \sin(x_1)(x_1 - x) - \cos(x_1)]H(x - x_1).$$

**Пример 2.**

Найти фундаменталную систему решений для дифференциального уравнения

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d\delta}{dx}y = 0. \tag{8}$$

Пользуясь свойствами $\delta$–функции, запишем

$$\frac{d(\delta)}{dx}y = \frac{d(y\delta)}{dx} - \delta\frac{dy}{dx} = y(x_1)\frac{d\delta}{dx} - \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_1}\delta. \tag{9}$$

Подставим (9) в (8) и получим

$$\frac{d^4y}{dx^4} + y(x_1)\frac{d\delta}{dx} - \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=x_1}\delta = 0. \tag{10}$$

Решение уравнения будем искать в виде (4). Найдем производую $\frac{d^4y}{dx^4}$ для (4) и подставим в (10):

$$\left\{\begin{array}{c} y_1^{(4)}(x) + (y_2^{(4)}(x) - y_1^{(4)}(x))H(x - x_1) + (y_2^{(3)}(x) - y_1^{(3)}(x))\Big|_{x=x_1}\delta + \\ +(y_2^{(2)}(x) - y_1^{(2)}(x))\Big|_{x=x_1}\frac{d\delta}{dx} - y_1^{(1)}(x)\Big|_{x_1=x}\delta = 0. \end{array}\right. \tag{11}$$

Группируя по функциям $H^0(x - x_1)$, $H(x - x_1)$, $\delta$ и $\frac{d\delta}{dx}$, получим

$$\left\{\begin{array}{c} y_1^{(4)}(x) = 0, \\ y_2^{(4)}(x) - y_1^{(4)}(x) = 0. \end{array}\right. \tag{12}$$

Условия сопряжения:

$$\left\{\begin{array}{c} y_2(x)\Big|_{x=x_1} = y_1(x)\Big|_{x=x_1}, \\ y_2^{(1)}(x)\Big|_{x=x_1} = y_1^{(1)}(x)\Big|_{x=x_1}, \\ y_2^{(3)}(x)\Big|_{x=x_1} = y_1^{(3)}(x)\Big|_{x=x_1} + y_1^{(1)}(x)\Big|_{x=x_1}, \\ y_2^{(2)}(x)\Big|_{x=x_1} + y_1(x)\Big|_{x=x_1} = y_1^{(2)}(x)\Big|_{x=x_1}. \end{array}\right. \tag{13}$$

Решая систему (12) и пользуясь (13), в результате получим

$$\begin{array}{c} y(x) = C_1(x^3 + \frac{1}{2}(x - 2x_1)(x - x_1)^2x_1^2H(x - x_1)) + \\ +C_2(x_2 + \frac{1}{6}(2x - 5x_1)(x - x_1)^2x_1H(x - x_1)) + \\ +C_3(x + \frac{1}{6}(x - 4x_1)(x - x_1)^2H(x - x_1)) + \\ +C_4(1 - \frac{1}{2}(x - x_1)^2H(x - x_1)). \end{array} \tag{14}$$

Таким образом, фундаментальная система функций имеет вид

$$\left\{\begin{array}{c} Y_1(x) = x^3 + \frac{1}{2}(x - 2x_1)(x - x_1)^2x_1^2H(x - x_1), \\ Y_2(x) = x_2 + \frac{1}{6}(2x - 5x_1)(x - x_1)^2x_1H(x - x_1), \\ Y_3(x) = x + \frac{1}{6}(x - 4x_1)(x - x_1)^2H(x - x_1), \\ Y_4(x) = 1 - \frac{1}{2}(x - x_1)^2H(x - x_1). \end{array}\right. \tag{15}$$

## 3. Приложение метода решения ДУ к задаче механики

Рассмотрим композиции из трех элементов сферы–цилиндра–сферы, находящейся под действием внутреннего или внешнего давления [3].

Композицию из трех элементов сфера–цилиндр–сфера, отнесем к декартовым координатам $\xi_j (j = 1, 2, 3)$ с началом в центре одной из сфер (рис. 1). Введем угол $\theta$ между отрицательным направлением оси $\xi_3$ и вспомогательным вектором $\bar{r}$, определяющим положение любой точки меридиональной кривой относительно точки $O'$ (рис. 1).

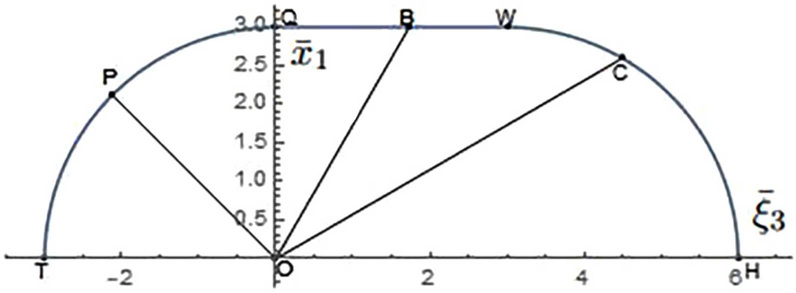


Рис. 1. Меридианальная кривая оболочки из трех элементов сферы–цилиндра–сферы

Обобщенный вектор положения $\widetilde{\bar{r}}$ точки на меридиональной кривой (рис. 1) имеет вид

$$\widetilde{\bar{r}}\,(\theta) = \bar{r}_I + (\bar{r}_{II} - \bar{r}_I)\, H\,(\theta - \theta_1) + (\bar{r}_{III} - \bar{r}_{II})\, H\,(\theta - \theta_2)\,, \tag{16}$$

$\bar{r}_I = R \sin\theta \bar{x}_1 + R\,(-\cos\theta)\,\bar{\xi}_3, \bar{r}_{II} = R\bar{x}_1 + R\,(-\cot\theta)\,\bar{\xi}_3, \bar{r}_{III} = R\sin(-2\theta)\bar{x}_1 + R\,(1 + \cos 2\theta)\,\bar{\xi}_3$, $\theta_i$ $(i = 1, 2)$ – углы совмещения элементов композиции: $\theta_1 = \frac{\pi}{2},\ \theta_2 = \frac{3\pi}{4}$.

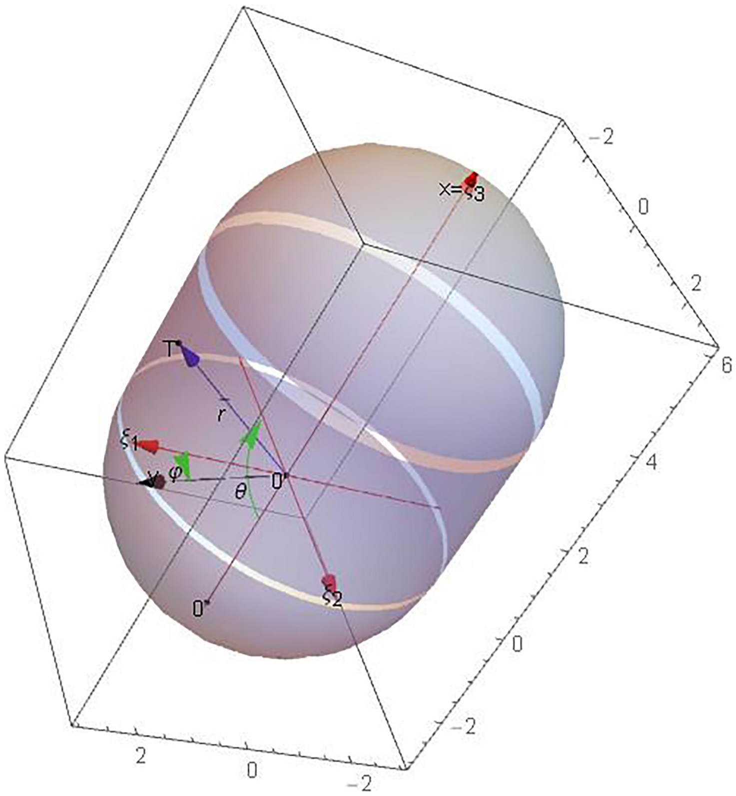


Рис. 2. Оболочка из сферы–цилиндра–сферы

Так как $\bar{x}_1 = \left(\cos(\varphi)\,\bar{\xi}_1 + \sin(\varphi)\,\bar{\xi}_2\right)$, то выражение (16) для любой точки срединной поверхности композиции примет вид (рис. 2). Здесь $\varphi$ – угол поворота в плоскости $O\bar{\xi}_1\bar{\xi}_2$.

$$\begin{gathered}\bar{r}(\theta,\varphi) = \\ = \langle R\left[(-\cos\theta) + \left[(-\cot\theta) - (-\cos\theta)\right]H(\theta-\theta_1) + \left[(1+\cos 2\theta) - (-\cot\theta)\right]H(\theta-\theta_2)\right]\rangle\,\bar{\xi}_3 + \\ + \langle R\left[(\sin\theta + (1-\sin\theta)\right]H(\theta-\theta_1) + (\sin(-2\theta)-1)H(\theta-\theta_2)\rangle \times (\cos(\varphi)\bar{\xi}_1 + \sin(\varphi)\bar{\xi}_2).\end{gathered}$$

Композиция находится в безмоментном состоянии. В этом случае система уравнений безмоментной осесимметричной термоупругости для композиции сферы–цилиндра–сферы имеет вид

$$\left\{\begin{array}{c}\left(\sqrt{G_{22}}T^{11}\right)_{,1} + \sqrt{G_{11}}T^{12}{}_{,2} - \left(\sqrt{G_{22}}\right)_{,1}T^{22} + \sqrt{G_{11}G_{22}}q_1 = 0,\\ \sqrt{G_{11}}T^{22}{}_{,2} + \left(\sqrt{G_{22}}T^{12}\right)_{,1} + \left(\sqrt{G_{22}}\right)_{,1}T^{12} + \sqrt{G_{11}G_{22}}q_2 = 0,\\ T^{11}k_1 + T^{22}k_2 = q_3.\end{array}\right. \tag{17}$$

Здесь $G_{ii} = (\overline{r}_{,i})^2$ – параметры Ламе, $i = \overline{1,2}$, 1 – соответствует $\theta$ и 2 – соответствует $\varphi$. $k_i = \bar{m}\frac{\overline{r}_{,ii}}{G_{ii}}$ – главные кривизны для данной оболочки, $\bar{m} = \frac{\overline{r}_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \times \frac{\overline{r}_{,2}}{\sqrt{G_{22}}}$ – вектор нормали к касательной плоскости оболочки.

$$\begin{gathered}\overline{r}_{,1} = \left\langle R\left[\cos\theta + (0-\cos\theta)\,H\left(\theta-\tfrac{\pi}{2}\right) + (-2\cos(2\theta)-0)H\left(\theta-\tfrac{3\pi}{4}\right)\right]\right\rangle \times \\ \times\left(\cos(\varphi)\overline{\xi_1} + \sin(\varphi)\overline{\xi_2}\right) + \\ + R\left[\sin\theta + \left(\tfrac{1}{\sin^2\theta} - \sin\theta\right)H\left(\theta-\tfrac{\pi}{2}\right) + \left(-2\sin(2\theta) - \tfrac{1}{\sin^2\theta}\right)H\left(\theta-\tfrac{3\pi}{4}\right)\right]\overline{\xi_3},\end{gathered}$$

$$\overline{r}_{,2} = \left\langle R\left[\sin\theta + (1-\sin\theta)\,H\left(\theta-\tfrac{\pi}{2}\right) + (\sin(-2\theta)-1)H\left(\theta-\tfrac{3\pi}{4}\right)\right]\right\rangle\left(-\sin(\varphi)\overline{\xi_1} + \cos(\varphi)\overline{\xi_2}\right).$$

Параметры Ламе для оболочки из трех элементов сфера–цилиндр–сфера:

$$\sqrt{G_{11}} = R\left[1 + \left(\frac{1}{sin^2\theta} - 1\right)H\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) + \left(2 - \frac{1}{sin^2\theta}\right)H\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\right],$$

$$\sqrt{G_{22}} = R\left[\sin\theta + (1-\sin\theta)H\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) + (\sin(-2\theta)-1)H\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\right].$$

Запишем вектор нормали $\overline{m}$ к касательной плоскости оболочки, и координаты данного вектора будут равны:

$$\overline{m} = \frac{\overline{r}_{,1}}{\sqrt{G_{11}}} \times \frac{\overline{r}_{,2}}{\sqrt{G_{22}}},$$

$$\begin{gathered}\overline{m} = -\left\langle\sin\theta + (1-\sin\theta)\,H\left(\theta-\tfrac{\pi}{2}\right) + (-\sin(2\theta)-1)\,H\left(\theta-\tfrac{3\pi}{4}\right)\right\rangle \times (\cos(\varphi)\overline{\xi_1} + \sin(\varphi)\overline{\xi_2}) + \\ + \left\langle\cos\theta + (0-\cos\theta)\,H\left(\theta-\tfrac{\pi}{2}\right) + (-\cos(2\theta)-0)\,H\left(\theta-\tfrac{3\pi}{4}\right)\right\rangle\overline{\xi_3},\end{gathered}$$

Вычислим главные кривизны $k_1$ и $k_2$:

$$k_1 = \overline{m}\cdot\frac{\overline{r}_{,11}}{G_{11}} \text{ и } k_2 = \overline{m}\cdot\frac{\overline{r}_{,22}}{G_{22}},$$

$$k_1 = \frac{1}{R}\left\langle 1 + (0-1)\,H\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) + (1-0)\,H\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\right\rangle,$$

$$k_2 = \frac{1}{R}\left\langle 1 + (1-1)\,H\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) + (1-1)\,H\left(\theta-\frac{3\pi}{4}\right)\right\rangle = \frac{1}{R}.$$

Парамеры Ламе $\sqrt{G_{11}}$, $\sqrt{G_{22}}$ и главные кривизны $k_1$, $k_2$ полученные для композиции сфера–цилиндр–сфера удовлетворяют условию Кодацци–Гаусса–Петерсона.

Получим аналитическое решение для усилий $T^{11}$ и $T^{22}$ оболочки вращения, зависящих от $\theta$ и $\varphi$. Построим и проанализируем их графики.

Так как оболочка вращения находится под постоянным давлением, то $q_2 = q_1 = 0$ и $T^{12} = 0$, таким образом, в системе пропадет второе уравнение. Выразим $T^{22}$ из 3-го уравнения системы (3):

$$T^{22} = \frac{1}{k_2}\left(q_3 - T^{11}k_1\right) \tag{18}$$

и подставим это в (3).

Решение ищем для $T^{11}$ в виде

$$T^{11} = T_1 + (T_2 - T_1)\, H(\theta - \theta_1) + (T_3 - T_2) H(\theta - \theta_2). \tag{19}$$

Подставим выражение главных кривизн, параметра Ламе и (19) в (3), получим

$$\begin{cases} (T_1)_{,1} + 2T_1 \operatorname{ctg}\theta = Rq_3 \operatorname{ctg}\theta, \\ (T_2)_{,1} - (T_1)_{,1} = Rq_3(-\operatorname{ctg}(-2\theta)), \\ (T_3)_{,1} - (T_2)_{,1} - 4T_3 \operatorname{ctg}(-2\theta) + 4T_2 \operatorname{ctg}(-2\theta) = -2Rq_3 \operatorname{ctg}(-2\theta), \\ [T_3 - T_2]\Big|_{\theta=\theta_2} = 0, \\ [T_2 - T_1]\Big|_{\theta=\theta_1} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Решая (20), получим

$T^{11} = \frac{Rq_3}{2}$ и $T^{22} = \frac{Rq_3}{2}\left(1 + (2-1)\, H\left(\theta - \theta_1\right) + (1-2)\, H\left(\theta - \theta_2\right)\right)$.

На рис. 3 и 4 приведены усилия $T^{11}$ и $T^{22}$ для композиции сферы–цилиндра–сферы гладко сопряженных между собой, находящейся под постоянным давлением. Как видно из рисунков, усилие $T^{22}$ в месте сопряжения элементов терпит разрыв 1-го рода – скачок на величину $\frac{Rq_3}{2}$. При решении задачи с введением дополнительной нагрузки на цилиндре в виде $\widetilde{q} = P(H(\theta - \theta_1) - H(\theta - \theta_2))$, в которой коэффициент $P$ подбирается таким образом, чтобы уменьшить величину скачка, добиться положительного результата не удалось.

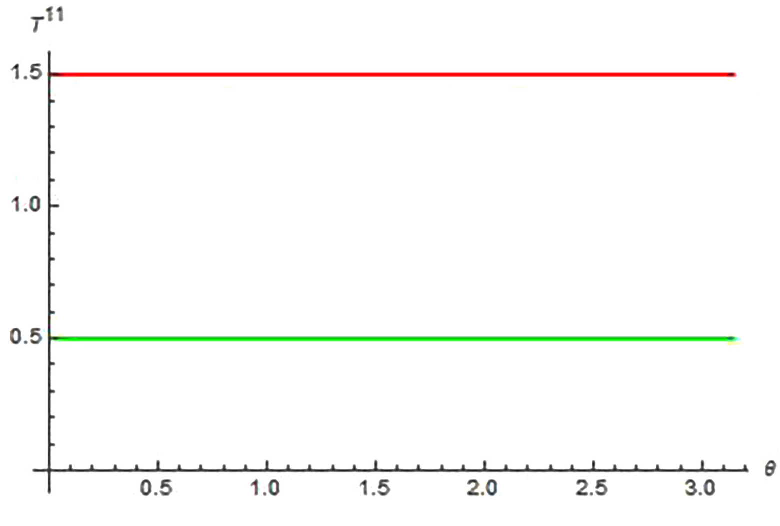


Рис. 3. Усилие $T^{11}$, при $R = 3$, $q_3 = 1$ – верхняя линия, $R = 2$, $q_3 = 0.5$ – нижняя линия

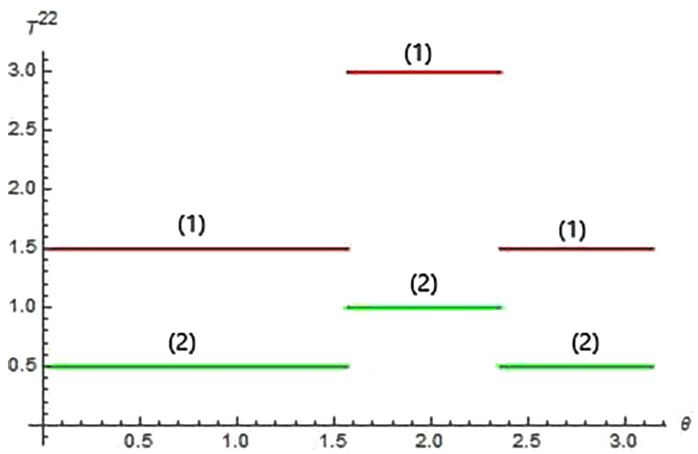


Рис. 4. Усилие $T^{22}$, при $R = 3$, $q_3 = 1$ – линия (1), $R = 2$, $q_3 = 0.5$ – линия (2)

## Литература


1. *Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход: пер. с англ. / Москва : Мир, 1976. 311 с.
2. *Белосточный Г.Н.* Аналитические методы определения замкнутых интегралов сингулярных дифференциальных уравнений термоупругости геометрически нерегулярных оболочек // Доклады академии военных наук. 1999. № 1. С. 14–26.
3. *Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А.* К вопросу статической устойчивости композиции из различных, по геометрическим свойствам, оболочек вращения // Доклады академии военных наук. 2012. № 5(54). С. 21–25.


## References


1. *Antosik P., Mikusinski J., Sikorski R.* The theory of generalized functions. Sequential approach: translation from English. Moscow : Mir, 1976. P. 311. (in Russian).
2. *Belostochny G.N.* Analytical methods for the determination of closed integrals of singular differential equations of thermoelasticity, geometrically irregular shells. Reports of the Academy of Military Sciences. 1999. N 1. P. 14–26. (in Russian).
3. *Belostochny G.N., Myltcina O.A.* On the question of static stability of a composition made of shells of revolution of various geometric properties. Reports of the Academy of Military Sciences. 2012. N 5(54). P. 21–25. (in Russian).


*Поступила в редакцию 26.01.2021*