Криволинейные координаты

С.С. Ефимов

1 Геометрия

1.1 Криволинейные координаты. Локальный базис

Рассмотрим максимально общий вид задания положения точки в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$

$$\mathbf{r}(q^1, q^2, ..., q^n) = \mathbf{r}(q^i). \tag{1.1}$$

Параметры q^i $(i = 1, 2, ..., n)$ называются *криволинейными координатами*. При этом предполагается, что набор q^i является функционально независимым, то есть не существует такой функции $F(q^i)$, что $F(q^i) \equiv 0$. Это условие эквивалентно тому, что ни один из параметров q^i не может быть вычислен по значениям остальных переменных. В противном случае такой параметр не вносит в общий набор никакой не содержащейся в остальных переменных информации о положении точки и поэтому должен быть исключен.

Каждой из криволинейных координат q^i соответствует семейство *координатных линий* γ_i, представляющих собой кривые, очерчиваемые вектором $\mathbf{r}(q^i)$ при изменении q^i при фиксированных значениях остальных координат. В пределах семейства, таким образом, кривые различаются значениями переменных q^j $(j \neq i)$. Дифференцирование $\mathbf{r}$ по q^i даёт касательный вектор к координатной линии γ^i в соответствующей точке пространства:

$$\boldsymbol{g}_i(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}. \tag{1.2}$$

Для краткости будем называть $\boldsymbol{g}_i$ *координатными векторами*. Из функциональной независимости координат q^i следует линейная независимость $\boldsymbol{g}_i$. То есть набор координатных векторов образует базис. Поскольку производная $\partial \mathbf{r}/\partial q^i$ может принимать разные значения в разных точках пространства, этот базис носит локальный характер.

Разложение произвольного вектора по локальному базису имеет вид

$$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} a^i \boldsymbol{g}_i. \tag{1.3}$$

Далее при записи подобных сумм будет применяться *правило Эйнштейна*, состоящие в том, что при суммировании по парным индексам (один из которых обязательно должен быть нижним, а второй верхним), знак суммы на письме опускается:

$$\boldsymbol{a} = a^i \boldsymbol{g}_i. \tag{1.4}$$

Примечание: Расположение индекса у каждой из величин сверху или снизу в описанной нотации можно интерпретировать как запись индексированных компонент в строчку или столбец соответственно при переходе к матричному представлению. Формула (1.4), таким образом, является краткой формой записи

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{g}_1 \quad \boldsymbol{g}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{g}_n) \cdot \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix}.$$

Порядок величин в матричном произведении при этом определяется соответствием исходной сумме (1.3), в то время как в (1.4) произведение обозначает простое умножение отдельных компонент и может быть записано в любом порядке:

$$a^i \boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{g}_i a^i.$$

Прямоугольная матрица в новых обозначениях может быть записана, например, в виде ${A^i}_j$ и проинтерпретирована как строчка из столбцов. Умножение нескольких матриц соответствует записи:

$$\mathbf{M} = \mathbf{ABC} =$$

$$= \begin{pmatrix} {A^1}_1 & {A^1}_2 & \dots & {A^1}_l \\ {A^2}_1 & {A^2}_2 & \dots & {A^2}_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {A^n}_1 & {A^n}_2 & \dots & {A^n}_l \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {B^1}_1 & {B^1}_2 & \dots & {B^1}_m \\ {B^2}_1 & {B^2}_2 & \dots & {B^2}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {B^l}_1 & {B^l}_2 & \dots & {B^l}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {C^1}_1 & {C^1}_2 & \dots & {C^1}_s \\ {C^2}_1 & {C^2}_2 & \dots & {C^2}_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {C^m}_1 & {C^m}_2 & \dots & {C^m}_s \end{pmatrix} =$$

$$= {A^i}_j {B^j}_k {C^k}_p = {M^i}_p.$$

Важно отметить, как ведут себя величины с индексами при переходе от одних криволинейных координат к другим. Рассмотрим координаты Q^k, связанные с исходными координатами q^i соотношениями общего вида

$$q^i = q^i \left(Q^k\right). \tag{1.5}$$

Координатные вектора для q и Q связаны соотношениями

$$\boldsymbol{G}_k = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial Q^k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial Q^k} = \left(\frac{\partial q^i}{\partial Q^k}\right) \boldsymbol{g}_i = {J^i}_k \boldsymbol{g}_i, \tag{1.6}$$

где J – матрица Якоби преобразования (1.5):

$${J^i}_k = \left(\frac{\partial q^i}{\partial Q^k}\right).$$

То есть как и для прямолинейных координат, в общем случае при переходе от одних координат к другим набор базисных векторов умножается на матрицу перехода. Разница состоит в том, что для криволинейных координат матрица перехода в разных точках пространства может различаться.

Разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по новому локальному базису имеет вид

$$\boldsymbol{a} = A^k \boldsymbol{G}_k = A^k {J^i}_k \boldsymbol{g}_i.$$

Поскольку компоненты вектора при разложении по базису определяются однозначным образом, из сопоставления последнего равенства с (1.4) следует, что

$${J^i}_k A^k = a^i.$$

То есть при замене координат компоненты вектора преобразуются (“варьируются”) матрицей обратной матрице преобразования базисных векторов (1.6):

$$A^k = \left(J^{-1}\right)^k{}_i a^i. \tag{1.7}$$

Поэтому a^i называются *контравариантными компонентами* вектора $\boldsymbol{a}$.

Примечание: Стоит отметить, что сами криволинейные координаты q^i, несмотря на схожесть обозначения, не являются контравариантными компонентами какого-либо вектора. Их преобразование может задаваться произвольными функциями (1.5), в отличие от контравариантных векторных компонент, преобразующихся при помощи линейных соотношений (1.7).

В частности, несложно убедиться, что q^i не являются компонентами радиус-вектора $\mathbf{r}$. Так, например, соотношения (1.4) для $\mathbf{r}$ и q^i выполняются в декартовых координатах:

$$\mathbf{r} = q^i \boldsymbol{g}_i = x\boldsymbol{g}_x + y\boldsymbol{g}_y,$$

но нарушаются при переходе к полярным координатам:

$$Q^k \boldsymbol{G}_k = r\boldsymbol{G}_r + \varphi\boldsymbol{G}_\varphi \neq \mathbf{r} = r\boldsymbol{G}_r.$$

При этом дифференциал криволинейных координат dq^i является набором контравариантных компонент и соответствует вектору $d\mathbf{r}$.

1.2 Скалярное произведение в криволинейных координатах. Метрический тензор

Скалярное произведение двух векторов через контравариантные компоненты записывается следующим образом:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \left(a^i \boldsymbol{g}_i, b^j \boldsymbol{g}_j\right) = a^i \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right) b^j. \tag{1.8}$$

Скалярные произведения базисных векторов составляют матрицу Грамма. Соответствующую физическую величину

$$g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right) \tag{1.9}$$

называют *метрическим тензором*.

В общем случае понятие тензора является обобщением понятия вектора на случай с произвольным числом индексов. Величина является тензором, если её компоненты преобразуются в соответствии с правилами (1.6) и (1.7) при замене координат – то есть умножаются на матрицу перехода J по каждому нижнему индексу и на J^{-1} по каждому верхнему индексу. В частности для метрического тензора справедливо

$$G_{kp} = J^i{}_k J^j{}_p g_{ij}, \tag{1.10}$$

что следует непосредственно из его определения. Из определения также следует, что метрический тензор симметричен

$$g_{ij} = g_{ji}.$$

Скалярное произведение, таким образом

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = g_{ij} a^i b^j. \tag{1.11}$$

Чтобы избавиться от множителя g_{ij} в координатных записях скалярных произведений для записи векторов вводят вспомогательные величины

$$a_j = g_{ij} a^i, \tag{1.12}$$

которые называются *ковариантными компонентами* вектора $\boldsymbol{a}$, и обозначаются на письме нижними индексами.

При замене криволинейных координат ковариантные компоненты умножаются дважды на J (1.10) и один раз на J^{-1} (1.7), что даёт в результате

$$A_k = J^j{}_k a_j. \tag{1.13}$$

То есть ковариантные компоненты в соответствии с названием преобразуются тем же образом, что и базисные вектора (1.6).

С использованием ковариантных компонент скалярное произведение можно записать любым из двух способов:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_j b^j = b_j a^j. \tag{1.14}$$

Формула (1.12), определяющая ковариантные компоненты вектора через контравариантные, задаёт так называемое *правило опускания индексов*. Для *поднятия индексов*, т.е. выражения контравариантных компонент через ковариантные, последние нужно соответственно умножить на матрицу обратную g_{ij}, обозначаемую как g^{ij}:

$$a^i \stackrel{\text{def}}{=} g^{ij} a_j.$$

В соответствии с определением $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$, где δ_i^k – символ Кронекера (единичная матрица).

Также можно в явном виде получить связь ковариантных компонент с самим вектором $\boldsymbol{a}$. Соответствующее выражение находится домножением (1.4) скалярно на $\boldsymbol{g}_j$:

$$\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{g}_j\right) = a^i \left(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_j\right) = a^i g_{ij} = a_j. \tag{1.15}$$

1.3 Дифференцирование в криволинейных координатах. Символы Кристоффеля

Важным следствием локальности базиса $\boldsymbol{g}_i$ является возможность изменения координатных векторов при смещении рассматриваемой точки в пространстве, что необходимо учитывать при дифференцировании величин. Дифференциал произвольного вектора

$$d\boldsymbol{a} = d\left(a^j \boldsymbol{g}_j\right) = \left(da^j\right) \boldsymbol{g}_j + a^j \left(d\boldsymbol{g}_j\right). \tag{1.16}$$

Скалярное умножение обеих частей равенства на $\boldsymbol{g}_k$ с учётом (1.15) даёт

$$(d\boldsymbol{a})_k = \left(\boldsymbol{g}_k, \boldsymbol{g}_j\right) da^j + a^j \left(\boldsymbol{g}_k, d\boldsymbol{g}_j\right) = g_{kj} da^j + a^j \left(\boldsymbol{g}_k, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^i}\right) dq^i. \tag{1.17}$$

Скобки в обозначении $(d\boldsymbol{a})_k$ использованы для того, чтобы явно отличать компоненты дифференциала вектора от дифференциала компонент вектора, таких как $da^j = d\left(a^j\right)$.

> *Примечание:* Дифференциал вектора $d\boldsymbol{a}$ является вектором, в то время как da^j не являются его контравариантными компонентами (и компонентами какого-либо вектора вообще), о чем свидетельствует наличие второго слагаемого в (1.16).

Для скалярного произведения, появляющегося в (1.17), введём обозначение

$$\Gamma_{kij} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\boldsymbol{g}_k, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^i}\right).$$

Величины Γ_{kij} носят название *символов Кристоффеля*. Расписав частную производную через радиус-вектор точки

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j}, \tag{1.18}$$

можно провести аналогию с метрическим тензором:

$$g_{ki} = \left(\boldsymbol{g}_k, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}\right), \quad \Gamma_{kij} = \left(\boldsymbol{g}_k, \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial q^i \partial q^j}\right).$$

То есть символы Кристоффеля являются следующим членом некоторого ряда величин, описывающих искривлённость криволинейных координат, и определяются тем, как изменяется локальный базис при переходе от одной точки пространства к другой. Представленная форма записи также показывает, что символы Кристоффеля симметричны по двум последним индексам:

$$\Gamma_{kij} = \Gamma_{kji}.$$

Воспользовавшись этим свойством можно найти явное выражение символов Кристоффеля через производные компонент метрического тензора:

$$\Gamma_{kij} = \frac{\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji}}{2} = \frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{g}_k, \frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^i}\right) + \left(\boldsymbol{g}_k, \frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^j}\right)\right],$$

что с использованием дифференцирования по частям даёт

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial q^i}, \boldsymbol{g}_j\right) + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_k}{\partial q^j}, \boldsymbol{g}_i\right)\right].$$

В силу (1.18) у частных производных координатных векторов $\boldsymbol{g}_k$ по координатам индексы числителя и знаменателя могут быть переставлены местами:

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial q^k}, \boldsymbol{g}_j\right) - \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}_j}{\partial q^k}, \boldsymbol{g}_i\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right]. \tag{1.19}$$

Возвращаясь к выражению для дифференциала вектора (1.17), теперь можно записать

$$(d\boldsymbol{a})_k = g_{kj} da^j + \Gamma_{kij} a^j dq^i. \tag{1.20}$$

Подняв индекс умножением на g^{mk} и поделив всё выражение на дифференциал криволинейных координат dq^n, получим

$$\frac{(d\boldsymbol{a})^m}{dq^n} = \frac{g^{mk}(da)_k}{dq^n} = \frac{g^{mk} g_{kj} da^j}{dq^n} + g^{mk}\Gamma_{kij} a^j \frac{dq^i}{dq^n} = \frac{\delta^m_j da^j}{dq^n} + \Gamma^m{}_{ij} a^j \delta^i_n = \frac{da^m}{dq^n} + \Gamma^m{}_{nj} a^j. \tag{1.21}$$

Формальное поднятие индекса у символов Кристоффеля здесь использовано в качестве определения Γ с верхним первым индексом:

$$\Gamma^m{}_{ij} \overset{\text{def}}{=} g^{mk}\Gamma_{kij} = \frac{g^{mk}}{2}\left[\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right].$$

Если рассматриваемый вектор $\boldsymbol{a}$ зависит только от значений криволинейных координат (является элементом векторного поля), то производная в правой части (1.21) совпадает с частной производной компонент вектора:

$$da^m = \frac{\partial a^m}{\partial q^l} dq^l, \quad \frac{da^m}{dq^n} = \frac{\partial a^m}{\partial q^l}\frac{dq^l}{dq^n} = \frac{\partial a^m}{\partial q^l}\delta^l_n = \frac{\partial a^m}{\partial q^n}.$$

Производная в левой части (1.21) называется *ковариантной производной* и для краткости обозначается

$$a^i{}_{;k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(d\boldsymbol{a})^i}{dq^k} = \frac{\partial a^i}{\partial q^k} + \Gamma^i{}_{kj} a^j. \tag{1.22}$$

Ковариантная производная является обобщением градиента векторного поля на случай криволинейных координат. В отличие от частной производной, ковариантная производная является по построению тензором. То есть представляет собой некоторую физическую величину, объективно независящую от выбора координат, в которой она представлена. Например, частная производная может отличаться от нуля даже если вектор $\boldsymbol{a}$ постоянен, поскольку отдельные компоненты вектора изменяются с изменением базиса $\boldsymbol{g}_i$. В ковариантной производной этот эффект скомпенсирован слагаемым с символом Кристоффеля, и при $\boldsymbol{a} = const$ выполняется $a^i{}_{;k} = 0$, поскольку $d\boldsymbol{a} = 0$.

2 Кинематика

2.1 Скорость в криволинейных координатах

Разложение вектора скорости точки по локальному базису находится дифференцированием (1.1) по времени как сложной функции:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} = \boldsymbol{g}_i \dot{q}^i. \tag{2.1}$$

Точкой обозначена производная по времени. В соответствии с (1.4), контравариантные компоненты вектора скорости

$$v^i = \dot{q}^i. \tag{2.2}$$

2.2 Ускорение в криволинейных координатах

Для ускорения разложение удобнее искать в ковариантных компонентах. По определению

$$w_k = \left(\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right)_k = \frac{(d\boldsymbol{v})_k}{dt}.$$

Воспользовавшись соотношением (1.20) для вектора скорости, получим

$$w_k = g_{kj}\frac{dv^j}{dt} + \Gamma_{kij} v^j \frac{dq^i}{dt} = g_{kj}\frac{dv^j}{dt} + \Gamma_{kij} v^j v^i. \tag{2.3}$$

Из первого слагаемого выделим полный дифференциал, а во второе подставим выражения для символов Кристоффеля из (1.19):

$$\begin{aligned} w_k = \frac{d\left(g_{kj}v^j\right)}{dt} - v^j\frac{dg_{kj}}{dt} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right] v^j v^i = \\ = \frac{dv_k}{dt} - v^j \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}\frac{dq^i}{dt} + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} v^i v^j + \frac{1}{2}\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} v^j v^i - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} v^i v^j. \end{aligned} \tag{2.4}$$

В предпоследнем слагаемом здесь были переобозначены индексы суммирования. Слагаемые со второго по четвёртое дают в сумме ноль, поэтому

$$w_k = \frac{dv_k}{dt} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} v^i v^j. \tag{2.5}$$

В фазовом пространстве координаты q^i и скорости v^i являются функционально независимыми – значение каждой из них может быть изменено без изменения значений остальных переменных.

Примечание: Этот факт не стоит путать с наличием дифференциальной зависимости (2.2), которая выполняется для отдельных траекторий: на траекториях все величины являются явными функциями времени, а значит между q^i и v^i также существует неявная зависимость. Например, при невырожденности $q^1 = q^1(t)$ по теореме о неявной функции время может быть выражено как $t = t(q^1)$, поэтому существует связь вида

$$v^1 = v^1(t) = v^1\left(t\left(q^1\right)\right) = v^1\left(q^1\right).$$

В этом же состоит различие между полными и частными производными. Вычисление полной производной подразумевает наличие некоторой кривой в фазовом пространстве, позволяющей представить все величины как функции одного параметра. Во всех формулах, включая (2.1), (2.2) и (2.5), полная производная – это производная вдоль траектории точки. Частная же производная – это производная вдоль координатной линии переменной, по которой производится дифференцирование.

Таким образом, при рассмотрении всех величин как функций от (q^i, v^i, t) скорости в втором слагаемом (2.5) могут быть внесены под знак частной производной:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}v^i v^j = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(g_{ij}v^i v^j\right)}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right)}{\partial q^k} = \frac{\partial\left(v^2/2\right)}{\partial q^k}.$$

Аналогичным выражением может быть заменена и ковариантная компонента скорости в первом слагаемом (2.5), что демонстрирует следующая цепочка вычислений:

$$\frac{\partial\left(v^2/2\right)}{\partial v^k} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(g_{ij}v^i v^j\right)}{\partial v^k} = \frac{1}{2}g_{ij}\frac{\partial v^i}{\partial v^k}v^j + \frac{1}{2}g_{ij}v^i\frac{\partial v^j}{\partial v^k} = \frac{1}{2}g_{ij}\delta^i_k v^j + \frac{1}{2}g_{ij}v^i\delta^j_k = \frac{1}{2}g_{kj}v^j + \frac{1}{2}g_{ik}v^i = v_k.$$

В результате имеем общую формулу для вычисления ускорения в криволинейных координатах

$$w_k = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial\left(v^2/2\right)}{\partial v^k}\right] - \frac{\partial\left(v^2/2\right)}{\partial q^k}. \quad (2.6)$$

3 Задача о геодезических на гиперболоиде

Рассмотрим координаты (φ, h), задающие положение точки на гиперболоиде $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (Рис. 1), где h – высота над плоскостью xy, а φ – азимутальный угол. То есть радиус-вектор точки на поверхности в декартовой системе выражается столбцом

$$\mathbf{r}\left(\varphi, h\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{1+h^2}\cos\varphi \\ \sqrt{1+h^2}\sin\varphi \\ h \end{pmatrix}.$$

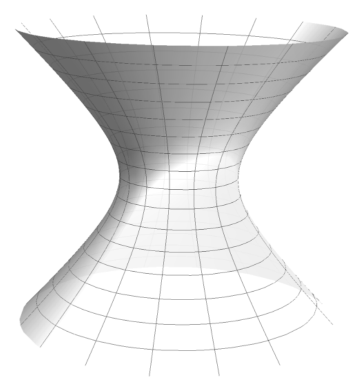

Рис. 1: Гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

В соответствии с (1.2), координатные вектора

$$\boldsymbol{g}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sqrt{1+h^2}\sin\varphi \\ \sqrt{1+h^2}\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{g}_h = \begin{pmatrix} h\left(1+h^2\right)^{-1/2}\cos\varphi \\ h\left(1+h^2\right)^{-1/2}\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Компоненты метрического тензора в соответствии с определением (1.9):

$$g_{\varphi\varphi} = 1 + h^2, \quad g_{\varphi h} = g_{h\varphi} = 0, \quad g_{hh} = \frac{1 + 2h^2}{1 + h^2}.$$

Тогда из (1.11) квадрат скорости с учётом (2.2):

$$v^2 = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = g_{ij} v^i v^j = \left(1 + h^2\right) \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{1 + 2h^2}{1 + h^2}\right) \dot{h}^2. \tag{3.1}$$

Примечание: Домножение (3.1) на dt^2 даёт

$$ds^2 = g_{ij} dq^i dq^j = \left(1 + h^2\right) d\varphi^2 + \left(\frac{1 + 2h^2}{1 + h^2}\right) dh^2. \tag{3.2}$$

То есть метрический тензор, в соответствии с названием, описывает, как в криволинейный координатах измеряются расстояния.

Компоненты ускорения в координатах (φ, h) из (2.6):

$$\begin{gathered} w_\varphi = \frac{d}{dt}\left[\left(1 + h^2\right)\dot{\varphi}\right], \\ w_h = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{1 + 2h^2}{1 + h^2}\right)\dot{h}\right] - h\dot{\varphi}^2 - \frac{h}{(1 + h^2)^2}\dot{h}^2. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Рассмотрим движение свободной точки по выбранной поверхности – то есть материальной точки, на которую не действуют никакие силы помимо сил нормальной реакции. Проекция ускорения на поверхность в таком случае должна равняться нулю, а значит

$$w_i = 0 \tag{3.4}$$

для всех криволинейных координат. Аналогично тому, как движение с нулевым ускорением соответствует движению по прямой – линии с минимальным расстоянием между любыми точками, через которые она проходит – можно показать, что движение с нулевой проекцией ускорения на поверхность также происходит вдоль линий с экстремальными значениями расстояний, измеряемых вдоль поверхности. Такие линии называются *геодезическими* и служат обобщением понятия прямой для искривлённых поверхностей и пространств. Геодезические обладают наименьшей кривизной, а вектор кривизны геодезических ортогонален поверхности, по которой они проходят.

Примечание: Общее уравнение геодезических в координатном виде можно получить из (2.3) поднятием индекса и подстановкой (2.2):

$$0 = \ddot{q}^m + \Gamma^m{}_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Эта запись справедлива и в случае, если вместо времени выбран какой-либо другой параметр, дифференцирование по которому соответствует обозначению точкой.

Найдём геодезические линии на рассматриваемом гиперболоиде, решив уравнения (3.4) в выбранных координатах:

$$\begin{cases} w_\varphi = 0, \\ w_h = 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Из этой системы в частности следует, что искомое движение является движением с постоянной по абсолютной величине скоростью. Причем значение скорости при движении по любой фиксированной геодезической может быть произвольным. Чтобы исключить данную неопределённость, добавим условие $v^2 = 1$, что соответствует поиску геодезических в натуральной параметризации ($dt = ds/v = ds$). Однако это условие делает одно из уравнений (3.5) избыточным, поскольку, например, из постоянства модуля скорости и $w_\varphi = 0$ следует, что и $w_h = 0$.[1] Система уравнений для поиска геодезических, таким образом, принимает вид:

$$\begin{cases} w_\varphi = 0, \\ v^2 = 1. \end{cases} \tag{3.6}$$

Первое уравнение, с учётом (3.3) даёт

$$\left(1 + h^2\right) \dot{\varphi} = C = const.$$

Из второго уравнения (3.6) и выражения для скорости (3.1):

$$\dot{h} = \sqrt{\frac{1 + h^2}{1 + 2h^2}\left[1 - (1 + h^2)\dot{\varphi}^2\right]} = \sqrt{\frac{1 + h^2}{1 + 2h^2}\left[1 - \frac{C^2}{1 + h^2}\right]} = \sqrt{\frac{(1 - C^2) + h^2}{1 + 2h^2}}.$$

Таким образом зависимость $h(\varphi)$ определяется дифференциальным уравнением:

$$h' = \frac{dh}{d\varphi} = \frac{\dot{h}}{\dot{\varphi}} = \frac{(1 + h^2)\dot{h}}{C} = \frac{(1 + h^2)}{C}\sqrt{\frac{(1 - C^2) + h^2}{1 + 2h^2}}. \tag{3.7}$$

Найденное соотношение полностью определяет семейство геодезических на гиперболоиде. Это семейство является двухпараметрическим, где первый параметр – константа C, а второй параметр – константа интегрирования, появляющаяся при решении дифференциального уравнения первого порядка.

В общем случае решение (3.7) имеет довольно сложный вид, поэтому дальше ограничимся только парой частных случаев с определёнными значениями константы C. Будем рассматривать геодезические, выходящие из точки $h = 0$, $\varphi = 0$, поскольку все остальные получаются из них поворотом по φ. В терминах функции $h(\varphi)$ это соответствует начальному условию $h(0) = 0$.

1. $C = 1$:

   В этом случае уравнение (3.7) сводится к

   $$h' = |h|\frac{(1 + h^2)}{\sqrt{1 + 2h^2}}.$$

   Решением для выбранных начальных условий будет траектория

   $$h(\varphi) = 0, \tag{3.8}$$

   представляющая собой окружность на пересечении гиперболоида и плоскости xy.

[1] Строго говоря, это не совсем так. Из постоянства модуля скорости следует, что тангенциальное ускорение $w_\tau \propto (\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = w_i v^i = 0$. Условия равенства нулю всех ускорений кроме одного приводят к $w_h v^h = 0$ и, следовательно, $w_h \dot{h} = 0$. Таким образом система (3.6) помимо геодезических ($w_h = 0$) в качестве решений может включать и движение вдоль координатных линий ($\dot{h} = 0$, $h = const$). Поэтому при получении ответа в виде $h = const$ его нужно дополнительно проверить на соответствие уравнению $w_h = 0$. Для (3.8) после подстановки в (3.3) легко видеть, что это условие действительно выполняется.

2. $C = 1/\sqrt{2}$:

   Уравнение для $h(\varphi)$:
$$h' = (1 + h^2). \tag{3.9}$$

   После разделения переменных несложно найти, что $\varphi = \operatorname{arctg} h$, или
$$h = \operatorname{tg} \varphi. \tag{3.10}$$

   В декартовой системе координат это соответствует траектории
$$x = 1, \quad y = z = \operatorname{tg} \varphi.$$

   То есть найденная геодезическая является прямолинейной образующей гиперболоида.

Представление о других геодезических гиперболоида, выходящих из точки $(0, 0)$, даёт рисунок 2.

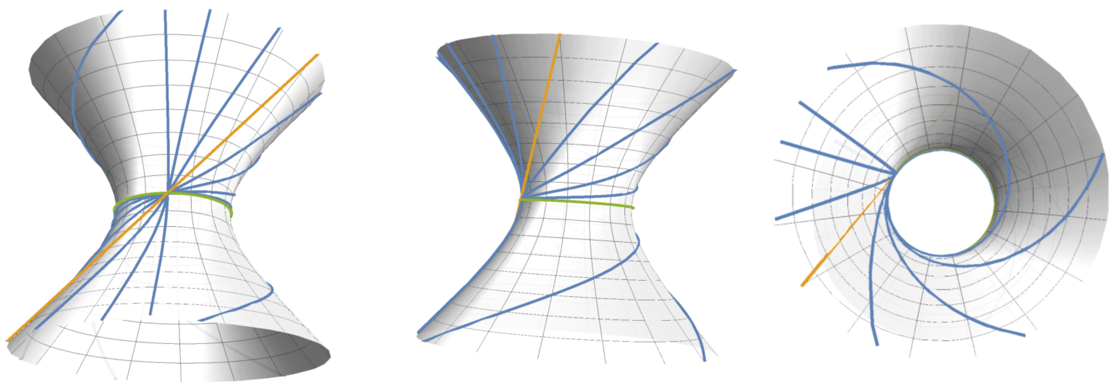

Рис. 2: Геодезические на гиперболоиде: прямолинейная образующая и круговая параллель выделены оранжевым и зелёным цветами соответственно

4 Релятивистское движение в центральном поле

4.1 Метрика Шварцшильда

Среди всех фундаментальных взаимодействий гравитация выделяется тем, что для неё роль заряда играет масса материальной точки. Ускорение точки, создаваемое гравитацией в соответствии со вторым законом Ньютона, поэтому не зависит от массы и определяется только текущим положением и (в релятивистском случае) скоростью. Такое свойство характерно для сил нормальной реакции. Например, при равномерном движении по окружности, которое обеспечивается куском нерастяжимой нити, ускорение определяется исключительно скоростью материальной точки. Сила натяжения нити при этом “подстраивается” таким образом, чтобы обеспечить соответствующее ускорение независимо от массы. Аналогично в задаче из предыдущей части ускорение точки определяется только направлением её движения и положением на гиперболоиде. Таким образом, если принять *принцип эквивалентности*, состоящий в том, что массы в законе тяготения и аксиомах динамики – это действительно одна и та же величина, влияние гравитации вместо силы притяжения можно моделировать движением по искривлённым поверхностям.

В специальной теории относительности исходя из *принципа относительности Эйнштейна* показано, что искривление пространства всегда должно быть согласовано с искривлением времени (преобразования Лоренца). Объединение принципа эквивалентности и принципа относительности Эйнштейна в общей теории относительности позволяет описывать гравитационные поля в терминах искривления пространства-времени как некоторой четырёхмерной поверхности. Искривление, создаваемое точечным телом массы M (или сферически симметричным телом за его пределами), описывается метрикой Шварцшильда, в которой расстояние между точками задаётся выражением

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a}{r}\right) d\tau^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} dr^2 - (r \sin\theta)^2 \, d\varphi^2 - r^2 d\theta^2.$$

Здесь τ – временная координата, (r, φ, θ) – сферические координаты в пространстве, параметр $a = 2GM$, а скорость света c положена равной единице. Как можно видеть, метрический тензор в данном случае диагональный.

4.2 Движение материальной точки

В отсутствие сторонних сил движение материальной точки в гравитационном поле является свободным, то есть описывается уравнениями (3.4) и происходит вдоль геодезических искривлённого пространства-времени. Запишем уравнения движения в центральном поле, задаваемом метрикой Шварцшильда. Аналогично предыдущей задаче с гиперболоидом заменим одно из уравнений условием постоянства скорости:

$$\begin{cases} v^2 = (ds/dt)^2 = 1, \\ w_\tau = 0, \\ w_\varphi = 0, \\ w_\theta = 0. \end{cases}$$

Важно отметить, что переменная t, использовавшаяся ранее в формулах для скорости и ускорения, включая (2.1) и (2.6), здесь теряет смысл времени и является просто некоторым параметром, изменяющимся вдоль траекторий[2]. В свою очередь физическое время τ представляет собой четвёртую "пространственную" координату.

Из третьего уравнения $w_\theta = -r^2\dot{v}^\theta - 2rv^r v^\theta + r^2 \sin\theta \cos\theta \, (v^\varphi)^2 = 0$ следует, что при $\cos\theta = 0$ и $v^\theta = \dot{\theta} = 0$ вторая производная $\ddot{\theta} = \dot{v}^\theta = 0$. Таким образом, если начальное положение точки и начальное направление движения лежат в плоскости $\theta = \pi/2$ (то есть $\theta(0) = \pi/2$ и $\dot{\theta}(0) = 0$), то и вся дальнейшая траектория лежит в плоскости $\theta = \pi/2$. Выполнения этих условий всегда можно добиться выбором соответствующей ориентации сферических координат, поэтому, как и для классического движения в центральном поле, в метрике Шварцшильда все траектории являются плоскими. Система уравнений, таким образом, сводится к следующей:

$$\begin{cases} v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau}^2 - \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2 = 1, \\ w_\tau = \frac{d}{dt}\left[\left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau}\right] = 0, \\ w_\varphi = -\frac{d}{dt}\left(r^2 \dot{\varphi}\right) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Из второго и третьего уравнений сразу следует, что

$$\begin{gathered} r^2 \dot{\varphi} = C = const, \\ \left(1 - \frac{a}{r}\right) \dot{\tau} = D = const. \end{gathered} \tag{4.2}$$

[2]использование условия $v^2 = 1$ означает, что для искомых кривых t будет натуральным параметром

Подстановка в первое уравнение даёт

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1} D^2-\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2-C^2/r^2=1.$$

Используя замену Бине

$$r=1/u, \quad \dot{r}=r'\dot{\varphi}=(1/u)'Cu^2=-u'C,$$

где штрихом обозначены производные по φ, задачу можно свести к поиску функции $u(\varphi)$:

$$(1-au)^{-1} D^2-(1-au)^{-1} C^2 \left(u'\right)^2-C^2u^2=1.$$

Умножая на $(au-1)$ и дифференцируя по φ, находим

$$2C^2u''u'+C^2\left(2u-3au^2\right)u'=au'.$$

Поделив на $2C^2u'$ и перенеся одно из слагаемых в правую часть, получаем окончательное уравнение траекторий:

$$u''+u=\frac{a}{2C^2}+\frac{3}{2}au^2. \tag{4.3}$$

Сравнивая полученную формулу с уравнением Бине для движения в центральном поле, можно заметить, что траектории в пространстве с метрикой Шварцшильда эквивалентны траекториям при движении точки единичной массы в центральном поле с силой

$$F(r)=-\frac{a}{2r^2}+\frac{3aC^2}{2r^4}=-\frac{GM}{r^2}\left(1+\frac{3C^2}{r^2}\right). \tag{4.4}$$

В отличие от классического центрального поля, сила F здесь зависит также и от орбитального момента импульса (секторной скорости), определяемого константой C. При движении на достаточном удалении от центра притяжения ($r \gg a$) со скоростями много меньшими скорости света ($\mathrm{C}/r=rd\varphi/dt \approx rd\varphi/d\tau \ll 1$) вторыми слагаемыми в (4.4) и правой части (4.3) можно пренебречь. Тогда сила $F(r)$ тождественна силе Ньютоновского притяжения, и траекториями будут известные эллипсы, параболы и гиперболы.

Влияние релятивистского слагаемого приводит к тому, что тела в поле тяжести движутся по траекториям отличным от предсказываемых первым законом Кеплера. И хотя отклонения от точных кеплеровских траекторий, как правило, очень малы, их можно наблюдать в движении реальных объектов. Одним из известных примеров этого является прецессия орбиты Меркурия.