

УДК 519.855

*А. К. Була*

Московский физико-технический институт (государственный университет)  
 Университет Лубумбаши, ДР Конго

## Гладкие методы в многокритериальных задачах

В работе рассматривается схема использования метода функций обратных связей для исследования зависимости маргинальных оценок в задачах многокритериальной оптимизации от параметров. Приводится описание подхода, основанного на методе гладких функций обратных связей. Предлагается, обосновывается и демонстрируется на примерах алгоритм решения задачи оптимизации по параметрам для минимизации рассогласованности значений целевых функций.

**Ключевые слова:** задача многокритериального программирования, метод гладких функций обратных связей, задача оптимизации по параметрам многокритериальной модели.

*А. К. Bula*

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)  
 University of Lubumbashi, DR of the Congo

## Smooth methods in multicriterial problems

The studied scheme is used to solve parametric programming problems for multicriterial models. An algorithm for solving parametric reference point problems by smooth methods is suggested. The description, foundation and demonstrational examples are given.

**Key words:** parametric programming problem, multiobjective optimization, feedback functions method.

### Введение

Под конечномерной многокритериальной моделью мы будем называть математическую модель с  $N$  целевыми функциями

$$F_k(x, u) \rightarrow \max_x, \quad k = [1, N], \quad (1)$$

подлежащими максимизации на обладающем внутренними точками множестве элементов  $x \in E^n$ , удовлетворяющих условиям вида

$$f_i(x, u) \leq 0, \quad i = [1, m], \quad (2)$$

где  $u \in \Theta \subseteq E^r$  – вектор параметров модели. Далее мы будем считать, что функции  $F_k(x, u)$  и  $f_i(x, u)$  имеют непрерывные частные производные требуемого порядка по всем своим аргументам.

Очевидно, что некоторую полезную информацию может дать последовательное решение следующих однокритериальных задач поиска экстремума на множестве (2) каждой из функций (1) в отдельности для  $k = [1, N]$ :

$$\begin{aligned} F_k(x, u) &\rightarrow \max_x \\ &\text{при условиях} \\ f_i(x, u) &\leq 0, \quad i = [1, m], \end{aligned} \quad (3)$$

с решениями  $x_{ku}^*$ .

К настоящему времени предложены многочисленные методы (см. [1], [2]), позволяющие, используя данные такого вида, получать различного рода маргинальные оценки количественных характеристик многокритериальных моделей.

При практическом использовании многокритериальных математических моделей достаточно часто набор независимых целевых функций заменяют некоторым дополнительным критерием, переходя таким образом к задаче математического программирования со скалярной целевой функцией, позволяющей находить, например, на множестве Парето согласованные или компромиссные в определенном смысле решения.

Ниже будет рассмотрен вариант подхода, в котором компромиссной является задача поиска на множестве (2) элемента, минимизирующего величину *рассогласования целевых функций* (то есть, максимального по всей совокупности критериев, отклонения каждого из критериев от своего наилучшего «идеала»).

## Постановка задачи

Формально рассматривается задача математического программирования следующего вида:

минимизировать  $\rho$ , при условиях  $\rho \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} f_i(x, u) &\leq 0, & i &= [1, m], \\ F_k(x, u) &\geq F_{ku}^* - \rho, & k &= [1, N], \end{aligned} \quad (4)$$

решение которой мы будем обозначать как  $\rho^{**}(u)$  и  $x^{**}(u)$ . Здесь  $F_{ku}^* = F(x_{ku}^*, u)$ .

Задача (4) может рассматриваться как параметрическая задача второго (верхнего) уровня, поскольку в формулировке ее условия содержатся  $F_{ku}^*$   $k = [1, N]$  – решения однокритериальных задач (3), называемые *задачами первого (нижнего) уровня*. При этом как в задачах первого, так и второго уровня вектор параметров  $u \in \Theta$  предполагается фиксированным.

Экстремальная величина рассогласования критериев *rho* определяется свойствами множества Парето и является для этого множества некоторой количественной характеристикой, зависящей от вектора параметров  $u$ . При этом для модели (1) – (2) естественно возникает оптимизационная задача *третьего уровня*, например такая:

$$\text{оптимизировать по } u \in \Theta \text{ выражение } \rho^{**}(u), \quad (5)$$

решением которой будут являться вектор параметров  $u^{***} \in \Theta$  и число  $\rho^{***} = \rho_{u^{***}}^{**}$ .

Целью настоящей статьи является описание и обоснование некоторого подхода к решению задачи (5).

## Метод решения

Решаем задачи отыскания в пространстве параметров стандартным (например, градиентным) методом поиска экстремума величины рассогласованности значений целевых функций многокритериальной модели (3) – (4) – (5).

Отметим, что особенностью этого подхода является тот факт, что постановка задачи (5) верхнего (*третьего*) уровня включает  $\rho_{ku}^{**}$  – зависимость, являющуюся решением задачи (4) *второго* уровня, условие которой в свою очередь содержит зависимости  $F_{ku}^* = F_k(x_{ku}^*(u), u) \forall k \in [1, N]$ , определяемые решениями задач (3) нижнего (*первого*) уровня.

При этом зависимости  $\rho_{ku}^{**}$  и  $F_{ku} \forall k \in [1, N]$  в общем случае (даже для гладких функций  $F_k(x, u)$  и  $f_i(x, u)$ ) не являются дифференцируемыми функциями, то есть непосредственное использование каких-либо численных методов, основанных на применении тейлоровских аппроксимаций, оказывается невозможным.

Для преодоления этого затруднения предлагается воспользоваться сглаживающим свойством метода функций обратных связей, описанного в [1], и аналогичного рассмотренному в [2], чтобы получить гладкие аппроксимации зависимостей  $\rho^{**}(u)$  и  $F_k^*(u) \forall k \in [1, N]$ , допускающие использование аппроксимаций по формуле Тейлора до второго порядка включительно.

При этом будем предполагать, что используемые в методе обратных связей функции удовлетворяют следующим условиям:

1°. Функция  $P(\tau, s)$  имеет  $\forall \tau > 0$  и  $\forall s$  непрерывные производные по всем своим аргументам до второго порядка включительно.

2°. Для всех  $\tau > 0$  и  $\forall s$  выполнены неравенства

$$\frac{\partial P}{\partial s} > 0; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial s^2} > 0. \quad (6)$$

3°.  $P(\tau, s) > 0 \quad \forall s$  и любого  $\tau > 0$ , причем, кроме того,

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} P(\tau, s) = \begin{cases} +\infty, & s > 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases} \quad (7)$$

Использование метода функций сводится к следующему. Пусть

$$L_k(x, \Lambda, u) = F_k(x, u) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, u) \quad (8)$$

– стандартная функция Лагранжа для задачи (3), а функция  $Q(\tau, s) = \text{inv} \left( \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, s) \right)$ ,

то есть обратна к  $\frac{\partial P}{\partial s}$ . Тогда, исходя из оценочных соотношений, имеющих место при использовании метода гладких штрафных функций [3] для решения задачи (1) – (2) связывающих прямые и двойственные переменные (множители Лагранжа):

$$\lambda_{k u i}^* = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{\partial P}{\partial s}(\tau, f_i(\tilde{x}_k(\tau, u))) \quad \forall i = [1, m],$$

где  $\tilde{x}_k(\tau, u)$  – решение задач (3), полученное методом гладких штрафных функций.

Можно построить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial L_k}{\partial \lambda_{k i}}(\bar{x}_k, \bar{\Lambda}_k) = -Q(\tau, \bar{\lambda}_{k i}) & \forall i = [1, m], \\ \frac{\partial L_k}{\partial \xi_{k j}}(\bar{x}_k, \bar{\Lambda}_k) = Q(\tau, \bar{\xi}_{k j}) & \forall j = [1, n]. \end{cases} \quad (9)$$

В [4] показано, что в условиях (6)–(7) эта система всегда совместна и из нее одновременно находятся вектор-функции  $\bar{x}_k(\tau, u)$  и  $\bar{\Lambda}_k(\tau, u)$  с компонентами  $\{ \bar{\xi}_{k j}(\tau, u) \quad \forall j = [1, n] \}$  и  $\{ \bar{\lambda}_{k i}(\tau, u) \quad \forall i = [1, m] \}$  и которые в свою очередь можно использовать как приближенные оценки оптимальных значений прямых  $x_{k u}^*$  и двойственных переменных  $\Lambda_{k u}^*$  в задачах (3), когда последние имеют решение.

Несложно убедиться, что система уравнений (9) является условием стационарности вспомогательной функции

$$U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i), \quad (10)$$

в которой неотрицательная функция  $R(\tau, s)$  удовлетворяет соотношению  $Q(\tau, s) = \frac{\partial R}{\partial s}$ .

Поскольку к системе (9) применима стандартная теорема о неявных функциях, то для вектор-функций  $\{ \bar{\xi}_{kj}(\tau, u) \quad \forall j = [1, n] \}$  и  $\{ \bar{\lambda}_{ki}(\tau, u) \quad \forall i = [1, m] \}$  будут справедливы следующие утверждения, как показано в [3].

На седловых траекториях для задач, имеющих ограниченные оптимальные значения целевых функций, существуют конечные пределы  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau)$  и  $\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau)$ , для которых

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{\Lambda}(\tau)) = F(x^*) = G(\Lambda^*), \tag{11}$$

а в случае единственности решений (регулярности) пары задач (1) и (2) справедливы также равенства

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{x}(\tau) = x^* \quad \text{и} \quad \lim_{\tau \rightarrow +0} \bar{\Lambda}(\tau) = \Lambda^*. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь аналогичную схему решения задачи второго уровня (4), то есть получим асимптотические оценки решений этой задачи методом функций обратной связи.

Рассмотрим вначале схему решения задач первого уровня.

Будем использовать для однокритериальных задач (3) вспомогательную функцию вида

$$U_k(\tau, x, \Lambda, u) = F_k(x, u) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, u) + RR(\tau, x, \Lambda) \quad \forall k \in [1, N], \tag{13}$$

в то время как функции  $RR(\tau, s)$  в регуляризирующем слагаемом

$$RR(\tau, x, \Lambda) = - \sum_{j=1}^m R(\tau, \xi_j) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i)$$

по-прежнему выбираются согласно условиям (6) – (7).

В качестве сглаженной аппроксимации  $x_{uk}^*$  – точного решения каждой из задач нижнего уровня (3), можно принять  $\{ \bar{x}^k(\tau, u), \bar{\Lambda}^k(\tau, u) \}$  – стационарную точку вспомогательной функции (13), определяемую, согласно теореме о неявных функциях [5] системой уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial U_k}{\partial \xi_{j(k)}} = 0 & \forall j \in [1, n], \\ \frac{\partial U_k}{\partial \lambda_{j(k)}} = 0 & \forall i \in [1, m]. \end{cases} \tag{14}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} \frac{\partial L_k}{\partial \lambda_{i(k)}}(\bar{x}_{(k)}, \bar{\Lambda}_{(k)}) = -Q(\tau, \bar{\lambda}_{i(k)}) & \forall i = [1, m], \\ \frac{\partial L_k}{\partial \xi_{j(k)}}(\bar{x}_{(k)}, \bar{\Lambda}_{(k)}) = Q(\tau, \bar{\xi}_{j(k)}) & \forall j = [1, n], \end{cases} \tag{15}$$

где  $L_k(x_{(k)}, \Lambda_{(k)})$  – стандартная функция Лагранжа для задачи (3), а  $Q(\tau, s) = \frac{\partial R}{\partial s}$ .

В рассматриваемой задаче в условие задачи второго уровня (4) входят зависимости  $F_{uk}^* = F_k(x_{uk}^*, u) \quad \forall k \in [1, N]$ , не являющиеся дифференцируемыми функциями своих аргументов, то для этих зависимостей необходимо построить сглаженную аппроксимацию.

В качестве такой аппроксимации используем вспомогательную функцию, вычисленную в стационарной точке, то есть функцию  $\bar{F}_k(u) = U_k(\tau, \bar{x}_{(k)}(\tau, u), \bar{\Lambda}_{(k)}(\tau, u), u)$ , так как (в силу свойств метода штрафных функций) ее значение при малых положительных  $\tau$  близко к оптимальному значению целевой функции  $k$ -й задачи (3).

Стандартные методы оптимизации, используемые для задач нижнего уровня, основанные на использовании значений, градиентов или иных дифференциальных характеристик,

предполагают, что помимо решения системы (14) можно находить и сами эти характеристики. Рассмотрим вначале процедуру вычисления производных функции  $\bar{F}_k(u)$  по компонентам вектора параметров  $u$ , предполагая, что система (14) (или (15)) уже решена.

Поскольку  $\bar{F}_k(u) = U_k(\tau, \bar{x}^k(\tau, u), \bar{\Lambda}^k(\tau, u), u)$ , то по правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$(\bar{F}_k)'_{u_p} = \frac{\partial U_k}{\partial u_p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U_k}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_p} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial U_k}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_p} \quad \forall p \in [1, r].$$

Что в силу (14) дает

$$(\bar{F}_k)'_{u_p} = \frac{\partial U_k}{\partial u_p}(\tau, \bar{x}^k(\tau, u), \bar{\Lambda}^k(\tau, u), u) \quad \forall p \in [1, r]. \quad (16)$$

Отметим, что последнее упрощение было бы невозможным, если для  $F_{u_k}^*$  вместо сглаживающей аппроксимации  $U_k(\tau, \bar{x}^k(\tau, u), \bar{\Lambda}^k(\tau, u), u)$  использовать аппроксимацию  $F_k(\bar{x}_k(\tau, u), u)$ .

Рассмотрим теперь процедуру решения задачи второго уровня (4) методом функций обратных связей.

Построим для задачи (4) вспомогательную  $U$ -функцию, введя вектор  $M \in E^N$ , – множителей Лагранжа для второй группы ограничений в задаче (4), для которого  $\|M\| = \|\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\|^T$ :

$$\begin{aligned} U(\tau, \rho, x, \Lambda, M, u) = & -\rho - \sum_{k=1}^N \mu_k Y_k(\rho, x, u) - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x, u) - \\ & -R(\tau, \rho) - \sum_{j=1}^n R(\tau, \xi_j) + \sum_{k=1}^N R(\tau, \mu_k) + \sum_{i=1}^m R(\tau, \lambda_i), \end{aligned} \quad (17)$$

заменив предварительно в  $Y_k(\rho, x, u)$  зависимость  $F_{u_k}^*$  на ее сглаженную аппроксимацию  $\bar{F}_k(u)$ .

Условия стационарности вспомогательной функции (17) по совокупности переменных

$$\left\{ \rho, x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N \right\}$$

будут

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \rho} = & -1 + \sum_{k=1}^N \mu_k - Q(\tau, \rho) = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \xi_j} = & \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{\partial F_k}{\partial \xi_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi_j} - Q(\tau, \xi_j) = 0 \quad \forall j \in [1, n], \\ \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = & -f_i(x, u) + Q(\tau, \xi_j) = 0 \quad \forall i \in [1, m], \\ \frac{\partial U}{\partial \mu_k} = & -Y_k(x, u) + Q(\tau, \mu_k) = 0 \quad \forall k \in [1, N]. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Обозначим решения системы (18) как  $\bar{\rho}(\tau, u)$ ,  $\bar{x}(\tau, u)$ ,  $\bar{\Lambda}(\tau, u)$ , и  $\bar{M}(\tau, u)$ , тогда в качестве сглаженной аппроксимации зависимости  $\rho_u^{**}$  можно использовать функцию

$$\bar{U}(\tau, u) = U(\tau, \bar{\rho}(\tau, u), \bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u), \bar{M}(\tau, u), u).$$

Найдем производные этой функции по компонентам вектора параметров  $u$ .

По правилу дифференцирования сложной функции многих переменных имеем

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial u_p} = \frac{\partial U}{\partial u_p} + \frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_p} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial U}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_p} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_p} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial U}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_p} \quad \forall p \in [1, r],$$

что, с учетом  $\frac{\partial U}{\partial \rho} = 0$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \xi_j} = 0 \quad \forall j \in [1, n]$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = 0 \quad \forall i \in [1, m]$  и  $\frac{\partial U}{\partial \mu_k} = 0 \quad \forall k \in [1, N]$  дает более простое выражение:

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial u_p} = \frac{\partial U}{\partial u_p}(\tau, \bar{\rho}(\tau, u), \bar{x}(\tau, u), \bar{\Lambda}(\tau, u), \bar{M}(\tau, u), u) \quad \forall p \in [1, r]. \quad (19)$$

Наконец, получим формулы для компонент градиента от  $\bar{U}(\tau, u)$  в терминах функций, используемых в формулировке многокритериальной модели (1) – (2) и методе функций обратных связей.

Из (17) имеем  $\frac{\partial \bar{U}}{\partial u_p} = - \sum_{k=1}^N \mu_k \frac{\partial Y_k}{\partial u_p} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_p}$ , причем для  $\frac{\partial Y_k}{\partial u_p} = \frac{\partial \bar{F}_k}{\partial u_p} - \frac{\partial f_k}{\partial u_p}$  значения  $\frac{\partial \bar{F}_k}{\partial u_p}$  определяются равенствами  $Y_k(\rho, x, u) = \bar{F}_k(u) - \rho - F_k(x, u) \quad \forall k = [1, N]$ .

Формулы (19) позволяют решать задачу верхнего уровня, применяя какой-либо из методов первого порядка.

Рассмотрим теперь метод нахождения для функции  $\bar{U}(u)$  элементов матрицы Гессе, знание которой позволяет использовать в процессе поиска стационарных точек методы второго порядка.

Применяя к этой функции правила дифференцирования сложной функции, получаем

$$\begin{aligned} \left( \bar{U}(u) \right)''_{u_p u_q} &= \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial u_p \partial u_q} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial u_p \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial u_p \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_q} + \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial u_p \partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_q} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial u_p \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_q} \quad \forall p, q = [1, r]. \end{aligned}$$

Вторые частные производные вычисляются непосредственно в точке  $\{\bar{x}, \bar{\rho}, \bar{\Lambda}, \bar{M}\}$ , а первые производные, т.е.  $\frac{\partial U}{\partial \rho}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \xi_j} \quad \forall j \in [1, n]$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \quad \forall i \in [1, m]$  и  $\frac{\partial U}{\partial \mu_k} \quad \forall k \in [1, N]$

могут быть найдены по теореме о неявных функциях [5] из системы линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial \rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_q} + \\ \quad + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_q} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_q} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \rho \partial u_q}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_h \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_h \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_q} + \\ \quad + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_h \partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_q} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_h \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_q} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \xi_h \partial u_q}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_s \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_s \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_q} + \\ \quad + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_s \partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_q} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_s \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_q} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda_s \partial u_q}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_t \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial u_q} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_t \partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial u_q} + \\ \quad + \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_t \partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial u_q} + \sum_{k=1}^N \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_t \partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial u_q} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \mu_t \partial u_q}, \end{array} \right. \quad (20)$$

которая в свою очередь получается при последовательном дифференцировании по переменным  $\rho$  и  $x_j$   $j = [1, n]$  условий стационарности (18). Заметим, что в формулах (20) мы используем  $h = [1, n]$ ,  $s = [1, m]$ ,  $t = [1, N]$ .

В этом случае приближенное решение задачи верхнего уровня сводится к поиску экстремума по  $u$  вспомогательной функции  $\bar{U}(\tau, u) = U(\tau, \bar{x}(\tau, u), \bar{\lambda}(\tau, u), u)$ , для реализации которого также можно использовать стандартные итерационные алгоритмы.

Например, для методе Ньютона компоненты улучшающего вектора  $w$  находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{t=1}^n \bar{U}''_{\nu_t \nu_p} w_t = -\bar{U}'_{\nu_p} \quad \forall p = [1, k].$$

Наконец заметим, что при необходимости и соответствующих предположениях о гладкости функций (1) – (2), из линейных систем с той же основной матрицей могут быть найдены значения производных более высокого порядка.

### Пример решения задачи

Проиллюстрируем особенности такой постановки задачи следующим примером.

Рассмотрим достаточно наглядную многокритериальную математическую модель, в которой  $x = \|\xi_1 \xi_2 \xi_3\|^T \in E^3$  – вектор независимых переменных, а вектор параметров  $u = \|u_1 u_2\|^T \in E^2$ .

Требуется максимизировать по  $x$  при некотором  $u \subseteq \Theta \in E^2$  функции

$$F_1(x, u) = x_1, \quad F_2(x, u) = u_1 x_2, \quad F_3(x, u) = 3x_3 \quad (21)$$

при условиях:  $x_1 \geq 0$ ,  $x_2 \geq 0$  и  $x_3 \geq 0$ ,

$$f_1(x, u) = x_1 + x_2 + x_3 \leq u_2,$$

где  $\Theta : \left\{ 0 \leq u_1 \leq 6; 0 \leq u_2 \leq 10 \right\}$ .

Для решения используем, примененную в [4], функцию обратной связи вида  $Q(\tau, s) = \frac{\tau}{2} \left( s - \frac{1}{s} \right)$ . Тогда система (15) (например, для  $k = 2$ ) будет

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_2 + \bar{x}_{1(2)} + \bar{x}_{2(2)} + \bar{x}_{3(2)} = \frac{\tau}{2} \left( \bar{\lambda}_{(2)} - \frac{1}{\bar{\lambda}_{(2)}} \right), \\ \bar{\lambda}_{(2)} = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{x}_{1(2)} - \frac{1}{\bar{x}_{1(2)}} \right), \\ -u_1 + \bar{\lambda}_{(2)} = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{x}_{2(2)} - \frac{1}{\bar{x}_{2(2)}} \right), \\ \bar{\lambda}_{(2)} = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{x}_{3(2)} - \frac{1}{\bar{x}_{3(2)}} \right). \end{array} \right. \quad (22)$$

Решая предварительно задачи нижнего уровня, то есть системы (15), которые в приводимом примере имеют вид (22), находим  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$  и  $\bar{F}_3$  – значения сглаженных оценок целевых функций одноэкстремальных задач  $F_{uk}^* = F_k(x_{uk}^*, u) \forall k \in [1, N]$ .

Затем, используя эти оценки, формируем условие задачи второго уровня – системы (18), которая для данной задачи имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} -u_2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 = \frac{\tau}{2} \left( \bar{\lambda} - \frac{1}{\bar{\lambda}} \right), \\ \bar{F}_1 - \bar{x}_1 - \bar{\rho} = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{\mu}_1 - \frac{1}{\bar{\mu}_1} \right), \\ \bar{F}_2 - u_1 \bar{x}_2 - \bar{\rho} = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{\mu}_2 - \frac{1}{\bar{\mu}_2} \right), \\ \bar{F}_3 - 3\bar{x}_3 - \bar{\rho} = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{\mu}_3 - \frac{1}{\bar{\mu}_3} \right), \\ \bar{\lambda}_1 - \bar{\mu}_1 = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{x}_1 - \frac{1}{\bar{x}_1} \right), \\ \bar{\lambda}_1 - u_1 \bar{\mu}_2 = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{x}_2 - \frac{1}{\bar{x}_2} \right), \\ \bar{\lambda}_1 - 3\bar{\mu}_3 = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{x}_3 - \frac{1}{\bar{x}_3} \right), \\ 1 - \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_3 = -\frac{\tau}{2} \left( \bar{\rho} - \frac{1}{\bar{\rho}} \right). \end{array} \right. \quad (23)$$

Решение системы (23) для точки в пространстве параметров с  $u_1 = 2$  и  $u_2 = 5$  при различных значениях  $\tau$  приведено в табл. 1.

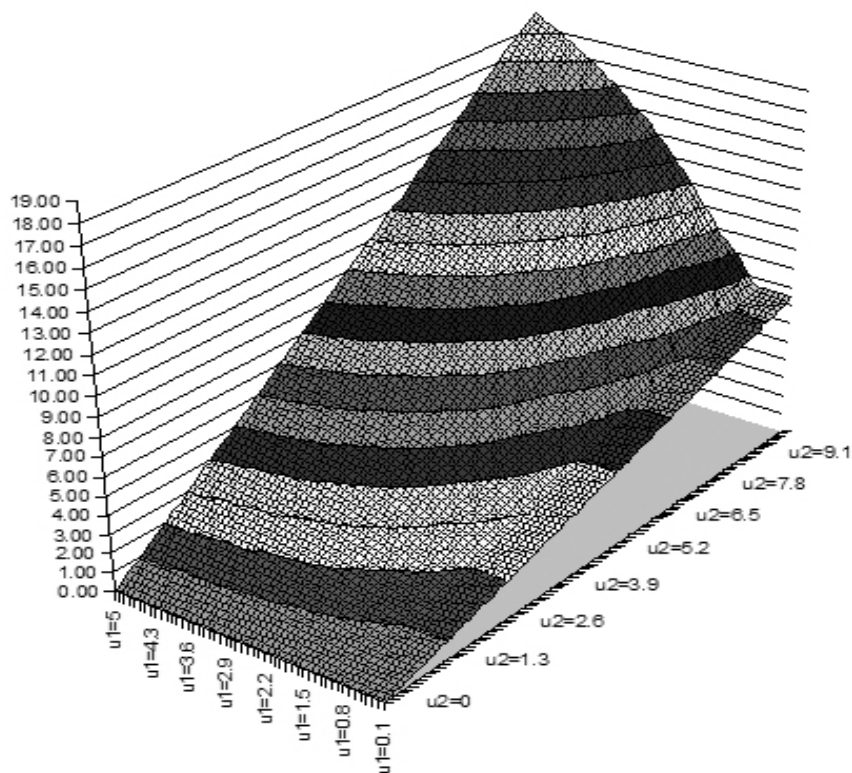


Т а б л и ц а 1

$\tau$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{\rho}$	$\bar{\lambda}$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\mu}_2$	$\bar{\mu}_3$
$10^{-1}$	0.036183480	1.942605273	3.056791852	6.150359244	1.417219233	0.037182321	0.744305433	0.517900602
$10^{-2}$	$4.116 \cdot 10^{-3}$	1.992735259	3.005146639	6.024189515	1.219555846	$4.813 \cdot 10^{-3}$	0.613505204	0.410972589
$10^{-3}$	$4.162 \cdot 10^{-4}$	1.999258339	3.000510447	6.002509934	1.201920729	$4.980 \cdot 10^{-4}$	0.601335133	0.401084782
$10^{-4}$	$4.166 \cdot 10^{-5}$	1.999925683	3.000051004	6.000251899	1.200191707	$4.998 \cdot 10^{-5}$	0.600133351	0.400108348
$10^{-5}$	$4.167 \cdot 10^{-6}$	1.999992567	3.000005100	6.000025199	1.200019167	$5.000 \cdot 10^{-6}$	0.600013334	0.400010833
$10^{-6}$	$4.167 \cdot 10^{-7}$	1.999999257	3.000000510	6.000002520	1.200001917	$5.000 \cdot 10^{-7}$	0.600001333	0.400001083
$10^{-7}$	$4.167 \cdot 10^{-8}$	1.999999926	3.000000051	6.000000252	1.200000192	$5.000 \cdot 10^{-8}$	0.600000133	0.400000108
$10^{-8}$	$4.167 \cdot 10^{-9}$	1.999999993	3.000000005	6.000000025	1.200000019	$5.000 \cdot 10^{-9}$	0.600000013	0.400000011

Заметим, что точное решение задачи второго уровня при значениях параметров  $u_1 = 2$  и  $u_2 = 5$  имеет вид

$$x_1^{**} = 0; x_2^{**} = 2; x_3^{**} = 3; \rho^{**} = 6; \lambda^{**} = 1.2; \mu_1^{**} = 0; \mu_2^{**} = 0.6; \mu_3^{**} = 0.4.$$

Рис. 1. Графическое представление зависимости  $\bar{\rho}(\tau, u)$

Графическое представление зависимости  $\bar{\rho}(\tau, u)$  показано на рис. 1. Для решения задач типа (17) в рассматриваемом примере можно использовать любую стандартную градиентную схему, описанную, например, в [6].

## Литература

1. Умнов Е.А., Умнов А.Е. Метод параметрической линейзации, использующий штрафные функции со всюду обратимой производной для решения пар двойственных задач // Труды МФТИ. 2011. Т. 3, № 1(9). С. 146–152.
2. Була А.К., Умнов Е.А., Умнов А.Е. Оптимизация формы множества Парето в задачах многокритериального программирования // Труды МФТИ. 2017. Т. 9, № 4(36). С. 120–131.
3. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.
4. Умнов Е.А., Умнов А.Е. Параметрическое сглаживание в минимаксных задачах // Труды МФТИ. 2017. Т. 9, № 4(35). С. 149–160.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 2-х томах. Т. 2. М.: Высшая школа, 1981. 584 с.
6. Жадан В.Г. Методы оптимизации. Ч. 2. Численные алгоритмы. М.: МФТИ, 2015. 320 с.

## References

1. Umnov E.A., Umnov A.E. Parametric linearization method using penalty functions with everywhere invertible derivation. Proceedings of MIPT. 2011. V. 3, N 1(9). P. 146–152. (in Russian).
2. Bula A.K., Umnov E.A., Umnov A.E. Optimization of the shape of the Pareto set in multicriterial programming problems. Proceedings of MIPT. 2017. V. 9, N 4(36). P. 120–131. (in Russian).
3. Fiacco A.V., McCormick G.P. Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques. M.: Mir, 1972. P. 240. (in Russian).
4. Umnov E.A., Umnov A.E. Parametric smoothing method in minimax problems. Proceedings of MIPT. 2018. V. 10, N 1(37). P. 142–154. (in Russian).
5. Kudryavtsev L.D. A course in mathematical analysis (V. 1–2). V. 2. M.: Vysshaya shkola, 1981. P. 584. (in Russian).
6. Zhadan V.G. Methods of optimization. Introduction in convex analysis and theory of optimization. M.: MIPT, 2014. 270 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 19.11.2018