

УДК 517.977.1

К. О. Железнов¹, М. В. Хлебников²¹Московский физико-технический институт (государственный университет)² Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН

Применение метода инвариантных эллипсоидов для решения линейной задачи слежения

В работе рассматривается линейная задача слежения, состоящая в построении линейной обратной связи такой, чтобы выход системы был «как можно ближе» к сигналу, подаваемому на вход линейной системы управления. Предлагается подход к решению задачи, основанный на методе инвариантных эллипсоидов. Его эффективность продемонстрирована на примере двухмассовой системы.

Ключевые слова: линейная система управления, задача слежения, линейные матричные неравенства, инвариантные эллипсоиды, ограничивающие эллипсоиды.

1. Введение

Целью работы является исследование задачи управления регулируемым выходом линейной системы в одной из разнообразных постановок задачи слежения (см., например, [1–3]), одна из первых постановок этой задачи восходит к Р. Калману [4].

В работе рассматривается задача слежения в линейной системе управления. Цель управления (которое ищется в виде статической линейной обратной связи) состоит в том, чтобы регулируемый выход системы был как можно «ближе» (в некотором смысле) к сигналу, подаваемому на вход системы.

Предлагаемый подход к решению задачи основан на методе инвариантных эллипсоидов [5]; в качестве технического средства используется техника линейных матричных неравенств (Linear Matrix Inequalities, LMI) [6]. Такой подход позволил переформулировать исходную задачу к поиску минимального ограничивающего эллипсоида, содержащего выход рассматриваемой системы. В качестве критерия минимальности в работе выбран критерий следа, соответствующий минимизации суммы квадратов полуосей эллипсоида.

С технической точки зрения проблема сводится к решению задачи полуопределенного программирования (Semi-Definite Programming, SDP) и одномерной оптимизации [7]. Для ее решения существуют эффективные программные средства, в частности — свободно расширяемые пакеты SeDuMi и YALMIP на базе системы Matlab.

Эффективность метода продемонстрирована на примере управления двухмассовой системой [8].

2. Задача анализа

Рассмотрим линейную непрерывную динамическую систему

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Df(t), & x(0) &= x_0, \\ z &= f(t) - Cx,\end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход системы. Пусть матрица A устойчива, а сигнал $f(t) \in \mathbb{R}^l$ удовлетворяет условию

$$\dot{f} = A_0 f + D_0 w, \quad (1)$$

где $A_0 \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $D_0 \in \mathbb{R}^{l \times m}$, а $w(t) \in \mathbb{R}^m$ — внешнее возмущение, удовлетворяющее ограничению

$$\|w(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0. \quad (2)$$

Матрицу A_0 будем предполагать устойчивой (гурвицевой).

Рассмотрим расширенную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Df, \\ \dot{f} &= A_0f + D_0w, \\ z &= f - Cx. \end{aligned} \quad (3)$$

Введя в рассмотрение составной вектор

$$g = \begin{pmatrix} x \\ f \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+l},$$

представим систему в матричной форме:

$$\begin{aligned} \dot{g} &= \underbrace{\begin{pmatrix} A & D \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} g + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}}_{\tilde{D}} w, \\ z &= \underbrace{\begin{pmatrix} -C & I \end{pmatrix}}_{\tilde{C}} g. \end{aligned} \quad (4)$$

Нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_x = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T P^{-1} x \leq 1\}, \quad P > 0, \quad (5)$$

называется *инвариантным для динамической системы* $\dot{x} = Ax + Dw$, если из условия $x(0) \in \mathcal{E}_x$ следует $x(t) \in \mathcal{E}_x$ для всех моментов времени $t \geq 0$. Это означает, что фазовое состояние системы будет всегда находиться в \mathcal{E}_x , если оно находится в этом эллипсоиде в начальный момент времени.

В дальнейшем все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

Определение 2. Эллипсоид с центром в начале координат

$$\mathcal{E}_z = \{z \in \mathbb{R}^l : z^T (CPC^T)^{-1} z \leq 1\}, \quad P > 0,$$

называется *ограничивающим по выходу для динамической системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Dw, \quad x(0) = x_0, \\ z &= Cx, \end{aligned}$$

соответствующим инвариантному эллипсоиду (5). Соответственно если состояние x_0 принадлежит инвариантному эллипсоиду с матрицей P , то выход системы $z(t)$ будет находиться в эллипсоиде \mathcal{E}_z для всех $t \geq 0$.

Теперь можно переформулировать задачу: будем минимизировать ограничивающий эллипсоид, содержащий выход z системы (4).

Теорема 1. Решение \hat{P} задачи

$$\text{tr} \tilde{C} P \tilde{C}^T \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\tilde{A} P + P \tilde{A}^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} \tilde{D} \tilde{D}^T \leq 0, \quad P > 0,$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = (-C \quad I),$$

а минимизация проводится по матричной переменной $P = P^T \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}$ и скалярному параметру $\alpha > 0$, определяет матрицу

$$\tilde{C}P\tilde{C}^T$$

ограничивающего эллипсоида для выхода z системы (3).

Доказательство. Введем в рассмотрение квадратичную форму

$$V(g) = g^T Q g, \quad Q > 0,$$

построенную на решениях системы (4). Вычисляя ее производную в силу системы, имеем

$$\dot{V}(g) = (\tilde{A}g + \tilde{D}w)^T Q g + g^T Q (\tilde{A}g + \tilde{D}w) = g^T (\tilde{A}^T Q + Q \tilde{A}) g + 2g^T Q \tilde{D}w.$$

Для того чтобы траектории системы не вышли за границу эллипсоида $\mathcal{E}_g = \{g: g^T Q g \leq 1\}$, потребуем, чтобы при $V(g) \geq 1$ и $w^T w \leq 1$ выполнялось условие $\dot{V}(g) \leq 0$. Иными словами,

$$g^T (\tilde{A}^T Q + Q \tilde{A}) g + 2w^T \tilde{D}^T Q g \leq 0 \quad \forall (g, w): \quad g^T Q g \geq 1, \quad w^T w \leq 1. \quad (6)$$

Применяя S -теорему [9] с двумя ограничениями, заключаем, что (6) эквивалентно выполнению следующего матричного неравенства при некоторых значениях α, β таких, что $\alpha \geq \beta \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^T Q + Q \tilde{A} + \alpha Q & Q \tilde{D} \\ \tilde{D}^T Q & -\beta I \end{pmatrix} \leq 0.$$

По лемме Шура полученное линейное матричное неравенство эквивалентно

$$\tilde{A}^T Q + Q \tilde{A} + \alpha Q + \frac{1}{\beta} Q \tilde{D} \tilde{D}^T Q \leq 0. \quad (7)$$

Домножив (7) на матрицу $P = Q^{-1}$ слева и справа, приходим к матричному неравенству

$$\tilde{A}P + P\tilde{A}^T + \alpha P + \frac{1}{\beta} \tilde{D} \tilde{D}^T \leq 0;$$

при этом, согласно [10], можно положить $\beta = \beta_{\max} = \alpha$.

Выбирая среди эллипсоидов полученного семейства

$$\tilde{A}P + P\tilde{A}^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} \tilde{D} \tilde{D}^T \leq 0$$

эллипсоид $P > 0$ такой, что соответствующий ему ограничивающий эллипсоид с матрицей $\tilde{C}P\tilde{C}^T$ обладает минимальным следом, приходим к утверждению теоремы. Теорема доказана. ■

Заметим, что $V(g)$ является квадратичной функцией Ляпунова для системы (4) вне инвариантного эллипсоида с матрицей P .

3. Задача синтеза

Рассмотрим линейную непрерывную систему управления:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Df(t), & x(0) &= x_0, \\ z &= f(t) - Cx, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times l}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — фазовое состояние системы, $u(t) \in \mathbb{R}^p$ — управление, $z(t) \in \mathbb{R}^l$ — выход системы. Пусть сигнал $f(t) \in \mathbb{R}^l$ удовлетворяет условиям (1), (2).

Задача состоит в построении регулятора K в форме статической линейной обратной связи по состоянию

$$u = K_1 x + K_2 f, \quad (8)$$

где $K_1 \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $K_2 \in \mathbb{R}^{p \times l}$, который стабилизирует замкнутую систему и минимизирует (по критерию следа) ограничивающий эллипсоид для выхода z . Будем предполагать, что текущее значение сигнала $f(t)$ известно, и поэтому можно его использовать для построения обратной связи.

Рассмотрим расширенную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Df, \\ \dot{f} &= A_0 f + D_0 w, \\ z &= f(t) - Cx, \end{aligned} \quad (9)$$

или, в виде, замкнутом регулятором (8),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + BK_1)x + (BK_2 + D)f, \\ \dot{f} &= A_0 f + D_0 w, \\ z &= f - Cx. \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) представима относительно вектора g в следующем матричном виде:

$$\dot{g} = \underbrace{\begin{pmatrix} A + BK_1 & D + BK_2 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} g + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}}_{\tilde{D}} w.$$

В следующей теореме устанавливается способ нахождения искомого регулятора для рассматриваемой системы, а также соответствующий ограничивающий эллипсоид.

Теорема 2. Решение $\hat{P} > 0$, \hat{Y} задачи минимизации

$$\text{tr} \tilde{C} P \tilde{C}^T \rightarrow \min$$

при ограничении

$$\tilde{A} P + P \tilde{A}^T + \alpha P + \tilde{B} Y + Y^T \tilde{B}^T + \frac{1}{\alpha} \tilde{D} \tilde{D}^T \leq 0, \quad (11)$$

где

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix},$$

а минимизация проводится по матричным переменным $P = P^T \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$, $Y \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$ и скалярному параметру $\alpha > 0$, определяет статический регулятор по состоянию

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{K}_1 & \hat{K}_2 \end{pmatrix} = \hat{Y} \hat{P}^{-1}$$

и матрицу

$$\tilde{C} \hat{P} \tilde{C}^T$$

соответствующего ограничивающего эллипсоида для выхода системы (9).

Доказательство. Применяя теорему 1 к замкнутой системе, приходим к задаче минимизации

$$\text{tr} \tilde{C} P \tilde{C}^T \rightarrow \min$$

при ограничении

$$\begin{pmatrix} A + BK_1 & D + BK_2 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} P + P \begin{pmatrix} A + BK_1 & D + BK_2 \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}^T + \alpha P + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}^T \leq 0,$$

которое представимо в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & A_0 \end{pmatrix} P + P \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & A_0 \end{pmatrix}^T + \alpha P + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} (K_1 \quad K_2) P + \\ + P (K_1 \quad K_2)^T \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}^T + \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ D_0 \end{pmatrix}^T \leq 0. \quad (12) \end{aligned}$$

В матричное неравенство (12) переменные P , K_1 и K_2 входят нелинейно. Введя матричную переменную

$$Y = (K_1 \quad K_2) P,$$

неравенство (12) примет линейный (по переменным P и Y) вид (11). Теорема доказана. ■

4. Пример: двухмассовая система

Продemonстрируем предложенный подход к решению задачи слежения на примере двухмассовой системы [8] (см. рис. 1).

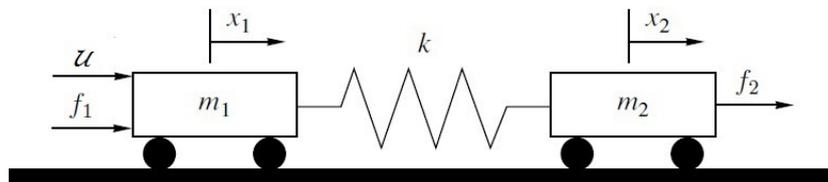


Рис. 1. Двухмассовая система

Обозначим через x_1 , v_1 координату и скорость левого тела, а через x_2 , v_2 — координату и скорость правого тела. Тогда

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ x_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

есть вектор фазового состояния динамической системы. Пусть к левому телу приложено управляющее воздействие u , а задающий сигнал с компонентами f_1 и f_2 воздействует на каждое из тел.

Непрерывная модель возмущенных колебаний системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= v_1, \\ \dot{x}_2 &= v_2, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{k}{m_1} x_1 + \frac{k}{m_2} x_2 + \frac{1}{m_1} f_1 + u, \\ \dot{v}_2 &= \frac{k}{m_1} x_1 - \frac{k}{m_2} x_2 + \frac{1}{m_2} f_2. \end{aligned}$$

Будем считать массы тел и коэффициент упругости пружины единичными. Тогда в матричной форме имеем

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Df, \\ z &= f - Cx, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а в качестве матрицы выхода выбрана

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При

$$A_0 = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{pmatrix}, \quad D_0 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$$

с помощью теоремы 2 найдем ограничивающий эллипс выхода и соответствующий регулятор.

Заметим, что естественно потребовать ограничения на величину управления вида

$$\|u(t)\| \leq \mu \quad \forall t \geq 0. \quad (13)$$

Достаточное условие выполнения ограничения (13) установлено следующей леммой.

Лемма 1 ([11]). Условие

$$\begin{pmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{pmatrix} \geq 0$$

гарантирует выполнение условия (13) внутри инвариантного эллипсоида с матрицей P .

Это условие добавляется в качестве дополнительного ограничения в формулировку теоремы 2.

Итак, полагая

$$\mu = 5,$$

находим регулятор

$$\hat{K} = \left(\underbrace{-31,3569 \quad -17,3058 \quad 9,4955 \quad -17,2320}_{\hat{K}_1} \quad \underbrace{26,2767 \quad 9,5308}_{\hat{K}_2} \right)$$

и матрицу ограничивающего эллипса:

$$\tilde{C}\hat{P}\tilde{C}^T = \begin{pmatrix} 0,3044 & -0,1383 \\ -0,1383 & 0,6609 \end{pmatrix},$$

при этом $\text{tr} \tilde{C}\hat{P}\tilde{C}^T = 0,9653$.

На рис. 2 слева показан найденный ограничивающий эллипс выхода, а также траектория выхода системы при некотором начальном состоянии системы вне инвариантного эллипсоида и возмущении $w(t) = \text{sign} \sin t$; справа показан соответствующий график управляющего воздействия.

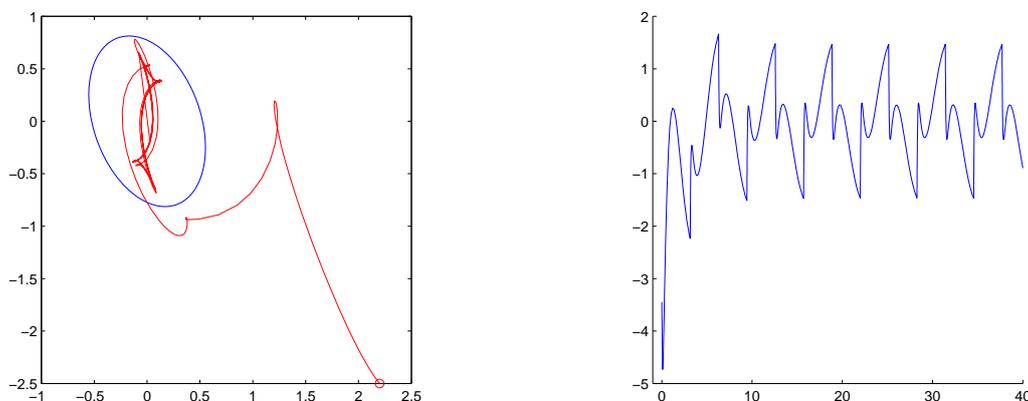


Рис. 2. Ограничивающий эллипс выхода, траектория выхода системы и управление

Заметим, что, не используя информацию о текущем значении сигнала $f(t)$ (то есть при $K_2 = 0$), получим регулятор, который также стабилизирует систему (9); однако при этом ограничивающий эллипсоид окажется примерно в 6 раз больше по критерию следа.

5. Заключение

В статье предложен подход к построению обратной связи в одной из постановок линейной задачи слежения. Подход основан на методе инвариантных эллипсоидов, применение которого позволило переформулировать исходную проблему в терминах линейных матричных неравенств и свести поиск ограничивающего эллипсоида для выхода системы к задаче полуопределенного программирования, легко решаемой численно. Эффективность метода продемонстрирована на примере двухмассовой системы.

Литература

1. *Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб.: Наука, 2000.
2. *Краснова С. А.* Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. — М.: Наука, 2006.
3. *Ахобадзе А. Г., Краснова С. А.* Задача слежения в линейных многомерных системах при наличии внешних возмущений // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 6. — С. 21–47.
4. *Kalman R.* Contributions to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. — 1960. — N 1. — P. 102–119.
5. *Хлебников М. В., Поляк Б. Т., Кунцевич В. М.* Оптимизация линейных систем при ограниченных внешних возмущениях (техника инвариантных эллипсоидов) // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 11. — С. 9–59.
6. *Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V.* Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. — Philadelphia: SIAM, 1994.
7. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
8. *Reinelt W.* Robust control of a two-mass-spring system subject to its input constraints // Proc. American Control Conference. — Chicago, USA, June 28–30, 2000. — P. 1817–1821.
9. *Polyak B. T.* Convexity of quadratic transformations and its use in control and optimization // Journ. Optim. Theory and Appl. — 1998. — V. 99. — P. 533–583.
10. *Хлебников М. В.* Время установления в линейной динамической системе с ограниченными внешними возмущениями // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 6. — С. 3–17.
11. *Назин С. А., Поляк Б. Т., Топунов М. В.* Подавление ограниченных возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 3. — С. 106–125.

Поступила в редакцию 24.11.2012.