

УДК 519.6, 532.5.032

И. А. Максименко, А. Н. Хорин

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Течение вязкого газа в вертикальной трубе

Рассматривается течение вязкого газа в круглой трубе под действием силы тяжести. Давление считается постоянным. (Для реализации такого течения в земных условиях, при которых давление растёт с высотой, необходимо либо искусственно создавать разрежение снизу (отсос воздуха насосом), либо нагнетать воздух сверху.) Для коэффициента вязкости используется формула Сазерленда, а для коэффициента теплопроводности используется формула, похожая на формулу Сазерленда и имеющая такую же точность. При надлежащем выборе входных параметров реализуется течение Пуазейлевского типа, в котором скорость, плотность и температура зависят только от расстояния до оси трубы (скорость направлена вдоль этой оси). В результате система уравнений движения вязкого газа, состоящая в общем случае из уравнений в частных производных, сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Точное решение этой системы предлагается для верификации программ расчета течения вязкого газа.

Ключевые слова: точные решения, вязкий газ, уравнения Навье–Стокса, формула Сазерленда.

I. A. Maximenko, A. N. Khorin

Moscow Institute of Physics and Technology

Viscous gas flow in a vertical tube

We consider the viscous gas motion in a round tube under the gravity force. Gas pressure is supposed to be constant. (It is necessary to create a vacuum at the bottom (air suction by a pump) or air injection at the top for implementation of a such a flow.) The Sutherland formula is used for the viscosity coefficient and a similar formula with the same rate of accuracy is used for the thermal conductivity coefficient. With an appropriate choice of input parameters, the Poiseuille kind flow occurs such that its velocity, density and temperature depend only on the distance to the tube axis (velocity is directed along this axis). Thus the system of motion equations, which generally consists of partial derivatives equations, turns into the system of ordinary differential equations. An exact solution to this system is suggested for verification of viscous gas flow computational packages.

Key words: exact solutions, viscous gas, Navier-Stokes equations, Sutherland formula.

1. Введение

Среди известных точных решений [1–12] уравнений движения вязкого газа до сих пор отсутствует точное решение для течения в трубе. Решению для течения в трубе, в котором используются наиболее точные (и наиболее сложные) формулы для зависимости коэффициентов вязкости и теплопроводности от температуры (они будут приведены ниже при постановке задачи), посвящена данная статья. Чтобы обеспечить стационарное движение вязких жидкости или газа в каналах и трубах, необходимо компенсировать потери, связанные с трением. Нужна некоторая «проталкивающая сила». Так, например, в классическом

© Максименко И. А., Хорин А. Н., 2021

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2021

течении Пуазейля (течение вязкой несжимаемой жидкости в прямой трубе круглого поперечного сечения) [13] такая сила создается в результате продольного перепада давления. В точном решении Пуазейля скорость направлена вдоль оси трубы и ее величина зависит только от расстояния до этой оси (от радиуса). В данной статье предпринята попытка получить точное решение для течения вязкого газа, в котором скорость также направлена вдоль оси трубы и ее величина зависит только от радиуса (течение Пуазейлевского типа). Сложность этой задачи состоит в следующем. Для такой скорости из уравнения неразрывности следует, что плотность также зависит только от радиуса. Поэтому на каждой линии тока (т.е. вдоль продольной координаты), в силу уравнения состояния, температура должна меняться вместе с давлением, и поэтому при наличии продольного градиента давления температура также будет меняться вдоль продольной координаты. Вместе с температурой будут меняться коэффициенты вязкости и теплопроводности. В итоге уравнения движения вязкого газа [13, гл. XV] при наличии продольного градиента давления не упрощаются до обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), как это имеет место в вязкой несжимаемой жидкости в решении Пуазейля, и остаются уравнениями в частных производных, точное решение которых авторам данной статьи найти не удалось. Чтобы получить точное решение Пуазейлевского типа была использована идея статьи [12], где для плоскопараллельного течения между стенками было рассмотрено течение, в котором давление постоянно, а роль проталкивающей силы играет сила тяжести. Для этого в [12] стенки были расположены вертикально. В результате в [12] уравнения движения вязкого газа упростились и свелись к решению системы двух ОДУ второго порядка (все гидродинамические параметры зависели только от горизонтальной координаты). Для соответствующей этим уравнениям задачи Коши выполнялись условия теоремы существования и единственности решения. Поэтому, хотя точное решение упомянутого ОДУ в [12] получить не удалось, и для расчета параметров течения использовалось численное интегрирование, решение [12] считается точным решением уравнений движения. Аналогичная ситуация имеет место в задаче Блазиуса [14]. Решение задачи Блазиуса считается точным, хотя сводится к задаче Коши для ОДУ третьего порядка, общее решение которого неизвестно и в общем случае рассчитывается численным интегрированием. В данной статье также рассмотрено течение, в котором роль проталкивающей силы играет сила тяжести, и труба расположена вертикально. Давление в трубе считалось постоянным. Поэтому следует уточнить, что для реализации рассматриваемых течений в земных условиях, при которых давление растет с высотой, необходимо либо искусственно создавать разрежение снизу (отсос воздуха насосом), либо нагнетать воздух сверху.

2. Основные обозначения, постановка задачи, система ОДУ

Рассмотрим стационарное течение совершенного (закон Менделеева–Клапейрона) вязкого газа в вертикальной цилиндрической трубе круглого поперечного сечения (ось трубы параллельна вектору ускорения свободного падения \mathbf{g}). Попытаемся найти точное решение, в котором давление газа постоянно, скорость, плотность и температура изменяются только вдоль радиального направления, при этом не равная нулю скорость имеет только вертикальную компоненту (в направлении \mathbf{g}).

Введем цилиндрическую систему координат $Or\varphi z$, в которой ось Oz совпадает с осью трубы и ее положительное направление совпадает с направлением вектора \mathbf{g} . Обозначим: r — радиальная координата, отсчитываемая от оси трубы, V — скорость течения вдоль оси z , T — температура газа, ρ — плотность газа, p — давление.

Будем считать, что для коэффициента вязкости μ справедлива формула Сазерленда

$$\mu(T) = \mu^* \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2} \frac{T^* + T_S}{T + T_S}, \quad (1)$$

где для воздуха $\mu^* = 1.715 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с) $T^* = 273$ К, $T_S = 111$ К. Эта формула дает погрешность менее 2% для диапазона температур 170–1900 К и давления менее 10 атм, а при температуре $T > 1500$ К отсутствует диссоциация [11].

Перейдем к формуле для коэффициента теплопроводности λ . В диапазоне температур 170–1900 К при том же давлении аналогичную точность дает формула, предложенная в монографии [15] и имеющая вид, подобный формуле Сазерленда, а именно:

$$\lambda(T) = \lambda^* \left(\frac{T}{T^*} \right)^{3/2} \frac{T^* + T_\lambda}{T + T_\lambda}, \quad (2)$$

где для воздуха $\lambda^* = 2.412 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м · К), $T^* = 273$ К, $T_\lambda = 194$ К. Формулу (2) будем использовать для вычисления коэффициента теплопроводности.

Движение вязкого газа описывается уравнением неразрывности, динамическими уравнениями Навье–Стокса, уравнением баланса тепла и уравнением состояния [13, гл. XV]. Если движущийся вязкий газ имеет постоянное давление $p = p_0$ и скорость, имеющую одну только ненулевую z -компоненту V в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ и сонаправленную вместе с положительным направлением оси z с вектором \mathbf{g} , а все газодинамические параметры зависят только от поперечных координат x и y , то динамическое уравнение Навье–Стокса по координате z и уравнение баланса упрощаются и принимают вид

$$(\mu V_x)_x + (\mu V_y)_y + \rho g = 0, \quad (\lambda T_x)_x + (\lambda T_y)_y + \mu(V_x^2 + V_y^2) = 0,$$

где $g = |\mathbf{g}|$. Два других динамических уравнения Навье–Стокса и уравнение неразрывности в рассматриваемом случае выполняются тождественно. Переходя от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим r, φ, z и учитывая симметрию круглого сечения ($V_\varphi = T_\varphi = \mu_\varphi = \lambda_\varphi = 0$), имеем

$$(r\mu V')' + \rho g r = 0, \quad (r\lambda T')' + r\mu(V')^2 = 0, \quad p = \rho R T = p_0 > 0. \quad (3)$$

Здесь штрихом обозначена производная по r , R — универсальная газовая постоянная, отнесенная к молярной массе воздуха.

Приведем уравнения к безразмерному виду. В качестве характерных значений скорости, температуры, плотности, коэффициентов вязкости и теплопроводности выберем их значения при $r = 0$ и обозначим V_0, T_0, ρ_0, μ_0 и λ_0 соответственно, где μ_0 и λ_0 вычислены по формулам (1) и (2) для $T = T_0$, а безразмерное расстояние до оси трубы определим как $\bar{r} = r/r_0$, где $r_0 = \sqrt{\mu_0 V_0 / \rho_0 g}$ (в частности, при $p = 1$ атм, $T_0 = 293$ К, $g = 9.81$ м/с² и скорости $V_0 = 1$ м/с значение r_0 равно 0.0012 м). Заметим, что r_0 в общем случае нельзя считать характерным поперечным размером, поскольку эта величина может отличаться от радиуса трубы.

Первые два уравнения системы (3) в безразмерных переменных $\bar{V} = V/V_0, \bar{T} = T/T_0, \bar{\rho} = \rho/\rho_0, \bar{\mu} = \mu/\mu_0, \bar{\lambda} = \lambda/\lambda_0$ и $\bar{r} = r/r_0$ имеют вид

$$(\bar{r}\bar{\mu}\bar{V}')' + \frac{\bar{r}}{\bar{T}} = 0 \quad (\bar{r}\bar{\lambda}\bar{T}')' + a\bar{r}\bar{\mu}(\bar{V}')^2 = 0, \quad (4)$$

где $a = \mu_0 V_0^2 / \lambda_0 T_0$. В (4) штрихом обозначена производная по \bar{r} . В безразмерных переменных формулы (1) и (2) переходят соответственно в

$$\bar{\mu}(\bar{T}) = \bar{T}^{3/2} \frac{1 + \bar{T}_S}{\bar{T} + \bar{T}_S} \quad \text{и} \quad \bar{\lambda}(\bar{T}) = \bar{T}^{3/2} \frac{1 + \bar{T}_\lambda}{\bar{T} + \bar{T}_\lambda}. \quad (5)$$

Дополним (4) начальными условиями. Как функции радиуса, безразмерные скорость \bar{V} и температура \bar{T} по построению и ввиду симметрии задачи таковы, что

$$\bar{V}|_{\bar{r}=0} = \bar{T}|_{\bar{r}=0} = 1 \quad \text{и} \quad \bar{V}'|_{\bar{r}=0} = \bar{T}'|_{\bar{r}=0} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, поставлена задача Коши для двух ОДУ второго порядка (4–6). В зависимости от значений параметра a она определяет различные решения. Скорость газа в этих решениях зависит от безразмерной переменной $\bar{r} = r/r_0$. Как будет видно из дальнейших вычислений, для каждого решения существует такое значение \bar{r}_w , при котором скорость \bar{V} обращается в нуль. Поскольку на стенках (неподвижной) трубы в силу условия прилипания скорость газа должна быть равна нулю, получаемые решения задачи (4–6) будут описывать течение в трубе радиуса $r_w = \bar{r}_w r_0$. При этом нужно исключать те решения, в которых внутри трубы (размерная) температура T хотя бы в одной точке выходит из диапазона 170–1000 К.

Таким образом, найдено решение системы уравнений вязкого газа через решение системы ОДУ. По аналогии с решением Блазиуса и решением [12] полученное здесь решение можно считать точным решением.

3. Результаты расчетов

Для численного решения поставленной задачи система (4) из двух ОДУ второго порядка была сведена к системе из четырех ОДУ первого порядка:

$$\bar{V}' = \bar{\vartheta}, \quad \bar{\vartheta}' = -\frac{1}{\bar{\mu}\bar{T}} - \left(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{\mu}'}{\bar{\mu}}\right)\bar{\vartheta}, \quad \bar{T}' = \bar{\tau}, \quad \bar{\tau}' = -a\frac{\bar{\mu}}{\bar{\lambda}}\bar{\vartheta}^2 - \left(\frac{1}{\bar{r}} + \frac{\bar{\lambda}'}{\bar{\lambda}}\right)\bar{\tau}, \quad (7)$$

с начальными условиями (6) следующего вида:

$$\bar{V}|_{\bar{r}=0} = \bar{T}|_{\bar{r}=0} = 1 \quad \text{и} \quad \bar{\vartheta}|_{\bar{r}=0} = \bar{\tau}|_{\bar{r}=0} = 0. \quad (8)$$

Здесь $\bar{\mu}(\bar{T})$ и $\bar{\lambda}(\bar{T})$ — коэффициенты вязкости и теплопроводности, определяемые соответственно первой и второй формулами (5). Использовалась схема Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Расчеты производились в диапазоне осевых скоростей V_0 от 10^{-3} м/с до 1020 м/с, при $p = 101325$ Па, $T_0 = 293$ К, $g = 9.81$ м/с². В каждом из случаев был посчитан (размерный) радиус трубы r_w (табл. 1).

Т а б л и ц а 1

Зависимость радиуса трубы r_w от осевой скорости V_0

V_0 , м/с	r_w , м	V_0 , м/с	r_w , м	V_0 , м/с	r_w , м
0.001	$8.0 \cdot 10^{-3}$	10	$7.8 \cdot 10^{-1}$	200	4.2
0.01	$2.5 \cdot 10^{-2}$	50	1.4	340	4.9
0.1	$7.8 \cdot 10^{-2}$	100	2.5	680	5.4
1	$2.5 \cdot 10^{-1}$	150	3.5	1020	6.9

Для трех различных значений осевой скорости V_0 профили безразмерных скорости \bar{V} и температуры \bar{T} изображены на рисунках 1 и 2. Для других значений V_0 профили \bar{V} и \bar{T} имеют похожий вид и расположены между профилями для осевых скоростей $V_0 = 10^{-3}$ м/с и $V_0 = 1020$ м/с. При этом, как для \bar{V} , так и для \bar{T} , профиль, соответствующий большей осевой скорости V_0 , проходит ниже профиля, соответствующего меньшей осевой скорости.

Вычисления показывают, что в случае низких осевых скоростей ($V_0 \leq 200$ м/с) профиль температуры с точностью до 2% (относительно $\bar{T}_0 = 1$) может быть рассчитан по интерполяционной формуле $\bar{T}(\bar{r}) \approx 1 - a\bar{r}^4/64$.

Вычисления также показывают, что в случае $V_0 \leq 200$ м/с температура \bar{T} меняется менее чем на 2% в диапазоне $\bar{r} : 0 \leq \bar{r} \leq \bar{r}_w$. Следовательно, слабо изменяются и коэффициенты вязкости $\bar{\mu}$ и теплопроводности $\bar{\lambda}$, а значит, и сам газ почти не меняет своих свойств вдоль сечения трубы. Поэтому приближенный профиль скорости можно получить, полагая, что температура \bar{T} постоянна и равна 1. В этом случае первое уравнение в (4)

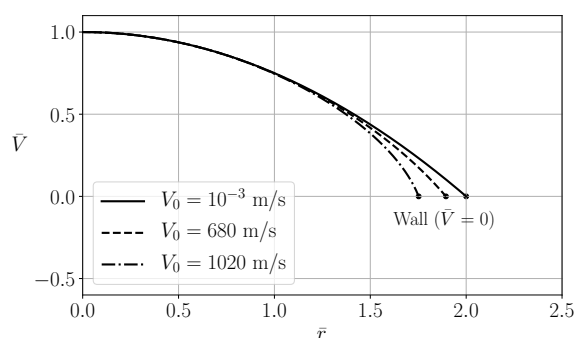


Рис. 1. Профили скорости. Точки, соответствующие стенке трубы, подписаны словом «Wall»

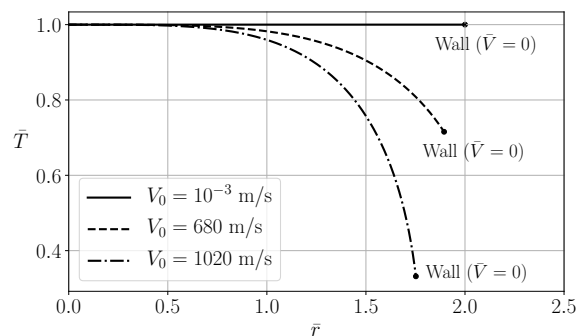


Рис. 2. Профили температуры. Точки, соответствующие стенке трубы, подписаны словом «Wall»

принимает вид $(\bar{r}\bar{V}')' = -\bar{r}$. Решением такого уравнения, с учётом начальных условий (6), будет параболический профиль скорости

$$\bar{V}(\bar{r}) \approx 1 - \bar{r}^2/4. \quad (9)$$

Расчеты показывают, что для диапазона осевых скоростей до 200 м/с решение (9) отличается от точного решения не более чем на 1% (относительно осевой скорости $\bar{V}_0 = 1$). Поэтому значение для радиуса трубы $\bar{r}_w \approx 2$, полученное из (9), дает с точностью до 1% радиус трубы в размерной форме $r_w \approx 2\sqrt{\mu_0 V_0 / \rho_0 g}$.

4. Верификация программ расчета течений вязкого газа

Для верификации удобно использовать точные решения, представленные через элементарные и другие известные функции (например, функции Бесселя). Найденное выше точное решение не является таковым, поскольку требует численного решения системы ОДУ. Однако, как показано выше, для осевых скоростей V_0 от 10^{-3} м/с до 200 м/с при $p = 101325$ Па, $T_0 = 293$ К, $g = 9.81$ м/с² и для радиуса трубы $r_w = 2\sqrt{\mu_0 V_0 / \rho_0 g}$ профиль скорости точного решения с точностью до 1% (относительно V_0) представляется формулой

$$V(r) \approx V_0 \left(1 - r^2/r_w^2\right), \quad (10)$$

а температура точного решения с точностью до 2% (относительно T_0) представляется формулой

$$T(r) \approx T_0 \left(1 - \frac{\mu_0 V_0^2}{4\lambda_0 T_0} \frac{r^4}{r_w^4}\right). \quad (11)$$

Значения параметров с нижним индексом 0 определены во втором разделе в тексте между формулами (3) и (4). В таком виде (в виде элементарных функций радиуса) приближенные точные решения удобно использовать для верификации численных методов расчета течений вязкого газа. При уменьшении осевой скорости V_0 ошибка приближенных формул (10) и (11) уменьшается. Так, например, для осевых скоростей 150 м/с и 100 м/с ошибка формулы (10) не превышает 0.5% и 0.2% соответственно, а ошибка формулы (11) — 1% и 0.3% соответственно.

5. Заключение

Получено точное решение Пуазейлевского типа, описывающее движение вязкого газа в вертикальной трубе. При этом использована полная система уравнений движения с наиболее точными (и сложными) формулами для расчета коэффициентов вязкости и теплопроводности. Это точное решение требует численного решения системы ОДУ. Поэтому для диапазона низких осевых скоростей ($V_0 \leq 200$ м/с) с точностью до 2% решение представлено в элементарных функциях, что удобно для верификации численных алгоритмов расчета течений вязкого газа.

Литература

1. *Аристов С.Н., Грабовский В.И.* Автомодельное решение уравнений Навье–Стокса для течений газа во вращающихся логарифмически-спиральных плоских каналах // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1995. Т. 6. С. 44–50.
2. *Аристов С.Н.* Класс точных решений уравнений Навье–Стокса для сжимаемого газа // Доклады Академии наук. 1990. Т. 313, № 6. С. 1403–1406.
3. *Сидоров А.Ф.* Об одном классе решений уравнений газовой динамики и естественной конвекции // Числ. и аналит. методы решения задач мех. сплош. сред. УНЦ АН СССР. Свердловск, 1981. С. 101–117.
4. *Сидоров А.Ф.* Избранные труды // Механика, математика. Москва : Физматлит, 2001. 576 с.
5. *Гродзовский Г.Л.* Течение вязкого газа между двумя движущимися параллельными стенками и между двумя вращающимися цилиндрами // ПММ. 1955. Т. 19. С. 99–102.
6. *Жмулин Е.М.* Течение вязкого газа между двумя движущимися параллельными пластинами // Ученые записки ЦАГИ. 1971. Т. II, № 4. С. 31–37.
7. *Брутян М.А.* Автомодельные решения типа Джеффери–Гамеля для течения вязкого сжимаемого газа // Ученые записки ЦАГИ. 2017. Т. XLVIII, № 6. С. 13–22.
8. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* О сжимаемом течении Куэтта // Ученые записки ЦАГИ. 2018. Т. XLIX, № 1. С. 27–38.
9. *Brutyán M.A., Krapivsky P.L.* Exact Solutions to the Steady Navier–Stokes Equations of Viscous Heat-Conducting Gas Flow Induced by the Plane Jet Issuing from the Line Source // Fluid Dyn. 2018. V. 53, S. 2. P. 1–10.
10. *Brutyán M.A., Ibragimov U.G.* Selfsimilar and Nonsimilar Solutions of the Viscous Compressible Flow Inside a Cone. Proceedings of MIPT. 2018. V. XX, N 4. P. 113–121.
11. *Хорин А.Н., Котохова А.А.* Течение Куэтта горячего вязкого газа // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24, № 2. С. 365–378.
12. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* Течение вязкого газа между вертикальными стенками // ПММ. 2018. Т. 82, № 5. С. 657–667.
13. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. Москва : Дрофа, 2003.
14. *Schlichting H.* Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe : Braun, 1965. 736 p.
15. *White F.M.* Viscous Fluid Flow, 3-rd edn. McGraw Hill, 2006.

References

1. *Aristov S.N., Grabovskiy V.I.* Self-Similar Solution of the Navier–Stokes Equations for Gas Flows in Rotating Logarithmic-Spiral Plane Channels. Izvestiya RAN. Fluid and Gas Mechanics 1995. V. 6. P. 44–50. (in Russian).
2. *Aristov S.N.* Class of Exact Solutions of the Navier–Stokes Equations for Compressible Gas. Reports of the Academy of Sciences. 1990. V. 313, N 6. P. 1403–1406. (in Russian).
3. *Sidorov A.F.* One Class of Solutions of Gas Dynamics and Natural Convection. Num. and Analyte. Methods of Solving Problems of Solid Medium Mechanics, USC of USSR AS. Sverdlovsk, 1981. P. 101–117. (in Russian).
4. *Sidorov A.F.* Selected Works. Mechanics, Mathematics. Moscow : Fizmatlit, 2001. 576 p. (in Russian).
5. *Grodzovskiy G.L.* Viscous Gas Flow between Two Moving Parallel Walls and between Two Rotating Cylinders. Fluid Dyn. 1955. V. 19. P. 99–102. (in Russian).

6. *Zhmulin E.M.* Viscous Gas Flow between Two Moving Parallel Plates. Uch. Zap. TsAGI. 1971 V. II, N 4. P. 31–37. (in Russian).
7. *Brutyan M.A.* Selfsimilar Solutions of Jeffrey–Gamel Type for Compressible Viscous Gas Flow. Uch. Zap. TsAGI. 2017. V. XLVIII, N 6. P. 13–22. (in Russian).
8. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Concerning Compressible Couette Flo. Uch. Zap. TsAGI. 2018. V. XLIX, N 1. P. 27–38. (in Russian).
9. *Brutyan M.A., Krapivsky P.L.* Exact Solutions to the Steady Navier–Stokes Equations of Viscous Heat-Conducting Gas Flow Induced by the Plane Jet Issuing from the Line Source. Fluid Dyn. 2018. V. 53, S. 2. P. 1–10.
10. *Brutyan M.A., Ibragimov U.G.* Selfsimilar and Nonselfsimilar Solutions of the Viscous Compressible Flow Inside a Cone. Proceedings of MIPT. 2018. V. XX, N 4. P. 113–121.
11. *Khorin A.N., Konyukhova A.A.* Couette Flow of Hot Viscous Gas. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci. 2020. V. 24, N 2. P. 365–378. (in Russian).
12. *Golubkin V.N., Sizykh G.B.* Viscous Gas Flow between Vertical Walls. Fluid Dyn. 2018. V. 82, N 5. P. 657–667. (in Russian).
13. *Loitsyanskii L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. Moscow : Drofa, 2003. (in Russian).
14. *Schlichting H.* Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe : Braun, 1965. 736 p. (in German).
15. *White F.M.* Viscous Fluid Flow, 3-rd edn. McGraw Hill, 2006.

Поступила в редакцию 13.12.2020