УДК 519.176

А. Д. Курносов

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

О нижней оценке числа связного доминирования в графах с фиксированной степенной последовательностью

Числом связного доминирования $\gamma_c(G)$ связного графа G называется минимальный размер доминирующего множества вершин, порождающего связный подграф в G. По-другому можно определить $\gamma_c(G)$ как наименьшее количество нелистовых вершин в остовных деревьях графа G. В работе получены некоторые достижимые нижние оценки величины $\gamma_c(G)$ для графов, имеющих заданную последовательность степеней вершин. В частности, рассмотрены регулярные графы и бирегулярные графы с листьями.

Ключевые слова: графы, степенная последовательность, регулярные графы, бирегулярные графы, связное доминирование, реализующий граф, нижняя оценка, остовное дерево, остовное дерево с максимальным числом листьев.

A. D. Kurnosov

Moscow Institute of Physics and Technology

On a lower bound of connected domination number for graphs with prescribed degree sequence

We consider the lower bounds for the *connected domination number* $\gamma_c(G)$ of the graph G. This can be defined as either the minimal cardinality of a dominating set of vertices inducing a connected subgraph of G, or as a minimal number of nonpendant vertices in a spanning tree of G. We obtain bounds on $\gamma_c(G)$ for graphs with prescribed degree sequence. Our results imply, in particular, sharp bounds for regular graphs and some biregular graphs with leaves.

Key words: graphs, degree sequence, regular graphs, biregular graphs, connected domination, realization graph, lower bound, spanning tree, maximum leaf spanning tree.

1. Введение

1.1. Обозначения

В работе рассматриваются простые неориентированные графы. Мы будем использовать приводимые ниже обозначения, в целом согласующиеся с современной литературой (см., напр., [1, 2]).

- $V(G)$ и $E(G)$ — множества вершин и рёбер графа G соответственно.
- Через $|G|$ будем обозначать число вершин в графе G.
- $E(A, B)$ — множество рёбер вида uv, где $u \in A, v \in B$. Если $A = \{v\}$, то будем сокращённо писать $E(v, B)$ вместо $E(\{v\}, B)$.

- Положим $E(A) := E(A, A)$ для произвольного подмножества вершин A исходного графа.
- Для графа $G = (V, E)$ и подмножества $V' \subseteq V$ через $G - V'$ обозначаем подграф G, порождаемый множеством $V \setminus V'$. Сокращённо будем писать $G - v$ вместо $G - V'$, если $V' = \{v\}$.
- Для графа $G = (V, E)$ и подмножества $E' \subseteq E$ через $G - E'$ обозначаем граф $(V, E \setminus E')$. Сокращённо записываем $G - e$ вместо $G - E'$, если $E' = \{e\}$.
- $L(G)$ — множество висячих вершин графа G.
- $L_G(v)$ — множество висячих вершин в G, смежных с вершиной v.
- $H(G)$ — множество всех вершин G, смежных с листьями.
- Положим $S(G) := G - (L(G) \cup H(G))$.
- $\deg_G(v)$ — степень вершины v в графе G.

1.2. Графы с заданной последовательностью степеней

Невозрастающие последовательности натуральных чисел, содержащие ровно n элементов, будем называть *n-последовательностями*; n-последовательность $\widetilde{d}$ с членами $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$ называется *графической*, если существует простой граф на множестве вершин $\{v_i\}_{i=1}^n$, такой, что $\deg v_i = d_i$ для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Сам граф называется *реализацией* n-последовательности $\widetilde{d}$. Последовательности, реализуемые графами (без ограничений на структуру), были полностью охарактеризованы Гавелом [3], Хакими [4], а также Эрдёшем и Галлаи [5].

В настоящей работе будем использовать критерий Эрдёша и Галлаи реализуемости целочисленной последовательности некоторым графом:

Теорема 1 (см. [5])**.** Последовательность $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$, состоящая из $n \geqslant 2$ неотрицательных целых чисел, реализуема некоторым графом тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^n d_i$ — чётное число и при этом выполнено:

$$\sum_{i=1}^{t} d_i \leqslant t(t-1) + \sum_{i=t+1}^{n} \min\{t, d_i\} \;\forall\; 1 \leqslant t \leqslant n-1.$$

Также сформулируем следующее свойство для степенной последовательности дерева, тривиальным образом следующее из леммы о рукопожатиях:

Утверждение 1. Для дерева на n вершинах, в котором степенная последовательность вершин имеет вид $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_k \geqslant 2 > d_{k+1} = \ldots = d_n = 1$, верно соотношение

$$\sum_{i=1}^{k} (d_i - 1) = n - 2.$$

Через $\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}$ будем обозначать класс связных графов, реализующих n-последовательность $\widetilde{d}$. Интерес представляют только n-последовательности длины не менее трёх.

Для произвольного дерева T определим *усечение* T как дерево T' (в дальнейшем будем придерживаться именно такого обозначения для усечения T), получающееся из T удалением всех листьев. Само дерево T будем при этом называть *расширением* дерева T'. Нетрудно заметить, что степенная последовательность дерева T' может быть получена из степенной последовательности T отбрасыванием единичных элементов и уменьшением некоторых из оставшихся элементов (причём суммарное уменьшение равно числу единичных элементов в первоначальной последовательности). При $|T| \geqslant 3$ усечённое дерево является непустым.

1.3. Число связного доминирования и остовные деревья с большим числом листьев

Для произвольной пары смежных или совпадающих вершин v и w будем говорить, что вершина v *покрывается* вершиной w (или w *покрывает* v). Будем говорить, что вершина v покрывается множеством вершин W, если v покрывается w для некоторой $w \in W$. Подмножество D вершин графа G называется *доминирующим*, если каждая вершина графа покрывается этим подмножеством. Если доминирующее множество D порождает связный подграф в исходном графе, то D называется *связным доминирующим множеством*. Величина $\gamma_c(G)$ — это размер минимально возможного связного доминирующего множества графа G, она определена только для связных графов. По доминированию в графах имеется обширная литература, см., например, монографию [6].

Через $l_c(G)$ обозначим максимально возможное число листьев в остовном дереве связного графа G.

Величины $\gamma_c(G)$ и $l_c(G)$ связаны простым соотношением:

Утверждение 2. Для любого связного графа G с хотя бы тремя вершинами выполняется

$$\gamma_c(G) + l_c(G) = |G|.$$

Утверждение 2 следует из того, что любое минимальное связное доминирующее множество D является множеством нелистовых вершин некоторого остовного дерева (в подграфе, порождаемом D, можно выделить остовное дерево, а затем добавить к нему оставшиеся вершины графа в виде листьев) и, наоборот, множество нелистовых вершин остовного дерева образует связное доминирующее множество.

Другими словами, задача поиска в G остовного дерева с максимальным числом листьев (или, что то же самое, с минимальным числом нелистовых вершин) равносильна задаче поиска минимального по размеру связного доминирующего множества.

Задача поиска остовного дерева с наибольшим числом листьев упоминается уже в статье В. Г. Визинга [7] 1968 года. Эта задача является NP-трудной даже для кубических графов [8], поэтому неудивительно, что имеется и продолжает появляться заметное количество работ, в которых приводятся различные нижние оценки величины $l_c(G)$ (что согласно утверждению 2 соответствует верхним оценкам числа $\gamma_c(G)$), а также относительно быстрые приближённые алгоритмы для данной задачи: [9–19]. В большинстве работ рассматриваются графы с определённой дополнительной информацией о структуре, например, с ограничением снизу на степени вершин или запретами на содержание определённых подграфов.

Термин «связное доминирование» впервые появляется в [20]. Терминология «связного доминирования» используется, например, и в работах [21–25], где авторы рассматривают не только верхние, но и нижние оценки $\gamma_c(G)$.

Стоит отметить, что связные доминирующие множества находят практическое применение в целом ряде задач, возникающих в моделировании сетей, в основном беспроводных (см., например, [26,27]). В монографии [28] можно ознакомиться с более подробным списком исследований подобного рода.

В настоящей работе исследуется вопрос точной нижней оценки величины γ_c, которую можно получить, зная степенную последовательность графа. Другими словами, задача состоит в вычислении значения величины $\min_{G \in \mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}} \{\gamma_c(G)\}$ для фиксированной n-последовательности натуральных чисел $\widetilde{d}$. Исследование диапазонов значений различных инвариантов графов с заданными степенными последовательностями можно встретить также в работах [29–32].

2. Нижняя оценка числа связного доминирования

Для n-последовательности $\widetilde{d}$ введём обозначение

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c\right) := \min_{G \in \mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c} \{\gamma_c(G)\}.$$

Число $\gamma_c^{\min}$ определено для непустых классов $\mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c$. Из утверждения 2 очевидно следует $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c\right) = n - \max_{G \in \mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c}\{l_c(G)\}$ при $n \geqslant 3$.

Для получения нижней оценки числа связного доминирования графа $G \in \mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c$, где $\widetilde{d}$ задаётся числами $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$, в статье [25] вводится величина $\mathrm{ord}_c(G)$, которую можно определить сразу и для всей последовательности $\widetilde{d}$:

$$\mathrm{ord}_c(\widetilde{d}) := \mathrm{ord}_c(G) = \min\left\{k > 0 \mid \sum_{i=1}^{k}(d_i - 1) \geqslant n - 2\right\}.$$

Тогда из определения $\mathrm{ord}_c(\widetilde{d})$ очевидно следует неравенство

$$\mathrm{ord}_c(\widetilde{d}) \geqslant \left\lceil \frac{n-2}{d_1 - 1} \right\rceil. \qquad (1)$$

Известна оценка:

Теорема 2 (см. [25])**.** Для произвольного графа $G \in \mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c$ выполнено неравенство

$$\gamma_c(G) \geqslant \mathrm{ord}_c(G).$$

Обратим внимание, что при наличии в G доминирующей вершины (т. е. образующей одноэлементное доминирующее множество) неравенство обращается в равенство. Теорема 2 может быть доказана с использованием утверждений 1 и 2. Для класса $\mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c$ из теоремы 2 получаем

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c\right) \geqslant \mathrm{ord}_c(\widetilde{d}). \qquad (2)$$

Из соотношений (1) и (2) вытекает

Лемма 1. *Пусть дана n-последовательность $\widetilde{d}$ длины не менее трёх, для которой класс $\mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c$ не пуст. Тогда выполняется неравенство*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}_{\widetilde{d}}^c\right) \geqslant \left\lceil \frac{n-2}{d_1 - 1} \right\rceil.$$

В статье [25] также приводится семейство графов, для которых оценка теоремы 2 точна, сформулируем соответствующий результат сразу на языке класса $\mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ всех деревьев, имеющих своей степенной последовательностью $\widetilde{d}$:

Теорема 3 (см. [25])**.** Для любого дерева $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{d}}$ с хотя бы тремя вершинами выполнено

$$\gamma_c(T) = \mathrm{ord}_c(\widetilde{d}).$$

Теорема 3 легко следует из утверждений 1 и 2.

Перейдём теперь к изложению новых результатов.

Укажем условие на последовательность, которое является достаточным для достижимости оценки из леммы 1, что позволит нам сформулировать точную нижнюю оценку на число связного доминирования для некоторых классов графов.

Теорема 4. *Пусть дана n-последовательность* $\widetilde{d}$ *длины* $n \geqslant 3$*, состоящая из чисел* $k = d_1 = d_2 = \cdots = d_m > d_{m+1} \geqslant \cdots \geqslant d_n$ *с чётной суммой, и пусть* $m \geqslant \left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil + k$*. Тогда класс* $\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}$ *не пуст и для него выполнено*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}\right) = \left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil .$$

Доказательство. Число $\left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil$ для удобства будем обозначать как q. Из леммы 1 сразу получаем оценку $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}\right) \geqslant q$ (если класс графов не пуст). Осталось убедиться в том, что она достигается.

Итак, покажем, что существует $G \in \mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}$, для которого $\gamma_c(G) = q$, или, что то же самое, в G можно выделить остовное дерево с ровно q нелистовыми вершинами.

Поделим $n-2$ с остатком на $k-1$, получим

$$n - 2 = (k-1) \cdot \left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor + r. \tag{3}$$

Построим цепь $v_1 v_2 \ldots v_{\left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor} u$. Далее к v_1 присоединим $k-1$ лист, ко всем последующим вершинам цепи, кроме u, присоединим ровно по $k-2$ листа, наконец, к u присоединим ровно r листьев. Из равенства (3) легко следует, что в получившемся дереве T ровно n вершин. При этом нелистовых вершин в T имеется как раз q, степень каждой вершины v_i равна $k = d_i$, а степень вершины u равна $r + 1$.

В таком случае, нам осталось провести в подграфе, порождённом множеством вершин $L(T) \cup \{u\}$, *новые* рёбра (некоторые рёбра, инцидентные u, там уже есть при $r \neq 0$), так, чтобы на этих рёбрах и вершинах получился подграф G_{rem}, реализующий степенную последовательность $\widetilde{d}_{\text{rem}}$, состоящую из чисел $k-1 = d'_1 = d'_2 = \cdots = d'_{m-q} > d'_{m-q+1} \geqslant \cdots \geqslant d'_{n-\left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor}$, где одно из чисел d'_i равно $k-r-1$ (степень вершины u), а все остальные числа среди $d'_j,\ m-q+1 \leqslant j \leqslant n - \left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor$, образуют в точности невозрастающую последовательность $d_{m+1} - 1 \geqslant d_{m+2} - 1 \geqslant \cdots \geqslant d_n - 1$. В результате объединения T и G_{rem} получится граф $G \in \mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}$ с остовным деревом T, у которого $|T'| = q$, что и требуется.

Осталось лишь обосновать графичность последовательности $\widetilde{d}_{\text{rem}}$. Проверим, что для неё выполнены условия теоремы 1. Длина последовательности $\widetilde{d}_{\text{rem}}$ равна $n - \left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor \geqslant 2$. Проверим чётность суммы чисел в $\widetilde{d}_{\text{rem}}$:

$$\sum_{i=1}^{n-\left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor} d'_i = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{v \in T} \deg_T(v) = \sum_{i=1}^{n} d_i - 2n + 2. \tag{4}$$

Из выражения (4) видно, что $\sum_{i=1}^{n-\left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor} d'_i$ — чётное число.

Пусть $1 \leqslant t \leqslant k-1$. Тогда, так как $m \geqslant q + k$, то получаем следующую цепочку неравенств:

$$\sum_{i=1}^{t} d'_i = t(k-1) \leqslant t(m-q-1) \leqslant t(m-q-1) + \sum_{i=m-q+1}^{n-\left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor} \min\left\{t, d'_i\right\} =$$

$$= t(t-1) + t(m-q-t) + \sum_{i=m-q+1}^{n-\left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor} \min\left\{t, d'_i\right\} = t(t-1) + \sum_{i=t+1}^{n-\left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor} \min\left\{t, d'_i\right\}. \tag{5}$$

Пусть теперь $t \geqslant k$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{t} d_i' \leqslant t(k-1) \leqslant t(t-1) \leqslant t(t-1) + \sum_{i=t+1}^{n-\left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor} \min\left\{t, d_i'\right\}.$$

Таким образом, из теоремы 1 получаем, что требуемая остаточная последовательность $\widetilde{d}_{\text{rem}}$ действительно реализуема. А так как $k-1 \leqslant n - \left\lfloor \frac{n-2}{k-1} \right\rfloor - 1$ (следует из неравенства (5) для $t = 1$), то, очевидно, на вершинах $L(T) \cup \{u\}$ можно реализовать данную последовательность, не задействовав повторно ни одно из r рёбер T, инцидентных u и вершинам из $L(T)$. □

Из теоремы 4 легко следует асимптотика числа γ_c при соответствующих условиях на n-последовательности.

Следствие 5. *Пусть $n \to \infty$, $k = o(n)$. Пусть для каждого n задана n-последовательность $\widetilde{d}(n)$ с членами $k = d_1 = d_2 = \dots = d_m > d_{m+1} \geqslant \dots \geqslant d_n$, такими, что их сумма чётна и $m \geqslant \left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil + k$. Тогда для соответствующей последовательности классов $\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}(n)}$ все её члены непусты и имеет место асимптотика*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}(n)}\right) \sim \frac{n}{k-1}.$$

Через $\mathcal{R}^c_{n,k}$ будем обозначать класс связных k-регулярных графов на n вершинах. Для данного класса теорема 4 даёт

Следствие 6. *При $2 \leqslant k \leqslant n-1$ и чётном произведении kn класс $\mathcal{R}^c_{n,k}$ не пуст и для него*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{n,k}\right) = \left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil.$$

Доказательство. Если $k = n-1$, то $\mathcal{R}^c_{n,k} = \{K_n\}$ и утверждение, очевидно, выполняется. Пусть далее $k \leqslant n-2$. Докажем неравенство

$$n \geqslant \left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil + k. \tag{6}$$

Неравенство (6) равносильно следующему: $\left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil \leqslant n-k$. С учётом оценки целой части

$$\left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil \leqslant \frac{n-2}{k-1} + \frac{k-2}{k-1},$$

для обоснования (6) достаточно доказать неравенство $\frac{n-2}{k-1} + \frac{k-2}{k-1} \leqslant n-k$. Запишем для этого цепочку равносильных преобразований:

$$\frac{n+k-4}{k-1} = \frac{n-2}{k-1} + \frac{k-2}{k-1} \leqslant n-k,$$
$$n+k-4 \leqslant (n-k)(k-1) = nk - k^2 - n + k,$$
$$k^2 - 4 \leqslant n(k-2).$$

Последнее неравенство действительно выполняется, так как $k+2 \leqslant n$.

Итак, регулярная n-последовательность имеет чётную сумму членов, равную nk, и удовлетворяет соотношению (6), тогда из теоремы 4 получаем, что $\mathcal{R}^c_{n,k}$ не пуст и $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{n,k}\right) = \left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil$. □

Отметим, что оценка $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{n,k}\right) \geqslant \left\lceil \frac{n-2}{k-1} \right\rceil$ в том или ином виде встречается в работах [24, 33], но нигде не была показана достижимость данной оценки для произвольного $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

2.1. Бирегулярные графы с листьями

Будем называть (k, t)-*бирегулярными* графы, в которых множество всех вершин можно разбить на два непустых подмножества, в одном из которых степень каждой вершины (относительно всего графа) равна k, а в другом — t. Соответственно, *бирегулярные графы с листьями* — это $(k, 1)$-бирегулярные графы при некотором $k \geqslant 2$. Обозначим через $\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ класс связных $(k, 1)$-бирегулярных графов с ровно m нелистовыми вершинами и l листьями.

Из теоремы 4 для бирегулярных графов с листьями получаем следующий результат.

Следствие 7. *Пусть натуральные числа m, l и k, $k \geqslant 2$, таковы, что $mk + l \;\vdots\; 2$ и $m \geqslant \left\lceil \frac{m+l-2}{k-1} \right\rceil + k$. Тогда $\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ не пуст и для него*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right) = \left\lceil \frac{m+l-2}{k-1} \right\rceil.$$

Рассмотрим «меньшие» значения m.

Утверждение 3. Пусть класс $\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ не пуст, а $m \leqslant k$. Тогда для любого графа $G \in \mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ имеем $\gamma_c(G) = m$.

Доказательство. Так как $m \leqslant k$, то в любом графе $G \in \mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ каждая нелистовая вершина v может быть соединена максимум с $k - 1$ другими нелистовыми вершинами, таким образом, v обязательно смежна с некоторым листом. Листья графа G являются также листьями и в любом остовном дереве T, поэтому v смежна с листьями в T, откуда автоматически следует, что v сама не может быть листом в T, так как вершин в G не менее трёх. В итоге, $L(G) = L(T)$, поэтому $|T'| = m$ для любого остовного дерева T, откуда получаем

$$\gamma_c(G) = m$$

для каждого $G \in \mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$. □

Итак, мы получили точные значения величины $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right)$ для случаев $m \leqslant k$ и $m \geqslant \left\lceil \frac{m+l-2}{k-1} \right\rceil + k$. Далее рассмотрим случай $m = k + 1$.

Теорема 8. *Пусть даны целые положительные числа k, l, где l чётно. Пусть t — такое натуральное число, что $t(t-1) + 2 \leqslant l \leqslant t(t+1)$. Тогда класс $\mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}$ не пуст тогда и только тогда, когда $k \geqslant t + 1$, причём для него выполнено равенство*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}\right) = t + 2.$$

Доказательство. Для начала заметим, что число l в силу своей чётности и чётности чисел вида $a(a+1)$ всегда попадает в некоторый однозначно определённый промежуток вида $[t(t-1)+2,\, t(t+1)]$, поэтому число t из условия определено корректно.

Покажем, что при $k \geqslant t + 1$ существует граф $G \in \mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}$, для которого $\gamma_c(G) = t + 2$, тем самым установим непустоту рассматриваемого класса и неравенство $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}\right) \leqslant t + 2$.

Пусть $l = t(t-1) + 2s$, тогда из условия следует $1 \leqslant s \leqslant t$. Возьмём произвольный граф H, имеющий $t+1$ вершин и $t-s$ рёбер. Такой граф, очевидно, несвязен. Кроме того, для каждой вершины $v \in H$ выполнено $\deg_H(v) < t$, а также выполнено $\sum_{v \in H} \deg_H(v) = 2(t-s)$. Дополним степень каждой вершины H до t, присоединив к ней соответствующее число новых вершин-листьев, тогда каждая вершина H будет смежна хотя бы с одним листом. Множество добавленных листьев обозначим за L, а получившийся в итоге граф за $H+L$. Тогда выполнено следующее:

$$|L| = |E(H,\, L)| = \sum_{v \in H} \deg_{H+L}(v) - \sum_{v \in H} \deg_H(v) = \sum_{i=1}^{t+1} t - 2(t-s) = t(t-1) + 2s = l.$$

Значит, всего листьев в графе $H+L$ ровно l.

Пусть S — полный граф на множестве из $k-t \geqslant 1$ вершин, не имеющий общих вершин с $H+L$. Каждую вершину H соединим рёбрами со всеми вершинами S. Получившийся граф обозначим как G. Несложно убедиться, что $G \in \mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}$. При этом $S = S(G)$, $V(H) = H(G)$, $L = L(G)$.

Поскольку для любого остовного дерева T графа G выполнены включения $H(G) \subseteq H(T) \subseteq V(T')$, то в T' обязаны войти все вершины из H. Но при этом только вершин H недостаточно, потому что H — несвязный порождённый подграф в G. То есть необходимо добавить к H по крайней мере одну вершину из S, чтобы получившееся множество вершин образовывало связное доминирующее множество. С другой стороны, добавить одну вершину достаточно: любая вершина $v \in S$ смежна со всеми вершинами H и всеми оставшимися вершинами S, а все вершины H в совокупности покрывают все листья. В итоге множество $V(H) \cup \{v\}$ образует связный порождённый подграф, который покрывает все вершины G. Таким образом, $\gamma_c(G) = |H| + 1 = t + 2$.

Докажем для непустого класса $\mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}$ оценку $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}\right) \geqslant t+2$. Пусть $G \in \mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}$, и пусть $|H(G)| = h$. Тогда, так как $|L(G)| = l \geqslant t(t-1)+2$, то по принципу Дирихле некоторая вершина $v \in H(G)$ смежна по крайней мере с $\left\lceil \frac{t(t-1)+2}{h} \right\rceil$ листьями. Тогда среди нелистовых вершин v имеет максимум $k - \left\lceil \frac{t(t-1)+2}{h} \right\rceil$ соседей; соответственно, минимум $\left\lceil \frac{t(t-1)+2}{h} \right\rceil$ нелистовых вершин не смежны с v, обозначим множество таких вершин через A. Каждая вершина из A имеет не более $k-1$ нелистового соседа, а значит, $A \subseteq H(G)$. Таким образом, $H(G) \supseteq A \cup \{v\}$, что влечёт

$$h = |H(G)| \geqslant |A| + 1 \geqslant \left\lceil \frac{t(t-1)+2}{h} \right\rceil + 1. \tag{7}$$

Неравенство (7), очевидно, не выполняется при $h \leqslant t$, следовательно, $|H(G)| = h \geqslant t+1$.

Допустим, $|H(G)| \geqslant t+2$. Тогда, так как $H(G) \subseteq H(T) \subseteq V(T')$ для любого остовного дерева T, то $\gamma_c(G) \geqslant t+2$.

Осталось рассмотреть случай $|H(G)| = t+1$. Покажем, что в этом случае $H(G)$ порождает несвязный подграф в G.

Заметим, что

$$k(t+1) = \sum_{v \in H(G)} \deg_G(v) = 2|E(H(G))| + |E(H(G),\, S(G))| + |E(H(G),\, L(G))| \geqslant$$
$$\geqslant 2|E(H(G))| + |E(H(G),\, S(G))| + t(t-1) + 2.$$

Тогда получаем

$$2|E(H(G))| \leqslant k(t+1) - t(t-1) - 2 - |E(H(G),\, S(G))|. \tag{8}$$

Любая вершина $S(G)$ не смежна с листьями и при этом число возможных соседей среди нелистовых вершин у неё не более $|V(G) \setminus L(G)| - 1 = k$. Отсюда немедленно следует, что каждая вершина $S(G)$ смежна с каждой другой нелистовой вершиной, в частности, с каждой вершиной $H(G)$. Тогда выполнено равенство

$$|E(H(G),\, S(G))| = |H(G)| \cdot |S(G)| = (t+1)(k-t). \tag{9}$$

Из соотношений (8) и (9) получаем

$$2|E(H(G))| \leqslant k(t+1) - t(t-1) - 2 - (t+1)(k-t) = 2t - 2, \text{ откуда } |E(H(G))| \leqslant t - 1.$$

Тогда в подграфе, порождённом $H(T)$, ровно $t+1$ вершина, а рёбер не более чем $t-1$. Таким образом, этот подграф действительно не может являться связным. Для любого остовного дерева T имеем $H(G) \subseteq H(T) \subseteq V(T')$, но $H(G) \neq V(T')$, поскольку $H(G)$ порождает несвязный подграф, в отличие от $V(T')$. Значит, $|T'| > |H(G)|$, то есть $|T'| \geqslant t+2$.

В итоге, $\gamma_c(G) \geqslant t+2$ для любого графа $G \in \mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$, поэтому $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}\right) \geqslant t+2$. Но тогда $k+1 = m \geqslant t+2$, откуда $k \geqslant t+1$. В итоге непустым соответствующий класс является в точности при $k \geqslant t+1$, причём в таком случае выполнено равенство $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}\right) = t+2$. $\square$

Перейдём к случаю $k+1 \leqslant m \leqslant k+\left\lceil\frac{m+l-2}{k-1}\right\rceil-1$. Ранее рассмотренное значение $m = k+1$ также включено в указанный промежуток, поскольку позднее будет показана достижимость представленной в теореме 9 оценки как раз в случае $m = k+1$ (см. утверждение 4).

Теорема 9. *Рассмотрим непустой класс $\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$, где $q := \left\lceil\frac{m+l-2}{k-1}\right\rceil$, $m = k+q-a$, $1 \leqslant a \leqslant q-1$. Пусть $m+l-2 = (k-1)q-r$, $0 \leqslant r \leqslant k-2$. Тогда выполнено неравенство*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right) \geqslant q + \sqrt{a(k-1)-r+\frac{1}{4}} - a + \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Требуемое неравенство равносильно тому, что в любом графе $G \in \mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ для любого его остовного дерева T выполняется

$$|T'| \geqslant q + \sqrt{a(k-1)-r+\frac{1}{4}} - a + \frac{1}{2}.$$

Тогда пусть T — некоторое остовное дерево произвольного графа $G \in \mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$, и пусть T имеет степенную последовательность

$$\underbrace{1 = 1 = \cdots = 1}_{m+l-s} < d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_s.$$

Из леммы 1 следует, что $s \geqslant q$. Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ положим $d'_i := k - d_i$. Ясно, что $0 \leqslant d'_i \leqslant k-2$. Пользуясь результатом утверждения 1 и условием теоремы, можем вычислить сумму:

$$\sum_{i=1}^{s} d'_i = \sum_{i=1}^{s} k - \sum_{i=1}^{s} d_i = ks - s - \sum_{i=1}^{s}(d_i - 1) = (k-1)s - (m+l-2) = (k-1)s - (k-1)q + r,$$

в итоге получаем

$$\sum_{i=1}^{s} d'_i = (k-1)(s-q) + r. \tag{10}$$

Рассмотрим граф G', множеством вершин которого являются все m нелистовых вершин G, а множеством рёбер $E(G') = E(G) \backslash E(T)$. В таком случае, степенная последовательность G' имеет вид

$$\underbrace{k-1 = k-1 = \cdots = k-1}_{m-s} > d'_1 \geqslant d'_2 \geqslant \cdots \geqslant d'_s. \tag{11}$$

Последовательность (11) реализуема графом G', тогда по теореме 1 для $t = m-s$ с учётом равенства (10) имеет место неравенство

$$(k-1)(m-s) = \sum_{i=1}^{t}(k-1) \leqslant t(t-1) + \sum_{i=1}^{s}\min\{t, d'_i\} \leqslant (m-s)(m-s-1) + \sum_{i=1}^{s} d'_i =$$
$$= (m-s)(m-s-1) + (k-1)(s-q) + r, \text{ откуда}$$
$$(k+s-m)(m-s) \leqslant (k-1)(s-q) + r.$$

Используя равенство $m = k + q - a$, выполним цепочку преобразований:

$$\begin{gathered}(k-1)(s-q) + r \geqslant (k+s-m)(m-s) = (s-q+a)(k+q-s-a),\\ k(s-q) - (s-q) + r \geqslant k(s-q) + ak - (s-q+a)^2,\\ (s-q)^2 + (2a-1)(s-q) - (ak - a^2 - r) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Рассмотрев (12) как квадратичное относительно $(s-q)$ неравенство, с учётом неотрицательности $(s-q)$, получаем

$$s - q \geqslant -a + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4a(k-1) - 4r + 1}}{2},$$

откуда

$$s \geqslant q + \sqrt{a(k-1) - r + \frac{1}{4}} - a + \frac{1}{2},$$

что и требовалось. □

Приведём асимптотическое следствие теоремы 9.

Следствие 10. *Рассмотрим последовательность непустых классов* $\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ *со следующими параметрами:* $m = \left\lceil \frac{m+l-2}{k-1} \right\rceil + k - a$, $a \geqslant 1$, $k \to \infty$, $k = o(m+l)$, $a = o(k)$. *Пусть* $m + l - 2 = (k-1) \cdot \left\lceil \frac{m+l-2}{k-1} \right\rceil - r$, $r = o(k)$. *Тогда выполнено*

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right) \gtrsim \frac{m+l}{k} + \sqrt{ak}.$$

Доказательство. Из условия следует, что

$$\left\lceil \frac{m+l-2}{k-1} \right\rceil \sim \frac{m+l}{k}, \ \sqrt{a(k-1) - r + \frac{1}{4}} - a + \frac{1}{2} \sim \sqrt{ak}.$$

Подставляя эти соотношения в теорему 9, получаем требуемое. □

Оценку теоремы 9 можно переписать без использования величины r, для этого сначала перепишем подкоренное выражение:

$$\begin{aligned} a(k-1) - r + \frac{1}{4} = a(k-1) - (k-1)q + m + l - 2 + \frac{1}{4} = \\ = l + \frac{1}{4} - (k-1)(q-a) + k + q - a - 2 = l + \frac{1}{4} - (k-2)(q-a-1). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем оценку

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right) \geqslant q + \sqrt{l + \frac{1}{4} - (k-2)(q-a-1)} - a + \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Примечательно также следующее. Для фиксированных значений k и l (положим их чётными) можно рассмотреть семейство последовательностей

$$\left\{\widetilde{d}_m \mid \text{в } \widetilde{d}_m \text{ ровно } m \text{ членов равны } k \text{ и } l \text{ равны единице}\right\}_{m=1}^{\infty}.$$

С некоторого момента $m \geqslant N$ все соответствующие классы $\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}_m} = \mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$ будут непусты согласно следствию 7 (при достаточно больших m соответствующее неравенство из условия следствия соблюдается). Пусть

$$q(m) := \left\lceil \frac{m+l-2}{k-1} \right\rceil, \ r(m) := q(m) \cdot (k-1) - (m+l-2).$$

Очевидно, $0 \leqslant q(m+1) - q(m) \leqslant 1$, причём $q(m+1) - q(m) = 1$ тогда и только тогда, когда $r(m) = 0$. Тогда при переходе от m к $m+1$ во всех случаях $m \geqslant k + q(m)$ значение $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}_m}\right)$, равное $q(m)$ по следствию 7, увеличивается максимум на 1.

Предположим, выполнено $m = k + q(m) - 1$, $r(m) \neq 0$, и при этом класс $\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}_m}$ не пуст. В таком случае, исходя из теоремы 9:

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}_m}\right) - q(m) \geqslant \left\lceil \sqrt{k - r(m) - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \right\rceil \geqslant \left\lceil \sqrt{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2} \right\rceil \geqslant 1.$$

При «малом» значении $r(m)$ относительно k разность и вовсе получается существенно больше 1, например, при $r(m) = o(k), k \to \infty$, получается $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}_m}\right) - q(m) \gtrsim \sqrt{k}$.

В то же время $m+1 = k+q(m) = k+q(m+1)$, поэтому $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}_{m+1}}\right) = q(m+1) = q(m)$. То есть $\gamma_c^{\min}$ уменьшается, и иногда существенно, при переходе от m к $m+1$. При дальнейшем же рассмотрении переходов от $m+s$ к $m+s+1$ величина $\gamma_c^{\min}$ меняет своё значение максимум на единицу, причём в сторону увеличения (на $q(m+s+1) - q(m+s)$). Получается, что в точке m происходит своего рода «фазовый переход». Пример ситуации, когда «фазовый переход» происходит на существенно большую величину, будет получен позже в виде следствия утверждения 4.

Определим, насколько точна нижняя оценка в теореме 9 для случая, в котором уже было получено точное значение величины $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right)$, то есть при $m = k+1$. Поскольку данному значению m соответствует $a = q - 1$, то в форме (13) неравенство теоремы 9 принимает вид

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{k+1,k,l,1}\right) \geqslant \sqrt{l + \frac{1}{4}} + \frac{3}{2}. \tag{14}$$

Оказывается, оценка (14) точна, правда, с поправкой на целую часть:

Утверждение 4. Для непустого класса $\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}$, где $m = k+1$, выполнено равенство

$$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right) = \left\lceil \sqrt{l + \frac{1}{4}} + \frac{3}{2} \right\rceil.$$

Доказательство. Положим $l \in [t(t-1)+2, t(t+1)]$, $t \in \mathbb{N}$. Тогда согласно теореме 8 имеем $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right) = t + 2$. То есть необходимо убедиться, что

$$\left\lceil \sqrt{l + \frac{1}{4}} + \frac{3}{2} \right\rceil = t + 2. \tag{15}$$

Воспользуемся определением величины t, получим

$$t + 1 = \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{4}} + \frac{3}{2} < \sqrt{l + \frac{1}{4}} + \frac{3}{2} \leqslant \sqrt{t^2 + t + \frac{1}{4}} + \frac{3}{2} = t + 2,$$

откуда немедленно следует равенство (15). □

Пусть l — произвольное чётное, а r — произвольное нечётное натуральные числа, $l \in [t(t-1)+2, t(t+1)]$, $t \in \mathbb{N}$. Положим

$$k := l + r + 1,\; m := k + 1 = l + r + 2.$$

Тогда $q(m) = \left\lceil \frac{m+l-2}{k-1} \right\rceil = \left\lceil \frac{2l+r}{l+r} \right\rceil = 2$, $r(m) = q(m) \cdot (k-1) - (m+l-2) = r$. Также выполнено $m = k+1 = k+q(m)-1$. Очевидно, $k \geqslant t+1$, тогда из теоремы 8 и утверждения 4 получаем

$\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right) = \left\lceil\sqrt{l+\frac{1}{4}}+\frac{3}{2}\right\rceil$. Так как $r(m) = r > 0$, то $m+1 = k+q(m) = k+q(m+1)$, из следствия 7 получаем $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m+1,k,l,1}\right) = q(m+1) = q(m) = 2$. То есть при переходе от m к $m+1$ число $\gamma_c^{\min}$ уменьшается с $\left\lceil\sqrt{l+\frac{1}{4}}+\frac{3}{2}\right\rceil$ до 2. В то же время при любом $M > m$ выполнено $M \geqslant k+q(M)$, соответственно, при переходе от M к $M+1$ по следствию 7 значение $\gamma_c^{\min}$ увеличивается на $0 \leqslant q(M+1)-q(M) \leqslant 1$. Таким образом, при достаточно больших l «фазовый переход» в точке m происходит на существенную величину, а именно порядка $\sqrt{l}$.

3. Заключение

Остаётся открытым довольно широкий спектр вопросов по затронутой в данной работе величине $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}\right)$: нахождение условий, при которых оценки леммы 1 и теоремы 9 достижимы; получение точных значений $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{R}^c_{m,k,l,1}\right)$ при $k+1 < m < k+\left\lceil\frac{m+l-2}{k-1}\right\rceil$; точных значений $\gamma_c^{\min}\left(\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}\right)$ при $m < k+\left\lceil\frac{n-2}{k-1}\right\rceil$ для более сложных n-последовательностей $\widetilde{d}$; изучение поведения последовательностей $\left\{\widetilde{d}_m\right\}_{m=1}^{\infty}$ до «фазовой» точки m. Также интерес может представлять нахождение всех достижимых значений величины γ_c в некоторых классах $\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}$ аналогично работам [31, 32], тем более при имеющихся оценках на $\gamma_c^{\max}\left(\mathcal{G}^c_{\widetilde{d}}\right)$ (см., например, [9–19]).

Автор выражает признательность А. Б. Дайняку за многочисленные обсуждения, способствовавшие продвижению исследования и улучшению изложения в статье.

Литература

1. *Diestel R.* Graph Theory 5th edition. Heidelberg : Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 2016. V. 173.
2. *Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И.* Лекции по теории графов. Москва : Наука. Физматлит, 1990.
3. *Havel V.* A remark on the existence of finite graphs (Czech.) // Čas. Pěstování Mat. 1955. V. 80. P. 477–480.
4. *Hakimi S.* On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph // SIAM J. Appl. Math. 1962. V. 10. P. 496–506.
5. *Erdős P., Gallai T.* Gráfok előírt fokszámú pontokkal // Matematikai Lapok. 1960. V. 11. P. 264—274.
6. *Haynes T.W., Hedetniemi S.T., Slater P.J.* Fundamentals of Domination in Graphs. New York : Marcel Dekker, Inc., Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics, 1998.
7. *Визинг В.Г.* Некоторые нерешённые задачи в теории графов // Успехи мат. наук. 1968. Т. 23. С. 117–134.
8. *Lemke P.* The maximum-leaf spanning tree problem in cubic graphs is NP-complete // IMA Preprint Series, 1988. N 428.
9. *Zelinka B.* Finding a Spanning Tree of a Graph with Maximal Number of Terminal Vertices // Kybernetika. 1973. V. 9, N 5. P. 357–360.
10. *Storer J.A.* Constructing full spanning trees for cubic graphs // Inform. Process. Lett. 1981. V. 13, N 1, I. 1. P. 8–11.

11. *Griggs J.R., Kleitman D.J., Shastri A.* Spanning trees with many leaves in cubic graphs // Journal of Graph Theory. 1989. V. 13, N 6. P. 669–695.

12. *Kleitman D.J., West D.B.* Spanning trees with many leaves // SIAM J. Discrete Math. 1991. V. 4, I. 1. P. 99–106.

13. *Griggs J.R., Wu M.* Spanning trees in graphs of minimum degree 4 or 5 // Discrete Mathematics. 1992. V. 104, I. 2. P. 167–183.

14. *Fusco E., Monti A.* Spanning Trees with Many Leaves in Regular Bipartite Graphs // Proc. of the 18th International Symposium on Algorithms and Computation. 2007. Lecture Notes in Computer Science. V. 4835. P. 904–914.

15. *Bonsma P., Zickfeld F.* Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms // Proc. of the 8th Latin American Symposium on Theoretical Informatics. 2008. Lecture Notes in Computer Science. V. 4957. P. 531–543.

16. *Гравин Н.В.* Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2010. Т. 381. С. 31–46.

17. *Bankevich A.V., Karpov D.V.* Bounds of the number of leaves of spanning trees // J. Math. Sci. 2012. V. 184. P. 564–572.

18. *Карпов Д.В.* Нижние оценки количества листьев в остовных деревьях // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Т. 450. С. 62–73.

19. *Симарова Е.Н.* Оценка количества листьев в остовном дереве связного графа с минимальной степенью 6 // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Т. 464. С. 112—131.

20. *Sampathkumar E., Walikar H.B.* The connected domination number of a graph // J. Math. Phys. Sci. 1979. V. 13, N 6. P. 607–613.

21. *Hedetniemi S.T., Laskar R.C.* Connected domination in Graphs // Proc. of the Cambridge Combinatorial Conference in honour of Paul Erdős on Graph Theory and Combinatorics. 1984. P. 209–218.

22. *Caro Y., West D.B., Yuster R.* Connected domination and spanning trees with many leaves // SIAM J. Discrete Math. 2000. V. 13, I. 2. P. 202–211.

23. *Gayathri M.* Connected domination in graphs // Graduate Theses and Dissertations. 2005. `https://scholarcommons.usf.edu/etd/2961`

24. *Duckwortha W., Mans B.* Connected domination of regular graphs // Discrete Math. 2009. V. 309, I. 8. P. 2305–2322.

25. *Desormeaux W.J., Haynes T.W., Henning M.A.* Bounds on the connected domination number of a graph // Discrete Appl. Math. 2013. V. 161, I. 18. P. 2925–2931.

26. *Das B.,Bhargavan V.* Routing in Ad-Hoc Networks Using Minimum Connected Dominating Sets // Proc. of the 6th International Conference on Communications. 2002. IEEE Xplore. V. 1. P. 376–380.

27. *Alzoubi K.M., Wan P.J, Frieder O.* New distributed algorithm for connected dominating set in wireless ad hoc networks // Proc. of the 35th Annual Hawaii International Conference on System Sciences. 2002. IEEE Xplore. P. 3849-3855.

28. *Du D.Z., Wan P.J.* Connected dominating set: theory and applications. New York: Springer, Springer Optimization and Its Applications, 2013. V. 77.

29. *Gentner M., Henning M., Rautenbach D.* Largest domination number and smallest independence number of forests with given degree sequence // Discrete Applied Mathematics. 2016. V. 206. P. 181–187.

30. *Gentner M., Henning M., Rautenbach D.* Smallest domination number and largest independence number of graphs and forests with given degree sequence // Journal of Graph Theory. 2018. V. 88, I. 1. P. 131–145.

31. *Курносов А.Д.* Множество всех возможных значений числа доминирования в деревьях с заданной степенной последовательностью // Дискретный анализ и исследование операций. 2020. Т. 27, № 1. С. 61–87.
32. *Курносов А.Д., Дайняк А.Б.* Независимые множества в деревьях с заданными степенными последовательностями // Труды IX Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем». 2015. С. 141–142.
33. *Kaspar S., Gayathri B., Kulandaivel M.P., Shobanadevi N.* Towards connected domination in graphs // International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017. V. 117, N 14. P. 53–62.

References

1. *Diestel R.* Graph Theory 5th edition. Heidelberg : Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics, 2016. V. 173.
2. *Emelichev V.A., Melnikov O.I., Sarvanov V.I., Tyshkevich R. I.* Lectures on Graph Theory. Moscow : Nauka. Fizmatlit, 1990. (in Russian).
3. *Havel V.* A remark on the existence of finite graphs. Čas. Pěstování Mat. 1955. V. 80. P. 477–480. (in Czech).
4. *Hakimi S.* On the realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a graph. SIAM J. Appl. Math. 1962. V. 10. P. 496–506.
5. *Erdős P., Gallai T.* Graphs with prescribed degrees of vertices. Matematikai Lapok. 1960. V. 11. P. 264—274. (in Hungarian).
6. *Haynes T.W., Hedetniemi S.T., Slater P.J.* Fundamentals of Domination in Graphs. New York : Marcel Dekker, Inc., Monographs and textbooks in Pure and Applied Mathematics, 1998.
7. *Vizing V.G.* Some unsolved problems in graph theory. Uspehi mat. nauk. 1968. V. 23. P. 117–134. (in Russian).
8. *Lemke P.* The maximum-leaf spanning tree problem in cubic graphs is NP-complete. IMA Preprint Series, 1988. N 428.
9. *Zelinka B.* Finding a Spanning Tree of a Graph with Maximal Number of Terminal Vertices. Kybernetika. 1973. V. 9, N. 5. P. 357–360.
10. *Storer J.A.* Constructing full spanning trees for cubic graphs. Inform. Process. Lett. 1981. V. 13, N. 1, I. 1. P. 8–11.
11. *Griggs J.R., Kleitman D.J., Shastri A.* Spanning trees with many leaves in cubic graphs. Journal of Graph Theory. 1989. V. 13, N 6. P. 669–695.
12. *Kleitman D.J., West D.B.* Spanning trees with many leaves. SIAM J. Discrete Math. 1991. V. 4, I. 1. P. 99–106.
13. *Griggs J.R., Wu M.* Spanning trees in graphs of minimum degree 4 or 5. Discrete Mathematics. 1992. V. 104, I. 2. P. 167–183.
14. *Fusco E., Monti A.* Spanning Trees with Many Leaves in Regular Bipartite Graphs. Proc. of the 18th International Symposium on Algorithms and Computation. 2007. Lecture Notes in Computer Science. V. 4835. P. 904–914.
15. *Bonsma P., Zickfeld F.* Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms. Proc. of the 8th Latin American Symposium on Theoretical Informatics. 2008. Lecture Notes in Computer Science. V. 4957. P. 531–543.
16. *Gravin N.V.* Constructing a spanning tree with many leaves. Zapiski nauchnykh seminarov POMI. 2010. V. 381. P. 31–46. (in Russian).

17. *Bankevich A.V., Karpov D.V.* Bounds of the number of leaves of spanning trees. J. Math. Sci. 2012. V. 184. P. 564–572.

18. *Karpov D.V.* Lower Bounds on the Number of Leaves in Spanning Trees. Zapiski nauchnykh seminarov POMI. 2016. V. 450. P. 62–73. (in Russian).

19. *Simarova E.N.* A Bound on the Number of Leaves in a Spanning Tree of a Connected Graph of Minimum Degree 6. Zapiski nauchnykh seminarov POMI. 2017. V. 464. P. 112—131. (in Russian).

20. *Sampathkumar E., Walikar H.B.* The connected domination number of a graph. J. Math. Phys. Sci. 1979. V. 13, N 6. P. 607–613.

21. *Hedetniemi S.T., Laskar R.C.* Connected domination in Graphs. Proc. of the Cambridge Combinatorial Conference in honour of Paul Erdős on Graph Theory and Combinatorics. 1984. P. 209–218.

22. *Caro Y., West D.B., Yuster R.* Connected domination and spanning trees with many leaves. SIAM J. Discrete Math. 2000. V. 13, I. 2. P. 202–211.

23. *Gayathri M.* Connected domination in graphs. Graduate Theses and Dissertations. 2005. `https://scholarcommons.usf.edu/etd/2961`

24. *Duckwortha W., Mans B.* Connected domination of regular graphs. Discrete Math. 2009. V. 309, I. 8. P. 2305–2322.

25. *Desormeaux W.J., Haynes T.W., Henning M.A.* Bounds on the connected domination number of a graph. Discrete Appl. Math. 2013. V. 161, I. 18. P. 2925–2931.

26. *Das B.,Bhargavan V.* Routing in Ad-Hoc Networks Using Minimum Connected Dominating Sets. Proc. of the 6th International Conference on Communications. 2002. IEEE Xplore. V. 1. P. 376–380.

27. *Alzoubi K.M., Wan P.J, Frieder O.* New distributed algorithm for connected dominating set in wireless ad hoc networks. Proc. of the 35th Annual Hawaii International Conference on System Sciences. 2002. IEEE Xplore. P. 3849-3855.

28. *Du D.Z., Wan P.J.* Connected dominating set: theory and applications. New York : Springer, Springer Optimization and Its Applications, 2013. V. 77.

29. *Gentner M., Henning M., Rautenbach D.* Largest domination number and smallest independence number of forests with given degree sequence. Discrete Applied Mathematics. 2016. V. 206. P. 181–187.

30. *Gentner M., Henning M., Rautenbach D.* Smallest domination number and largest independence number of graphs and forests with given degree sequence. Journal of Graph Theory. 2018. V. 88, I. 1. P. 131–145.

31. *Kurnosov A.D.* Values of the domination number in trees with a given degree sequence. Diskretnyi analiz i issledovanie operatsii. 2020. V. 27, N 1. P. 61–87. (in Russian).

32. *Kurnosov A.D., Dainiak A.B.* Independent sets in trees with given degree sequences. Proc. of the IX International conference «Discrete Models in Control Systems Theory». 2015. P. 141–142. (in Russian).

33. *Kaspar S., Gayathri B., Kulandaivel M.P., Shobanadevi N.* Towards connected domination in graphs. International Journal of Pure and Applied Mathematics. 2017. V. 117, N 14. P. 53–62.

Поступила в редакцию 23.03.2020