УДК 519.676

А. В. Куликов, Н. О. Малых, А. А. Стежкин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Двухпозиционный режим цены свинг-опциона в биномиальной модели ценообразования активов

В этой работе мы показали, что при нахождении справедливой цены свинг-опциона с помощью метода деревьев оптимальной стратегией при целом количестве долга по контракту является двухпозиционный режим — в каждый момент времени надо покупать максимально возможный объем базового актива или оставить долг неизменным, если это возможно. Для нецелых значений долга функция выплаты в каждом узле дерева имеет аффинную структуру.

Ключевые слова: свинг-опцион, метод деревьев, двухпозиционное управление.

1. Введение

Первая модель дерева ценообразования опционов была дана Cox et al. [1], которую принято теперь называть биномиальной моделью Кокса–Росса–Рубинштейна (КРР). Деревья остаются по-прежнему важным инструментом нахождения справедливых цен опционов — современный обзор моделей можно найти в Seydel [2]. Как правило, деревья требуют большого объема вычислений и используются, когда надо принимать решения об исполнении опциона в зависимости от траектории случайного процесса, описывающего динамику цены базового актива. Примером такого контракта является свинг-опцион, популярный на рынке энергетических опционов.

Определение и основные свойства свинг-опциона можно найти в Breslin et al. [3] и Edoli et al. [4]. Типичный газовый свинг-контракт — это договор между поставщиком и покупателем на ежедневную поставку переменного количества газа, причем это количество должно лежать в заранее оговоренных пределах минимальной и максимальной ежедневных норм, в течение некоторого периода времени по оговоренному набору контрактных цен. Основное ограничение таких договоров, усложняющее их оценку, заключается в том, что существует минимальный объем газа, называемый take-or-pay (буквально — «бери-или-плати» [неустойку]), в случае неотбора которого с покупателя в штрафную дату взыщут штраф.

Хотя свинг-контракты используются в течение многих лет для управления свойственной рынку газа неопределенности спроса и предложения, лишь в последние годы, с отменой регулирования энергетических рынков, появился интерес в понимании и оценке стоимости опциональности, заложенной в этих контрактах. Волатильность в модели Breslin et al. [3] является детерминированной функцией и по переменной, фиксирующей текущей момент времени, и по переменной, отвечающей за время, оставшееся до истечения контракта. Однако существует ряд доказательств, иллюстрирующих, что волатильность на газовых рынках является стохастической, и в работе Chiarella et al. [5] утверждается, что модель с изменяющимися режимами (волатильности) точнее передает стохастическую природу функции волатильности на газовом рынке.

За основу ими были взяты модели из Wahab, Lee [6] и Wahab et al. [7]. Все они берут за основу модель пентаномиального дерева с изменяющимися режимами из Bollen [8]. Если Wahab, Lee [6] и Wahab et al. [7] берут в качестве динамики процесса цены базового актива геометрическое броуновское движение и не учитывают «take-or-pay» объем при расчете цены опциона, то Chiarella et al. [5] в своей работе берут процесс возвратного к среднему в качестве динамики актива и учитывают «take-or-pay» объем при расчете цены опциона. В работах Wahab, Lee [6] и Wahab et al. [7] при расчете цены опциона в каждый момент времени с помощью принципа динамического программирования берется максимум из двух значений: стоимости опциона в случае покупки максимально возможного количества базового актива в текущий момент времени и стоимости опциона в случае неисполнения права в текущий момент времени. При этом количество долга в каждый момент равно целому значению. Такая стратегия называется «bang-bang» управлением (дословно — двухпозиционный режим). Однако в этих работах не показано, почему такая стратегия будет максимизировать прибыль владельца свинг-опциона.

Мы взяли модель биномиального дерева и показали, что при определенных условиях на глобальные границы покупки базового актива по контракту оптимальная стратегия, когда долг по контракту равен целому числу, в самом деле отвечает «bang-bang» режиму. При этом было показано, что функция выплаты по опциону в каждом узле дерева имеет выпуклую вверх, кусочно-линейную структуру.

Более общие результаты о существовании «bang-bang» режима можно найти в Bardou et al. [9]. Мы же стремились показать свойства функции выплаты свинг-опциона в более практической оболочке. В частности, говоря о выпуклости вверх функции выплаты свинг-опциона, мы дадим наглядный интуитивно понятный финансовый смысл этого свойства.

2. Двухпозиционное управление

Рассмотрим биномиальную модель Кокса–Росса–Рубинштейна на временном промежутке от 0 до N. Пусть $S_j(n)$ — спотовая цена базового актива в момент времени n, когда к этому моменту цена сделала j шагов вверх, стартовав в $S_0(0)$. Тогда спотовая цена базового актива удовлетворяет следующему равенству:

$$S_j(n) = \frac{1}{1+r}\big(\tilde{p}\, S_{j+1}(n+1) + \tilde{q}\, S_j(n+1)\big),$$

где r — безрисковая процентная ставка, $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ — мартингальные вероятности соответственно роста и падения спотовой цены базового актива на каждом шаге. Для $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ выполнено равенство

$$\tilde{p}\, u + \tilde{q}\, d = 1 + r,$$

где u и d — соответственно коэффициенты роста и падения спотовой цены базового актива на каждом шаге. Для того, чтобы величины $\tilde{p}$ и $\tilde{q}$ были положительны и давали в сумме единицу, необходимо и достаточно выполнение условия безарбитражности рынка спотовых цен:

$$0 < d < 1 + r < u.$$

Определим $F(j, m, l)$ как цену свинг-опциона в момент времени $N - l$, когда цена базового актива сделала j шагов вверх к моменту времени $N - l$, а m — количество базового актива, которое осталось выкупить на момент времени $N - l$. Будем рассматривать так называемый *нормализованный свинг-опцион*: в каждый момент времени мы можем купить не более 1 единицы базового актива, т.е. объем покупки базового актива в каждый момент времени может варьироваться лишь от нуля до единицы. *Суммарные ограничения на потребляемый актив:* если контракт заключается в нулевой момент времени N, то владелец контракта не может выкупить более $N+1$ единиц актива, т.е. в начальный момент времени выполнено ограничение $0 \le m \le N + 1$, а в момент времени $N - l$ должно выполняться $0 \le m \le l + 1$. Причем если в момент времени $N - l$ выполнено $m = l + 1$, то стратегия владельца контракта единственна: в каждый момент времени, начиная с $N - l$, он обязан покупать 1 единицу базового актива.

Тогда граничные условия, которые мы раскроем подробнее ниже, будут иметь следующий вид:

$$F(j, 0, 0) = (S_j(N) - K)^+, F(j, 1, 0) = S_j(N) - K,$$

а для любого $\alpha \in [0, 1]$ имеет место

$$F(j, \alpha, 0) = \alpha(S_j(N) - K) + (1 - \alpha)(S_j(N) - K)^+ = \alpha\, F(j, 1, 0) + (1 - \alpha) F(j, 0, 0).$$

Здесь K — оговоренная заранее цена 1 единицы базового актива по свинг-опциону. Тогда $F(j,0,0) = (S_j(N) - K)^+$ — случай, когда к моменту времени N владелец контракта уже выкупил весь газ и может действовать следующим образом: если $S_j(N) - K > 0$, то владелец контракта может купить 1 единицу газа по цене K согласно опциону, а затем тут же продать на спотовом рынке по цене $S_j(N)$, получив, таким образом, прибыль $S_j(N) - K$; если же $S_j(N) \leq K$, то владелец контракта, поскольку $m = 0$, не обязан выкупать ничего, и проводить аналогичную стратегию, как при $S_j(N) > K$, не имеет смысла, поскольку теперь владелец опциона уйдет в минус. Оба этих случая можно заключить в выражении $(S_j(N) - K)^+ = \max(S_j(N) - K, 0)$ при $m = 0$. Если же $m = 1$, то выплата по контракту в момент времени N равна $F(j,1,0) = S_j(N) - K$. Владелец контракта обязан выкупить 1 единицу газа в момент времени N, а выплата по контракту соответственно равна $S_j(N) - K$ — аналогичные рассуждения были проведены выше.

Тогда в силу того, что владелец свинг-опциона пытается максимизировать свою прибыль, цена свинг-опциона в каждый момент времени $N - l$ представляет собой решение оптимизационной задачи

$$F(j,m,l) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \Big[\alpha(S_j(N-l) - K) + \frac{1}{1+r} (\tilde{p} F(j+1, (m-\alpha)^+, l-1) + \\ + \tilde{q} F(j, (m-\alpha)^+, l-1) \Big].$$

Покажем ряд свойств функции $F(j,m,l)$, которые позволят обосновать оптимальную стратегию владельца свинг-опциона в модели КРР при условии, что он стремится максимизировать свою прибыль.

Далее, для упрощения выкладок положим $r = 0$.

Утверждение 2.1. *Функция цены свинг-опциона $F(j,m,l)$ не возрастает с ростом m для любых l и j.*

Доказательство.Доказательство проведем прямой индукцией по l для произвольного j.

I. База индукции $l = 0$. Ясно, что по $F(j,\alpha,0) \leq F(j,\beta,0)$, если $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, поскольку в $F(j,\beta,0)$ заложена большая опциональность в силу того, что количество базового актива, необходимое купить в момент времени N, в этом случае меньше.

II. Шаг индукции. Пусть для $l_0 = l - 1$ наше утверждение верно. Предположим, что

$$F(j,m_1,l) = \alpha(S_j(N-l) - K) + \tilde{p} F(j+1, (m_1-\alpha)^+, l-1) + \tilde{q} F(j, (m_1-\alpha)^+, l-1).$$

Возьмем m_2 такое, что $0 \leq m_2 \leq m_1 \leq l + 1$. Для любого $\alpha \in [0,1]$ в силу определения функции F будет выполнено

$$F(j,m_2,l) \geq \alpha(S_j(N-l) - K) + \tilde{p} F(j+1, (m_2-\alpha)^+, l-1) + \tilde{q} F(j, (m_2-\alpha)^+, l-1).$$

Так как $m_2 \leq m_1$, то по предположению индукции

$$F(j+1, (m_2-\alpha)^+, l-1) \geq F(j+1, (m_1-\alpha)^+, l-1),$$

$$F(j, (m_2-\alpha)^+, l-1) \geq F(j, (m_1-\alpha)^+, l-1).$$

Тогда

$$F(j,m_2,l) \geq \alpha(S_j(N-l) - K) + \tilde{p} F(j+1, (m_2-\alpha)^+, l-1) + \\ + \tilde{q} F(j, (m_2-\alpha)^+, l-1) \geq \alpha(S_j(N-l) - K) + \tilde{p} F(j+1, (m_1-\alpha)^+, l-1) + \\ + \tilde{q} F(j, (m_1-\alpha)^+, l-1) = F(j,m_1,l).$$

Это и завершает доказательство в силу произвольности выбранного α. □

Утверждение 2.2. *Для любых l и j выполнены следующие свойства функции цены свинг-опциона $F(j,m,l)$:*

- *для любого целого m, такого что $0 \le m \le l$, $F(j,m,l)$ имеет следующий вид:*

$$F(j,m,l) = \max\Big[S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,(m-1)^+,l-1) + \\ + \tilde{q}\,F(j,(m-1)^+,l-1);\ \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1)\Big];$$

- *$F(j,m,l)$ выпукла вверх по m, где $m \in \mathbb{Z}_+$;*

- функция $F(j,m,l)$ кусочно-линейна, т.е. для любого $\alpha \in [0,1]$ и $m \in \mathbb{Z}_+$, такого что $0 \le m \le l$, выполнено

$$F(j,m+\alpha,l) = \alpha\,F(j,m+1,l) + (1-\alpha)F(j,m,l).$$

Доказательство.Доказательство проведем прямой индукцией по l для произвольного j. Заметим, что доказательство всех свойств проводится одновременно, так как при проверке каждого из свойств используются все утверждения из базы индукции.

I. *База индукции* очевидна из граничных условий. В самом деле, при $l = 0$ рассматриваем возможные цены свинг-опциона в момент времени N. Так как $0 \le m \le l+1$ в каждый момент времени, то при $l = 0$ целые значения m могут быть равны либо 0, либо 1:

$$F(j,0,0) = (S_j(N) - K)^+,\ F(j,1,0) = S_j(N) - K.$$

При $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$F(j,\alpha,0) = \alpha(S_j(N) - K) + (1-\alpha)(S_j(N) - K)^+ = \alpha\,F(j,1,0) + (1-\alpha)F(j,0,0),$$

т.е. при $l = 0$ $F(j,m,l)$ представляет собой линейную функцию на отрезке $[0,1]$.

II. *Шаг индукции.* Пусть для всех $l < l_0$ имеют место все 3 свойства функции $F(j,m,l)$. Рассмотрим случай, когда $l = l_0$.

1. Для любых $m \in \mathbb{Z}_+$ и $\alpha \in [0,1]$

$$F(j,m,l) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \big\{\alpha(S_j(N-l) - K) + \tilde{p}\,F(j+1,m-\alpha,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-\alpha,l-1)\big\}.$$

В силу предположения индукции

$$F(j,m-\alpha,l-1) = (1-\alpha)F(j,m,l-1) + \alpha\,F(j,m-1,l-1).$$

Тогда

$$F(j,m,l) = \sup_{\alpha\in[0,1]} \Big\{\alpha(S_j(N-l) - K) + \\ +(1-\alpha)\big[\tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1)\big] + \\ +\alpha\big[\tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l-1)\big]\Big\}.$$

Но $\sup_{\alpha\in[0,1]}\{\alpha\,a + (1-\alpha)b\} = \max\{a,b\}$, следовательно,

$$F(j,m,l) = \max\Big[S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l-1); \\ \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1)\Big].$$

2. Выпуклость вверх по $m \in \mathbb{Z}_+$. При $0 \leq m \leq l-1$ из пункта 1 шага индукции определены следующие функции:

$$F(j,m,l) = \max\Big[S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l-1);$$
$$\tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1)\Big],$$
$$F(j,m+1,l) = \max\Big[S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1);$$
$$\tilde{p}\,F(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m+1,l-1)\Big],$$
$$F(j,m-1,l) = \max\Big[S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m-2,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-2,l-1);$$
$$\tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l-1)\Big].$$

Если $m = l$, то

$$F(j,m+1,l) = S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1).$$

Рассмотрим 4 ситуации при $0 \leq m \leq l-1$:

a. Пусть

$$S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1) \geq$$
$$\geq \tilde{p}\,F(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m+1,l-1)$$

и

$$S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m-2,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-2,l-1) \geq$$
$$\geq \tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l-1).$$

В силу предположения индукции $F(j,m,l-1)$ выпукла вверх, тогда

$$F(j,m,l) \geq S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l-1) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\bigg(S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1) +$$
$$+ S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m-2,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-2,l-1)\bigg) =$$
$$= \frac{F(j,m+1,l) + F(j,m-1,l)}{2}.$$

b. Пусть

$$S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1) <$$
$$< \tilde{p}\,F(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m+1,l-1)$$

и

$$S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m-2,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-2,l-1) <$$
$$< \tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l-1).$$

В силу предположения индукции

$$F(j,m,l) \geq \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1) \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\bigg(\tilde{p}\,F(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m+1,l-1) +$$
$$+ \tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l-1)\bigg) =$$
$$= \frac{F(j,m+1,l) + F(j,m-1,l)}{2}.$$

c. Пусть

$$S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1) \geq$$
$$\geq \tilde{p}\,F(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m+1,l-1)$$

и

$$S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m-2,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-2,l-1) <$$
$$< \tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l-1).$$

Тогда получим

$$2F(j,m,l) \geq S_j(N-l) - K + \Big(\tilde{p}\,F(j+1,m-1,l) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l) +$$
$$+ \tilde{p}\,F(j+1,m,l) + \tilde{q}\,F(j,m,l)\Big) = F(j,m-1,l) + F(j,m+1,l).$$

При $m = l$ случаи a. и c. полностью исчерпывают ситуацию, поскольку

$$F(j,m+1,l) = S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1).$$

d. Пусть $A_1 = \max\{a,b\}$, $A_2 = \max\{c,d\}$. Предположим, что выполнено $a - b \geq c - d$. Если $A_2 = c$, то $c - d > 0$ и $a > b$, а значит, $A_1 = a$. Таким образом, не может быть случая, когда $A_1 = b$, а $A_2 = c$, если выполнено $a - b \geq c - d$.

Возьмем в качестве $A_1 = u(j,m+1,l)$, $A_2 = u(j,m-1,l)$,

$$a = S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m,l-1),$$
$$b = \tilde{p}\,F(j+1,m+1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m+1,l-1),$$
$$c = S_j(N-l) - K + \tilde{p}\,F(j+1,m-2,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-2,l-1),$$
$$d = \tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1) + \tilde{q}\,F(j,m-1,l-1).$$

Хотим показать, что $a - b \geq c - d$.

$$a - b = S_j(N-l) - K + \tilde{p}\Big(F(j+1,m,l-1) - F(j+1,m+1,l-1)\Big) +$$
$$+ \tilde{q}\Big(F(j,m,l-1) - F(j,m+1,l-1)\Big),$$
$$c - d = S_j(N-l) - K + \tilde{p}\Big(F(j+1,m-2,l-1) - F(j+1,m-1,l-1)\Big) +$$
$$+ \tilde{q}\Big(F(j,m-2,l-1) - F(j,m-1,l-1)\Big).$$

В силу индуктивного предположения для любого целого m, такого что $0 \leq m \leq l-1$, выполнено

$$F(j,m-1,l-1) \geq \frac{F(j,m-2,l-1) + F(j,m,l-1)}{2},$$

т.е.

$$F(j,m-2,l-1) - F(j,m-1,l-1) \leq F(j,m-1,l-1) - F(j,m,l-1).$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$F(j,m-2,l-1) - F(j,m-1,l-1) \leq F(j,m-1,l-1) - F(j,m,l-1) \leq$$
$$\leq F(j,m,l-1) - F(j,m+1,l-1).$$

Отсюда легко видно, что $a - b \geq c - d$, а значит, если $A_2 = c$, то $A_1 = a$, и случая $A_2 = c$, $A_1 = b$ не существует.

Таким образом, доказана выпуклость вверх функции $F(j,m,l)$ по $m \in \mathbb{Z}_+$ для любых l и j, так что выполнено условие $0 \le m \le l+1$.

3. Покажем, что если при $0 \le m \le l$, где $m \in \mathbb{Z}_+$, и вещественном $0 \le \alpha \le 1$

$$F(j,m+\alpha,l) = \alpha\, F(j,m+1,l) + (1-\alpha)F(j,m,l),$$

то такой вид $F(j,m+\alpha,l)$ действительно дает справедливую цену свинг-опциона, т.е.

$$F(j,m+\alpha,l) = \sup_{\beta\in[0,1]} \big[\beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}\, F(j+1,(m+\alpha-\beta)^+,l-1) + \\ + \tilde{q}\, F(j,(m+\alpha-\beta)^+,l-1)\big].$$

Напомним, что интересен случай, когда $S_j(N-l)-K < 0$, поскольку при $S_j(N-l)-K \ge 0$ супремум достигается при $\beta = 1$. Поэтому далее будем предполагать, что $S_j(N-l)-K<0$.

Положим также, что в момент времени $N-l$ выполнено $1 \le m \le l-1$. Случаи $m=0$ и $m=l$ аналогичны.

В силу предположения индукции для целых m цены свинг-опциона имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F(j,m,l) = \max\Big[&S_j(N-l)-K+\tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1)+\tilde{q}\,F(j,m-1,l-1);\\ &\tilde{p}\,F(j+1,m,l-1)+\tilde{q}\,F(j,m,l-1)\Big],\\ F(j,m+1,l) = \max\Big[&S_j(N-l)-K+\tilde{p}\,F(j+1,m,l-1)+\tilde{q}\,F(j,m,l-1);\\ &\tilde{p}\,F(j+1,m+1,l-1)+\tilde{q}\,F(j,m+1,l-1)\Big]. \end{aligned}$$

Из выпуклости вверх функции $F(j,m,l-1)$ по m следует, что

$$F(j,m,l-1)-F(j,m+1,l-1) \ge F(j,m-1,l-1)-F(j,m,l-1),$$

$$F(j,m,l-1)-F(j,m-1,l-1) \ge F(j,m+1,l-1)-F(j,m,l-1).$$

Введем для удобства следующие обозначения:

$$x = S_j(N-l)-K,$$

$$F(j,m,l) = \max\{a;b\},$$

$$F(j,m+1,l) = \max\{c;d\}.$$

Если взять $\max\{a;b\} = a$, то из утверждения выше о выпуклости вверх следует, что и $\max\{c;d\} = c$. Это означает, что если нам выгодно делать покупку в текущий момент времени при долге в m единиц, то при большем долге в $m+1$ единицу нам тем более стоит покупать единицу базового актива. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned} F(j,m+\alpha,l) = \alpha\, c + (1-\alpha)\, a &= \alpha\left(x+\tilde{p}\,F(j+1,m,l-1)+\tilde{q}\,F(j,m,l-1)\right)+\\ &+(1-\alpha)\big(x+\tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1)+\tilde{q}\,F(j,m-1,l-1)\big) =\\ &= x+\tilde{p}\,F(j+1,m+\alpha-1,l-1)+\tilde{q}\,F(j,m+\alpha-1,l-1). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$f = x+\tilde{p}\,F(j+1,m+\alpha-1,l-1)+\tilde{q}\,F(j,m+\alpha-1,l-1).$$

Пусть теперь $\max\{c;d\} = d$, тогда из выпуклости вверх следует, что $\max\{a;b\} = b$. Это означает, что если в текущий момент времени при долге в $m+1$ единиц нам выгоднее не покупать базовый актив, то и при меньшем количестве долга по контракту в m единиц нам выгодно не покупать базовый актив в этот момент времени. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned}F(j,m+\alpha,l) &= \alpha\, d + (1-\alpha)\, b = \alpha\left(\tilde p\, F(j+1,m+1,l-1) + \tilde q\, F(j,m+1,l-1)\right) + \\ &+ (1-\alpha)\big(\tilde p\, F(j+1,m,l-1) + \tilde q\, F(j,m,l-1)\big) = \\ &= \tilde p\, F(j+1,m+\alpha,l-1) + \tilde q\, F(j,m+\alpha,l-1).\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$g = \tilde p\, F(j+1,m+\alpha,l-1) + \tilde q\, F(j,m+\alpha,l-1).$$

Случая $a > b,\ c < d$ при условии, что всегда $c - d \geq a - b$, не может быть, как и аналогичного случая при доказательстве выпуклости вверх. Финансовый смысл здесь таков: если долг по свинг-опциону в текущий момент времени составляет m единиц и нам следует приобрести базовый актив, то не может быть такого, что при большем долге в $m+1$ единиц в этот же момент времени нам выгоднее было бы не покупать единицу базового актива.

Остается случай, когда в момент времени $N-l$ выгодно покупать базовый актив при $m+1$ единицах долга, но не выгодно при m единицах долга, т.е. $a < b,\ c > d$. Тогда по предположению индукции

$$\begin{aligned}F(j,m+\alpha,l) &= \alpha\, c + (1-\alpha)\, b = \alpha\left(x + \tilde p\, F(j+1,m,l-1) + \tilde q\, F(j,m,l-1)\right) + \\ &+ (1-\alpha)\big(\tilde p\, F(j+1,m,l-1) + \tilde q\, F(j,m,l-1)\big) = \\ &= \alpha\, x + \tilde p\, F(j+1,m,l-1) + \tilde q\, F(j,m,l-1).\end{aligned}$$

Введем обозначение

$$h = \alpha\, x + \tilde p\, F(j+1,m,l-1) + \tilde q\, F(j,m,l-1).$$

Итак, мы получили, что если

$$F(j,m+\alpha,l) = \alpha\, F(j,m+1,l) + (1-\alpha) F(j,m,l),$$

то

$$F(j,m+\alpha,l) \in \big\{f,g,h\big\}.$$

Покажем, что для произвольного $\alpha \in [0,1]$ имеет место следующее:

$$\begin{aligned}&F(j,m+\alpha,l) = \max\big\{f,g,h\big\} = \\ &= \sup_{\beta\in[0,1]} \big[\beta(S_j(N-l)-K) + \tilde p\, F(j+1,(m+\alpha-\beta)^+,l-1) + \tilde q\, F(j,(m+\alpha-\beta)^+,l-1)\big].\end{aligned}$$

Для этого достаточно показать, что для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$F(j,m+\alpha,l) \geq \beta(S_j(N-l)-K) + \tilde p\, F(j+1,m+\alpha-\beta,l-1) + \tilde q\, F(j,m+\alpha-\beta,l-1).$$

Рассматривая $\max\big\{f,g,h\big\}$, возможны всего 2 варианта: или $f \geq g$, или $g \geq f$.

I. $f - g \geq 0$, где

$$\begin{aligned}&f-g = \\ &= x + \alpha\Big(\tilde p\left(F(j+1,m,l-1) - F(j+1,m+1,l-1)\right) + \tilde q\left(F(j,m,l-1) - F(j,m+1,l-1)\right)\Big) + \\ &+ (1-\alpha)\Big(\tilde p\left(F(j+1,m-1,l-1) - F(j+1,m,l-1)\right) + \tilde q\left(F(j,m-1,l-1) - F(j,m,l-1)\right)\Big).\end{aligned}$$

Тогда в силу выпуклости вверх имеет место следующая оценка сверху:

$$x+\tilde{p}\left(F(j+1,m,l-1)-F(j+1,m+1,l-1)\right)+\tilde{q}\left(F(j,m,l-1)-F(j,m+1,l-1)\right)\geq f-g\geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &h-g=\alpha x+\\ &+\alpha\Big(\tilde{p}\left(F(j+1,m,l-1)-F(j+1,m+1,l-1)\right)+\tilde{q}\left(F(j,m,l-1)-F(j,m+1,l-1)\right)\Big)\geq 0. \end{aligned}$$

Тогда $\max\{f,g,h\}=\max\{f,h\}$. Рассмотрим 2 возможных варианта:

I.1. Пусть $\max\{f,h\}=f$, тогда имеют место следующие соотношения $f\geq h\geq g$. Хотим показать, что для любого $\beta\in[0,1]$ и произвольного $\alpha\in[0,1]$ выполнено следующее:

$$\begin{aligned} \max\{f,g,h\}=f\geq s:=\beta(S_j(N-l)-K)+\tilde{p}\,F(j+1,m+\alpha-\beta,l-1)&+\\ +\,\tilde{q}\,F(j,m+\alpha-\beta,l-1)&. \end{aligned}$$

I.1.1. Рассмотрим вначале случай, когда $0\leq\alpha\leq\beta\leq 1$. Тогда имеет место неравенство $m-1\leq m-(\beta-\alpha)\leq m$. По предположению индукции верно следующее преобразование:

$$\begin{aligned} s=\beta(S_j(N-l)-K)&+\tilde{p}\,F(j+1,m+\alpha-\beta,l-1)+\tilde{q}\,F(j,m+\alpha-\beta,l-1)=\\ &=\beta\,x+(\beta-\alpha)\tilde{p}\,F(j+1,m-1,l-1)+\big(1-(\beta-\alpha)\big)\tilde{p}\,F(j+1,m,l-1)+\\ &\quad+(\beta-\alpha)\tilde{q}\,F(j,m-1,l-1)+\big(1-(\beta-\alpha)\big)\tilde{q}\,F(j,m,l-1). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f-s=(1-\beta)x+(1-\beta)\tilde{p}\big[F(j+1,m-1,l-1)-F(j+1,m,l-1)\big]&+\\ +(1-\beta)\tilde{q}\big[F(j,m-1,l-1)-F(j,m,l-1)\big]&. \end{aligned}$$

Но поскольку

$$\begin{aligned} f-h=(1-\alpha)x+(1-\alpha)\tilde{p}\big[F(j+1,m-1,l-1)-F(j+1,m,l-1)\big]&+\\ +(1-\alpha)\tilde{q}\big[F(j,m-1,l-1)-F(j,m,l-1)\big]\geq 0&, \end{aligned}$$

то $f-s\geq 0$.

I.1.2. Рассмотрим теперь случай, когда $0\leq\beta\leq\alpha\leq 1$. Тогда имеет место неравенство $m\leq m+(\alpha-\beta)\leq m+1$. По предположению индукции верно следующее преобразование:

$$\begin{aligned} s=\beta(S_j(N-l)-K)&+\tilde{p}\,F(j+1,m+\alpha-\beta,l-1)+\tilde{q}\,F(j,m+\alpha-\beta,l-1)=\\ &=\beta\,x+(\alpha-\beta)\tilde{p}\,F(j+1,m+1,l-1)+(1-\alpha+\beta)\tilde{p}\,F(j+1,m,l-1)+\\ &\quad+(\alpha-\beta)\tilde{q}\,F(j,m+1,l-1)+(1-\alpha+\beta)\tilde{q}\,F(j,m,l-1). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} h-s=(\alpha-\beta)x+(\alpha-\beta)\tilde{p}\big[F(j+1,m,l-1)-F(j+1,m+1,l-1)\big]&+\\ +(\alpha-\beta)\tilde{q}\big[F(j,m,l-1)-F(j,m+1,l-1)\big]&. \end{aligned}$$

Но поскольку

$$\begin{aligned} h-g=\alpha\,x+\alpha\,\tilde{p}\big[F(j+1,m,l-1)-F(j+1,m+1,l-1)\big]&+\\ +\,\alpha\,\tilde{q}\big[F(j,m,l-1)-F(j,m+1,l-1)\big]\geq 0&, \end{aligned}$$

то $h\geq s$, и $f\geq h\geq s$.

Таким образом, для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$\max\{f,g,h\} = f \geq s := \beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}\,F(j+1, m+\alpha-\beta, l-1) + \\ + \tilde{q}\,F(j, m+\alpha-\beta, l-1).$$

I.2. Пусть теперь $\max\{f,h\} = h$, тогда имеют место следующие соотношения $h \geq f \geq g$. Убедимся, что для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного $\alpha \in [0,1]$ выполнено следующее:

$$\max\{f,g,h\} = h \geq s := \beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}\,F(j+1, m+\alpha-\beta, l-1) + \\ + \tilde{q}\,F(j, m+\alpha-\beta, l-1).$$

I.2.1. Хотим показать, что $h \geq s$, когда $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. В этом случае

$$s = \beta\,x + (\beta-\alpha)\tilde{p}\,F(j+1, m-1, l-1) + \big(1-(\beta-\alpha)\big)\tilde{p}\,F(j+1, m, l-1) + \\ + (\beta-\alpha)\tilde{q}\,F(j, m-1, l-1) + \big(1-(\beta-\alpha)\big)\tilde{q}\,F(j, m, l-1),$$

$h \geq f$, поэтому

$$h - f = -(1-\alpha)x + (1-\alpha)\tilde{p}\big[F(j+1,m,l-1) - F(j+1,m-1,l-1)\big] + \\ + (1-\alpha)\tilde{q}\big[F(j,m,l-1) - F(j,m-1,l-1)\big] \geq 0,$$

но тогда и

$$h - s = -(\beta-\alpha)x + (\beta-\alpha)\tilde{p}\big[F(j+1,m,l-1) - F(j+1,m-1,l-1)\big] + \\ + (\beta-\alpha)\tilde{q}\big[F(j,m,l-1) - F(j,m-1,l-1)\big] \geq 0.$$

I.2.2. В пункте I.1.2 мы уже показали, что для $0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1$, если $h \geq g$, то $h \geq s$.
Таким образом, для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного $\alpha \in [0,1]$ выполнено

$$\max\{f,g,h\} = h \geq s := \beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}\,F(j+1, m+\alpha-\beta, l-1) + \\ + \tilde{q}\,F(j, m+\alpha-\beta, l-1).$$

II. Аналогичным образом можно показать, что если $g \geq f$, то и $h \geq f$. Тогда $\max\{f,g,h\} = \max\{g,h\}$. Затем можно показать, что для любого $\beta \in [0,1]$ и произвольного $\alpha \in [0,1]$ выполнено следующее:

$$\max\{g,h\} \geq \beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}\,F(j+1, m+\alpha-\beta, l-1) + \\ + \tilde{q}\,F(j, m+\alpha-\beta, l-1),$$

рассмотрев случаи $g \geq h \geq f$ и $h \geq g \geq f$.

Итак, мы показали, что для произвольного $\alpha \in [0,1]$ имеет место следующее:

$$F(j, m+\alpha, l) = \sup_{\beta\in[0,1]} \big[\beta(S_j(N-l)-K) + \tilde{p}\,F(j+1, (m+\alpha-\beta)^+, l-1) + \\ + \tilde{q}\,F(j, (m+\alpha-\beta)^+, l-1)\big] = \max\big\{f,g,h\big\},$$

и если для $0 \leq m \leq l,\ 0 \leq \alpha \leq 1$

$$F(j, m+\alpha, l) = \alpha\,F(j, m+1, l) + (1-\alpha)F(j,m,l),$$

то

$$F(j, m+\alpha, l) \in \{f,g,h\},$$

а значит, действительно, $\max\big\{f,g,h\big\}$ можно представить как

$$F(j, m+\alpha, l) = \max\big\{f,g,h\big\} = \alpha\,F(j, m+1, l) + (1-\alpha)F(j,m,l).$$

□

Замечание. При доказательстве мы нигде не пользовались структурой биномиального дерева, то есть данное утверждение остается верным для любого процесса цены, являющегося дискретной цепью Маркова.

3. Выводы

При нахождении справедливой цены свинг-опциона с помощью метода деревьев оптимальной стратегией при целом количестве долга по контракту является двухпозиционный режим — в каждый момент времени надо покупать максимально возможный объем базового актива или оставить долг неизменным, если это возможно. Для нецелых значений долга функция выплаты по опциону в зависимости от количества долга к текущему моменту времени в каждом узле дерева имеет аффинную структуру.

Литература

1. *Cox J.C., Ross S., Rubinstein M.* Option pricing: A simplified approach // Journal of Financial Economics. — 1979. — V. 7, N 3. — P. 229–264.
2. *Seydel M.R.* Lattice Approach and Implied Trees // Handbook of Computational Finance. — New York: Springer, 2012. — P. 551–577.
3. *Breslin J., Clewlow L., Strickland C., van der Zee D.* Swing contracts: take it or leave it? // Energy Risk. — 2008. — N 2. — P. 64–68.
4. *Edoli E., Fiorenzani S., Ravelli R., Vargiolu T.* Modeling and valuing make-up clauses in gas swing contracts // Energy Economics. — 2013. — V. 35. — P. 58–73.
5. *Chiarella C., Clewlow L., Kang B.* The Evaluation of Gas Swing Contracts with Regime Switching // Topics in Numerical Methods for Finance. — New York: Springer, 2012. — P. 155–176.
6. *Wahab M.I.M., Lee C.-G.* Pricing Swing Options with Regime Switching // Annals of Operations Research. — 2011. — V. 185, N 1. — P. 139–160.
7. *Wahab M.I.M., Yin Z., Edirsinghe N.C.* Pricing swing options in the electricity markets under regime-switching uncertainty // Quantitative Finance. — 2010. — V. 10, N 9. — P. 975–994.
8. *Bollen N.* Valuing options in regime-switching models // Journal of Derivatives. — 1998. — V. 6, N 1. — P. 38–49.
9. *Bardou O., Bouthemy S., Pages G.* When are swing options bang-bang? // International Journal of Theoretical and Applied Finance. — 2010. — V. 13, N 7. — P. 867–899.

Поступила в редакцию 23.05.2013.