УДК 519.86

А. А. Жукова, И. Г. Поспелов

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

Исследование стохастической модели сбережений с инерционностью потребления

В данной работе техника, развитая в исследовании [3], применена к анализу стохастической модели оптимального потребления при переменном доходе и дополнительном предположении о динамике активов (так называемыми ограничениями ликвидности). Были рассмотрены постановки задачи с различными формами ограничения ликвидности в виде штрафа в максимизируемом функционале. Последняя форма особенно удобна для расчетов макроэкономических моделей межвременного равновесия и поэтому внимание сосредоточено на поиске штрафа, который имел бы удобную для расчетов и анализа форму и заменял прямое ограничение. Для различных типов штрафов выведены конечные уравнения, определяющие решение задачи, которые затем исследованы методом характеристик. Показано, что, как и в предыдущей задаче, решение имеет особый режим вблизи горизонта планирования.

Ключевые слова: оптимальное управление, фазовое ограничение, марковское управление.

1. Введение

В современных математических моделях экономики часто предполагают инерционность потребления, цен, и т.п. [1], [2], [5]. Обычно решения находятся несколько неформально. Мы делаем попытку формального анализа задачи агента в такой модели. Основой служит модель не вполне ликвидного товара с конечным горизонтом планирования.

Подход к исследованию такой задачи был предложен в работе [3] при бесконечном горизонте планирования экономических агентов. Мы применили этот подход к моделям, использующим идею Calvo [2], с конечным горизонтом планирования [6]. Анализ модели поведения агента основан на применении достаточных условий оптимальности к задаче агента. В результате обнаружен переходный режим, так называемый пограничный слой, в окрестности конца интервала планирования. Также переходный режим возникает при выравнивании рыночных показателей доходности активов. Эти режимы исследованы с помощью метода возмущений путем нормировки переменной времени [4].

2. Модель

Модель описывает оптимальное поведение потребителя, который получает доход и может тратить его на потребление. Агент выбирает план потребления на некоторый период и не пересматривает его в течение этого периода. Следующий момент пересмотра может быть случаен по различным причинам, среди которых существенные транзакционные издержки, асимметрия информации, издержки поиска и другие. В итоге достаточно реалистично предполагать, что агент решает проблему выбора потребления для каждого возможного случайного момента времени в зависимости от его возможностей в этот момент, так называемое, марковское управление.

При выборе стратегии агент исходит из оценки полезности потребления в данный момент и в последующие, оцененные с некоторым дисконтом. В данной работе мы предполагаем, что моментальная полезность потребления описывается CRRA-функцией, а дисконтирование экспоненциальное.

Случайные моменты возможности пересмотра потребления образуют поток $\eta_{0..T}$. Горизонт планирования T – конечный. В статье [3] приведен анализ аналогичной задачи на бесконечном интервале планирования, а в работе [6] та же задача рассмотрена при конечном горизонте планирования. Обнаружено, что с этим связаны некоторые краевые эффекты на конце интервала планирования. То же самое наблюдается и в модели, представленной в данной работе. Близость моделей позволяет заключить то, что модель на бесконечном горизонте планирования в обоих случаях исследуется сходным образом.

Агент не обязан тратить весь получаемый доход на текущее потребление. Он может откладывать средства в виде остатков денег. Возможность займа мы не рассматриваем, поэтому предполагается, что остатки денег всегда неотрицательны. Попытки рассматривать модель с явным неравенством на остатки денег показали, что в результате накладываются слишком жесткие ограничения на возможные управления. Поэтому в данной работе мы вводим ограничения в виде штрафа на отрицательные значения остатков денег. Значения внутри интервала планирования штрафуются функцией, отличной от штрафа в конечный момент. Эти две функции штрафа имеют связь, которая будет продемонстрирована далее в данной работе в процессе анализа модели.

3. Задача агента

Индивид стремится максимизировать ожидаемую полезность будущего потребления с учетом случайности потока $\eta_{0..T}$ возможных моментов смены потребления:

$$E_{\eta_{0..T}}\left\{\int\limits_0^T \left(U\left(C(\eta_{0..t})\right) - V\left(A(\eta_{0..t})\right)\right)e^{-\delta\, t}dt + e^{-\delta\, T}W\left(A(\eta_{0..T})\right)\right\}, \tag{1}$$

при ограничениях динамики потребления

$$dC(t) = \left(N(t)\ - C(t)\right)d\eta, \tag{2}$$

$$dA(t) = \left(Y(t)\ - C(t)\right)dt, \tag{3}$$

с заданными начальными условиями

$$A(0) = A_0,\ C(0) = C_0.$$

Имеется в виду, что непрерывный автономный процесс изменения запаса денег $A\,(t)$ за счет поступления дохода $Y(t)$ и затрат на потребление $C(t)$ прерывается пуассоновским потоком моментов пересмотра потребления. В момент τ потока η потребление $C(t)$ можно скачком изменить на величину

$$C(\tau+0) = C(\tau) + \left(N(\tau) - C(\tau)\right) = N(\tau),$$

где $N(t)$ – новый уровень потребления. Фазовые ограничения учитываются как штрафы в функционале полезности (1). Функция $V(\cdot)$ описывает штраф на значения остатков денег $A\,(t)$ внутри интервала планирования, а функция $W(\cdot)$ – на его терминальное значение.

В данной модели агент выбирает величину $N(t)$ – новый уровень потребления, при условии, что t – это возможный момент смены потребления.

Считая, что перерыв между возможными сменами потребления не зависит от состояния агента и уже прошедшим временем ожидания, формально процесс моментов смены потребления описывается пуассоновским потоком $\eta(t)$ с частотой Λ. Реализации этого процесса считаем непрерывными слева. Связанный с процессом $\eta\,(\cdot)$ поток сигма-алгебр обозначаем через $\varepsilon\{t\}_{t>0}$, а естественную меру на $\varepsilon\{t\}_{t>0}$ – через H. Все встречающиеся далее операторы ожидания являются интегралами по этой мере. Назовем неупреждающим управлением $N\,(t) \in \mathbb{R}^1$ процесс, измеримый относительно $\varepsilon\{t\}_{t>0}$ с непрерывными слева реализациями, ограниченными на каждом конечном интервале:

$$N(t) = N(t-0), N(t) = E_{\eta[t,T]}\left\{N(t)\right\}.$$

Формально все вышесказанное о процессе $\eta(t)$ означает, что

$$d\eta(t) = \sum_{\tau_k \geqslant 0} \delta(t - \tau_k)\, dt,$$

где $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, а τ_k – случайные моменты смены потребления. Таким образом, можно рассматривать решение уравнения (2) как непрерывную слева кусочно-постоянную случайную функцию, значения которой в точках разрыва доопределены пределом слева. По построению такое решение будет неупреждающим процессом,

$$C(t) = C(t-0),\ C(t) = E_{\eta[t,T]}(C(t)).$$

Решение уравнения (3) – непрерывная функция.

Функция полезности $U(\cdot)$ в функционале (1) является CRRA-функцией с постоянным относительным отвращением к риску, то есть логарифмом или степенной функцией вида

$$U(C) = \frac{C^\gamma - 1}{\gamma}, \gamma \in (0,1)\ .$$

В силу этого потребление $C(t)$ имеет естественное ограничение снизу, так как $\lim\limits_{C\to 0} U'(C) = \infty$.

3.1. Условия оптимальности в форме Лагранжа

Оптимизационную задачу агента можно исследовать с помощью техники, предложенной в статье [3]. Обозначим через $\tilde{\omega}(t)$, $\tilde{\xi}(t)$ знаконеопределенные множители Лагранжа к ограничениям-равенствам (1.2),(1.3). Тогда функционал Лагранжа для задачи потребителя формально имеет вид

$$\mathcal{L}_{\left[\tilde{\xi}(\cdot),\tilde{\omega}(\cdot)\right]}\left[N(\cdot),A(\cdot),C(\cdot)\right] =$$

$$= E\left\{\int_0^T \left[\begin{array}{l}(U(C(t)) - V(A(t)))\,e^{-\delta\, t}dt + ((Y(t)-C(t))\,dt - dA(t))\,\tilde{\xi}(t) + \\ + ((N(t)-C(t))\,d\eta(t) - dC(t))\,\tilde{\omega}(t)\end{array}\right] - \right.$$

$$\left. - W(A(T))\,e^{-\delta T}\right\}.$$

После интегрирования по частям

$$\mathcal{L}_{\left[\tilde{\xi}(\cdot),\tilde{\omega}(\cdot)\right]}\left[N(\cdot),A(\cdot),C(\cdot)\right] =$$

$$= E\left\{\int_0^T \left[\begin{array}{l}(U(C(t)) - V(A(t)))\,e^{-\delta\, t}dt + (Y(t) - C(t))\,\tilde{\xi}(t)dt + A(t)d\tilde{\xi}(t) + \\ + ((N(t)-C(t))\,d\eta(t))\,\tilde{\omega}(t) + C(t)d\tilde{\omega}(t)\end{array}\right] + \right.$$

$$\left. + A(0)\tilde{\xi}(0) - A(T)\tilde{\xi}(T) + C(0)\tilde{\omega}(0) - C(T)\tilde{\omega}(T) - W(A(T))\,e^{-\delta T}\right\}.$$

Этот функционал вогнутый и гладкий по $N(\cdot), A(\cdot), C(\cdot)$, поэтому для того, чтобы найти его максимум, необходимо и достаточно, чтобы в точке $\hat{N}_\eta(\cdot), \hat{A}_\eta(\cdot), \hat{C}_\eta(\cdot)$ обращались в 0 производные по всем направлениям во множестве неупреждающих процессов с реализациями в подпространстве непрерывных слева функций пространства кусочно-непрерывных на [0,T] функций (с учетом начальных условий). Вариации соответствуют реализациям процесса η без учета возможности совпадения скачка η с какой-либо точкой оси времени, поскольку такие события имеют вероятность 0. Для вариаций введем обозначение множества:

$$\mathrm{LC} = \left\{f(t) : f(t) = f(t-0),\ f(t) = E_{\eta[t,T]}\left[f(t)\right]\right\}.$$

Все вариации ниже принадлежат этому множеству.

Ищем максимум, варьируя по C, N, A и отдельно по $A(T), C(T)$. Пусть вариации имеют вид

$$C(t) = \hat{C}_\eta(t) + \varepsilon\, c(t, \eta_{[0,t)}), \quad c(\cdot, \eta_{[0,t)}) \in \mathrm{LC},$$

$$N(t) = \hat{N}_\eta(t) + \varepsilon\, n(t, \eta_{[0,t)}), \quad n(\cdot, \eta_{[0,t)}) \in \mathrm{LC},$$

$$A(t) = \hat{A}_\eta(t) + \varepsilon\, a(t, \eta_{[0,t)}), \quad a(\cdot, \eta_{[0,t)}) \in \mathrm{LC},$$

$$A(T) = \hat{A}_\eta(T) + \varepsilon\, a_T\,(\eta_T)\,,\ C(T) = \hat{C}_\eta(T) + \varepsilon\, c_T\,(\eta_T)\,.$$

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta C}\,[c] \triangleq \frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{L}_{[\tilde{\xi}(\cdot),\tilde{\omega}(\cdot)]}\left[\hat{N}_\eta(\cdot), \hat{A}_\eta(\cdot), \hat{C}_\eta(\cdot) + \varepsilon\, c(\cdot,\cdot)\right]\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= E\left\{\int_0^T \left[U'\left(\hat{C}_\eta(t)\right)e^{-\delta\, t}c(t)dt - c(t)\tilde{\xi}(t)dt - c(t)\tilde{\omega}(t)d\eta(t)\right] - \int\limits_0^T \tilde{\omega}(t)dc(t)\right\} =$$

$$= E\left\{\int_0^T \left[U'\left(\hat{C}_\eta(t)\right)e^{-\delta\, t}c(t)dt - c(t)\tilde{\xi}(t)dt - c(t)\tilde{\omega}(t)d\eta(t)\right] + \int\limits_0^T c(t)d\tilde{\omega}(t)\right\} =$$

$$= \int_0^T E_{\eta[0,t)}c(t)\left\{E_{\eta[t,T]}\left\{\begin{array}{l} U'\left(C(t)\right)e^{-\delta\, t}dt - \tilde{\xi}(t)dt + \dfrac{d\tilde{\omega}(t)}{dt}dt + \\ + \Lambda E_{\eta[t,T]}\left\{\left(-\tilde{\omega}(t)dt + \Delta\tilde{\omega}(t)\right)|t = \tau_k\right\}\end{array}\right\}\right\} =$$

$$= \int_0^T E_{\eta[0,t)}(t)\left\{\begin{array}{l} U'\left(C(t)\right)e^{-\delta\, t}dt - \tilde{\xi}(t)dt + \\ + E_{\eta[t,T]}\left\{\dfrac{d\tilde{\omega}(t)}{dt}dt + \Lambda dt\, E_{\eta[t,T]}\left\{\left(-\tilde{\omega}(t) + \Delta\tilde{\omega}(t)\right)|t = \tau_k\right\}\right\}\end{array}\right\}.$$

Вариация по переменной N:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta N}\,[n] \triangleq E\left\{\int_0^T \left[\left(n(t)d\eta(t)\right)\tilde{\omega}(t)\right]\right\} =$$

$$= \int_0^T E_{\eta[0,t)}n(t)\left\{E_{\eta[t,T]}\left\{\Lambda dt E_{\eta[t,T]}\left\{\omega(t)\,|t = \tau_k\right\}\right\}\right\}.$$

Вариация по переменной A:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A}\,[a] = E\left\{\int_0^T \left[-V'\left(A(t)\right)e^{-\delta\, t} + a\,(t)\,d\tilde{\xi}(t)\right]dt\right\} =$$

$$= \int_0^T E_{\eta[0,t)}\left\{a\,(t)\,E_{\eta[t,T]}\left\{-V'\left(A(t)\right)e^{-\delta\, t} + \frac{d\tilde{\xi}(t)}{dt} + \Lambda E_{\eta[t,T]}\left\{\Delta\tilde{\xi}(t)\,|t = \tau_k\right\}\right\}\right\}dt.$$

Вариация по переменной $A(T)$:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A(T)}\,[a_T] = \int_0^T E_{\eta[0,T)}\left\{a_T E_{\eta_T}\left\{-\tilde{\xi}(T) - W'\left(A\,(T)\right)e^{-\delta T}\right\}\right\}dt.$$

Вариация по переменной $C(T)$:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta C(T)}\,[c_T] = \int_0^T E_{\eta[0,T)}\left\{c_T E_{\eta_T}\left\{-\tilde{\omega}(T)\right\}\right\}dt.$$

Система достаточных условий:

$$U'\left(C(t)\right)e^{-\delta\, t}dt - \tilde{\xi}(t)dt + E_{\eta[t,T]}\left\{\frac{d\tilde{\omega}(t)}{dt}dt + \Lambda dt\, E_{\eta[t,T]}\left\{\left(-\tilde{\omega}(t) + \Delta\tilde{\omega}(t)\right)|t = \tau_k\right\}\right\} = 0,$$

$$E_{\eta[t,T]}\left\{\Lambda dt E_{\eta[t,T]}\left\{\omega(t)\,|t=\tau_k\right\}\right\}=0,$$

$$E_{\eta[t,T]}\left\{-V'\left(A(t)\right)e^{-\delta\, t}+\frac{d\tilde{\xi}(t)}{dt}+\Lambda E_{\eta[t,T]}\left\{\Delta\tilde{\xi}(t)\,|t=\tau_k\right\}\right\}=0,$$

$$E_{\eta_T}\left\{-\tilde{\xi}(T)-W'\left(A\left(T\right)\right)e^{-\delta T}\right\}=0,$$

$$E_{\eta_T}\left\{-\tilde{\omega}(T)\right\}=0.$$

Запишем условия оптимальности, предполагая двойственные переменные функциями состояния, а чтобы они были непрерывными справа функциями, можно положить:

$$\tilde{\xi}\left(t\right)=\xi\left(t,N(t),A(t)\right)e^{-\delta t},\ \tilde{\omega}\left(t\right)=\omega\left(t,N(t),A(t)\right)e^{-\delta t}.$$

Тогда:

$$\frac{d\tilde{\omega}(t)}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\omega\left(t,C(t),A(t)\right)+\left(Y(t)-C(t)\right)\frac{\partial}{\partial A}\omega\left(t,C(t),A(t)\right),$$

$$\frac{d\tilde{\xi}(t)}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}\xi\left(t,C(t),A(t)\right)+\left(Y(t)-C(t)\right)\frac{\partial}{\partial A}\xi\left(t,C(t),A(t)\right),$$

$$E_{\eta[t,T]}\left\{\left(-\tilde{\omega}(t)+\Delta\tilde{\omega}(t)\right)|t=\tau_k\right\}=E_{\eta[t,T]}\left\{-\tilde{\omega}(t-0)\,|t=\tau_k\right\}=-\omega\left(t,C(t),A(t)\right),$$

$$E_{\eta[t,T]}\left\{\Delta\tilde{\xi}(t)\,|t=\tau_k\right\}=\xi\left(t,N(t),A(t)\right)-\xi\left(t,C(t),A(t)\right).$$

С учетом этого достаточные условия оптимальности примут вид

$$U'\left(C\right)-\xi\left(t,N,A\right)+\frac{\partial}{\partial t}\omega\left(t,C,A\right)+\left(Y\left(t\right)-C\right)\frac{\partial}{\partial A}\omega\left(t,C,A\right)-\left(\Lambda+\delta\right)\omega\left(t,C,A\right)=0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi\left(t,C,A\right)+\left(Y(t)-C\right)\frac{\partial}{\partial A}\xi\left(t,C,A\right)-\left(\Lambda+\delta\right)\xi\left(t,C,A\right)+\Lambda\xi\left(t,N,A\right)-V'(A)=0, \quad (5)$$

$$\omega\left(t,N,A\right)=0, \quad (6)$$

$$\omega(T,C,A)=0,\xi(T,C,A)=-W'(A(T)). \quad (7)$$

3.2. Анализ условий оптимальности

В данной части работы рассматривается случай $Y(t)=Y$. Из (6) следует, что $N=N\left(t,A\right)$. Положив

$$\xi\left(t,N\left(t,A\right),A\right)=F\left(t,A\right), \quad (8)$$

в первом приближении при разложении (5) по Λ

$$\xi\left(t,C,A\right)=F\left(t,A\right)+\frac{1}{\Lambda}\left(\left(Y\left(t\right)-C\right)\frac{\partial}{\partial A}\xi\left(t,C,A\right)-V'\left(A\right)+\frac{\partial}{\partial t}\xi\left(t,C,A\right)-\delta F\left(t,A\right)\right).$$

Подставив это выражение в правую часть его самого, в первом приближении получится

$$\xi\left(t,C,A\right)=F\left(t,A\right)+\frac{1}{\Lambda}\left(\left(Y(t)-C\right)\frac{\partial}{\partial A}F\left(t,A\right)-V'\left(A\right)+\frac{\partial}{\partial t}F\left(t,A\right)-\delta F\left(t,A\right)\right).$$

Следовательно, с учетом (8)

$$0=\frac{1}{\Lambda}\left(\left(Y\left(t\right)-N\left(t,A\right)\right)\frac{\partial}{\partial A}F\left(t,A\right)-V'\left(A\right)+\frac{\partial}{\partial t}F\left(t,A\right)-\delta F\left(t,A\right)\right).$$

Аналогичные преобразования уравнения (4) дают

$$\omega\left(t,\mathrm{C},A\right)=\frac{1}{\Lambda}\left(\frac{1}{\mathrm{C}}-F\left(t,A\right)\right).$$

Видно, что терминальное условие (7) не согласуется с этим выражением, из чего можно сделать предположение о наличии сингулярности в окрестности $t = T$. Из этого выражения и из (6) следует

$$F\left(t, A\right) = \frac{1}{N\left(t, A\right)}, \tag{9}$$

$$0 = \left(Y\left(t\right) - \frac{1}{F\left(t, A\right)}\right) \frac{\partial}{\partial A} F\left(t, A\right) - V'\left(A\right) + \frac{\partial}{\partial t} F\left(t, A\right) - \delta F\left(t, A\right). \tag{10}$$

Это уравнение определяет оптимальное управление $N\left(t, A\right)$ при заданной функции штрафа $V(A)$. По смыслу задачи $V(\cdot)$ быстро убывает до нуля при положительных аргументах и быстро растет при отрицательных.

3.3. Оптимальное управление

Оптимальное управление определяется из решения уравнения (10). Можно составить фазовую диаграмму этого уравнения. Для этого удобнее перейти к переменным

$$V\left(A\right) = \int_0^{\xi(A)} \frac{u}{m\left(u\right)} du, A = \int_{\xi(A)}^{a} \left(m\left(u\right)\right)^{-1} du.$$

Тогда оптимальное управление определяется из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} G\left(t, \xi\right) = -\left(G\left(t, \xi\right) - Y\right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} G\left(t, \xi\right)\right) m\left(\xi\right) - G\left(t, \xi\right) \delta + G\left(t, \xi\right)^2 \xi. \tag{11}$$

Для экспоненциальной функции штрафа $V(A) = e^{\frac{A}{\varepsilon}}$ характеристики уравнения имеют вид, изображенный на рис. 1.

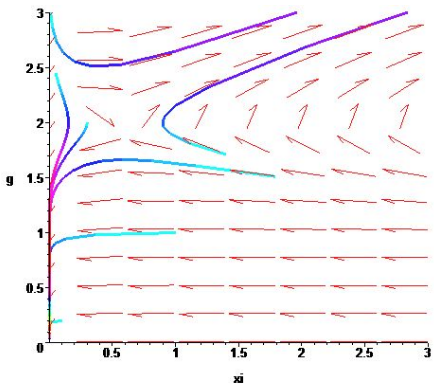

Рис. 1. Фазовый портрет решений уравнения (11)

Особенностью траекторий является наличие двух положений равновесия: седло в точке $\xi(t) = \frac{\delta}{Y}, G(t, \xi(t)) = Y$ и узел в начале координат. В силу этого и свойств решения в остальной части фазовой плоскости единственным ограниченным решением, не уходящим в ноль, является решение, лежащее на сепаратрисе седла.

3.4. Сингулярное разложение на конце интервала планирования

Для того чтобы получить вид решения в окрестности $t = T$, можно воспользоваться заменами

$$\omega\left(t, C, A\right) = \Omega\left(\Lambda\left(T - t\right), C, A\right),$$

$$\xi\left(t, C, A\right) = \Xi\left(\Lambda\left(T - t\right), C, A\right),$$

$$N\left(t, A\right) = \mathbf{N}\left(\Lambda\left(T - t\right), A\right).$$

В результате разложения при большом параметре частоты возможных смен потребления Λ, приближенные выражения для оптимального управления и двойственных переменных имеют вид

$$\mathbf{N}\left(\tau, A\right) = -\left(W'(A)\right)^{-1} +$$
$$+\left(\frac{(2-\tau)\,\delta}{W'(A)} + \frac{(\tau-2)\,V'(A)}{\left(W'(A)\right)^2} + \left(\frac{(\tau-2)\,Y}{\left(W'(A)\right)^2} + \frac{\tau-2}{\left(W'(A)\right)^3}\right)W''(A)\right)\Lambda^{-1},$$

$$\Xi\left(\tau, C, A\right) = -W'(A) +$$
$$+\left(\delta\,W'(A)\tau - V'(A)\tau + \left(C - \tau\,Y + \frac{1-\tau}{W'(A)}\right)W''(A)\right)\Lambda^{-1},$$

$$\Omega\left(\tau, C, A\right) = \frac{C^{-1} + W'(A)}{\Lambda}.$$

Это разложение должно согласовываться как с решением (9) вдали от горизонта планирования $t = T$, так и с терминальными условиями (7). Последнее условие выявляет связь между штрафом $V\left(\cdot\right),\ t < T$ и штрафом терминального значения $W\left(\cdot\right)$. Иными словами, мы можем получить решение только для определенной комбинации функций штрафов. Качество согласованности можно оценить по слагаемым в старшем порядке – они содержат переменную τ, которая зависит от ширины пограничного слоя, который мы рассматриваем.

4. Заключение

В данной работе рассмотрена модель оптимального потребления агента при случайных моментах возможностей смены уровня потребления. В модели введены ограничения ликвидности для запаса денег агента, а также конечный горизонт планирования. Мы остановились на конечном горизонте планирования, так как на бесконечном интервале планирования появляются трудности с условиями на бесконечности, аналогичными терминальным условиям [3]. Приведенный в данной статье анализ еще раз показывает, что удобнее исследовать модель с конечным интервалом планирования, а потом переходить к бесконечному. В противном случае возникают эффекты, связанные с ухудшением согласованности решений вдали от горизонта планирования и вблизи него.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-11-00432).

Литература

1. *Grossman S. J., Laroque G.* Asset Pricing and Optimal Portfolio Choice in the Presence of Illiquid Durable Consumption Goods // Econometrica. — 1990. — V. 58. — P. 25–51.

2. *Calvo G. A.* Staggered prices in a utility-maximizing framework // Journal of Monetary Economics. — 1983. — N 12(3). — P. 383– 398.

3. *Жукова А. А., Поспелов И. Г.* Стохастическая модель торговли неликвидным товаром // Труды МФТИ. — 2012. — Т. 4. — С. 131–147.

4. *Verhulst F.* Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics. Texts in Applied Mathematics. — New York: Springer, 2006. — ISSN 0939-2475. — P. 344.

5. *Arefiev N.* Generalized Calvo Approach // Working papers by NRU Higher School of Economics. Series EC «Economics». — 2011. — N 06.

6. *Жукова А. А., Поспелов И. Г.* Применение метода возмущений к исследованию стохастической модели поведения агента на рынке не вполне ликвидного товара // Труды 56-й научной конференции МФТИ. Управление и прикладная математика. — 2013. — С. 62–63.

Bibliography

1. *Grossman S. J., Laroque G.* Asset Pricing and Optimal Portfolio Choice in the Presence of Illiquid Durable Consumption Goods // Econometrica. — 1990. — V. 58. — P. 25–51.

2. *Calvo G. A.* Staggered prices in a utility-maximizing framework // Journal of Monetary Economics. — 1983. — N 12(3). — P. 383– 398.

3. *Zhukova A. A., Pospelov I. G.* A stochastic model of illiquid goods trade // Trudy of MIPT (in Russian). — 2012. — V. 4. — P. 131–147. — (in Russian).

4. *Verhulst F.* Methods and Applications of Singular Perturbations: Boundary Layers and Multiple Timescale Dynamics. Texts in Applied Mathematics. — New York: Springer, 2006. — ISSN 0939-2475. — P. 344.

5. *Arefiev N.* Generalized Calvo Approach // Working papers by NRU Higher School of Economics. Series EC ¡¡Economics¿¿. — 2011. — N 06.

6. *Zhukova A. A., Pospelov I. G.* Application of perturbation methods to analysis of a model of an agent in an illiquid goods market. // Proceedings of the 56th MIPT conference. Control and applied mathematics (in Russian). — 2013. — P. 62–63.

Поступила в редакцию 15.12.2014.