

УДК 537.563.22

В. В. Горин

Киевский национальный университет им. Т.Г. Шевченко
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Решение уравнений нелокальной кинетики при диффузном рассеянии ионизирующих электронов

Получены общие формулы решения кинетического уравнения для ионизирующих электронов в тлеющем разряде произвольной конфигурации в приближении *эргодичности* движения электронов вдоль энергетической гиперповерхности. Оказалось, что в этом приближении источник ионизации является функцией одной скалярной переменной — электрического потенциала, функция распределения электронов также является функцией одной скалярной переменной — полной механической энергии электрона.

Ключевые слова: функция распределения электронов, эргодичность, тлеющий разряд, полый катод, нелокальная ионизация, нелокальная кинетика.

1. Введение

Задачи нелокальной кинетики ионизирующих электронов в сильно неравновесной плазме тлеющего разряда остаются пока нетрадиционными по сравнению с гидродинамическими. Отрицательное свечение и эффект полого катода многим исследователям, привыкшим работать с уравнениями гидродинамики, до сих пор кажутся эмпирической экзотикой, доступной лишь экспериментаторам, но не теоретикам и программистам. Исследование гибридных моделей [1–4], в которых ионизирующие электроны отделены от «гидродинамических» (медленных) и рассчитываются методом Монте-Карло, является экспериментом численным; это мало полезно для понимания нелокальных эффектов в плазме. Тем не менее, на основе гибридной модели удалось построить математические структуры [5], которые могут лечь в основу новой теории стационарного тлеющего разряда, охватывающей нелокальные эффекты в нём. Есть надежда, что в этой теории найдут своё место все его основные наблюдаемые свойства.

Рассмотрим кинетику ионизирующих электронов при различных соотношениях масштабов:

- 1) R — габаритного размера газоразрядного устройства,
- 2) $\lambda_{tr} = (N\sigma_{tr})^{-1}$ — транспортной длины упругого рассеяния электрона на атомах газа,
- 3) $\lambda_{in} = (N\sigma_{in})^{-1}$ — средней длины пробега электрона между двумя последовательными неупругими столкновениями с атомами газа.

У броуновского движения есть эффект сворачивания траектории в клубок, ввиду которого среднеквадратичное смещение может сильно отличаться от пройденного пути, если средняя длина свободного пробега меньше пути. Поэтому вместо величины λ_{in} интерес представляет

- 4) $\lambda = \min \{ \lambda_{in}, \sqrt{\lambda_{in}\lambda_{tr}} \}$ — среднеквадратичное смещение электрона между двумя последовательными неупругими столкновениями с атомами газа.

Три числа: R, λ_{tr}, λ , когда они не равны между собой, можно расположить в порядке возрастания шестью (число перестановок) способами. Для аналитических исследований удобны случаи, когда неравенства выполнены в смысле «много меньше» или «много больше»; другие сочетания этих величин соответствуют области плавного перехода от одной асимптотической модели к другой, и здесь рассматриваться не будут.

Проанализируем физический смысл этих вариантов соотношений.

1. $\lambda_{tr}, \lambda \ll R$. Этим двум сочетаниям соответствует *локальная кинетика* электронов, которая ведёт к гидродинамическому приближению.

2. $R, \lambda \ll \lambda_{tr}$. Здесь, ввиду малости углового рассеяния электронного пучка, которое имеет место при энергиях в сотни электронвольт (Каган [7], 1985), функция распределения электронов (ФРЭ) может быть сильно анизотропной, и можно рассматривать одномерные задачи локальной $\lambda \ll R$ (2а) и нелокальной $R \ll \lambda$ (2б) кинетики (Никулин [8], 1992). Оба эти случая, а также переходные варианты между ними рассмотрены в работе Горина [9] (2008).

3. $R, \lambda_{tr} \ll \lambda$. Эти два варианта соответствуют случаю, когда ионизирующий электрон представляет собой почти консервативную механическую систему с медленными потерями энергии и претерпевает множество актов упругого рассеяния на атомах и потенциальных стенках области движения, прежде чем произойдёт потеря энергии электрона в акте неупругого рассеяния. Случаи $\lambda_{tr} \ll R$ (3а), и $R \ll \lambda_{tr}$ (3б) имеют кажущееся различие. В обоих из них происходит быстрое перемешивание фазовых траекторий электрона вдоль гиперповерхности постоянной полной механической энергии; ФРЭ можно считать изотропной и хорошо «размазанной» вдоль этой гиперповерхности, при этом значения ФРЭ могут быть существенно различными лишь при разных значениях полной энергии. Л.Д. Цендин [10] называет такую кинетику электронов «полностью нелокальной» (стр. 144). Она имеет место для электронов в диапазоне энергий от первого возбуждённого уровня атома до нескольких десятков электронвольт, когда сечения неупругих процессов начинают достигать величин, сравнимых с сечениями упругих процессов рассеяния.

Итак, область локальной кинетики ионизирующих электронов: $\lambda \ll R$, область нелокальной кинетики: λ больше либо одного порядка с R , причём крайнее соотношение $\lambda \gg R$ — «полностью» нелокальная кинетика. Варианты 2 и 3 соотношений этих параметров охватываются универсальной математической моделью Горина [5] (2010), для которой аналитические варианты являются предельными асимптотическими упрощениями. В настоящей работе изучается асимптотическое решение задачи для варианта 3.

2. Постановка задачи

Пусть функция распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ ионизирующих электронов стационарного тлеющего разряда постоянного тока удовлетворяет стационарному кинетическому уравнению [5]:

$$\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - L(\mathbf{v}) \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = s(\mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{v}). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{r}, \mathbf{v} — векторы координат и скорости электрона, e, m_e — элементарный заряд и масса электрона, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\varphi(\mathbf{r})$ — электростатическое поле, $L(\mathbf{v})$ — оператор рассеяния электронов на атомах газа, $s(\mathbf{r})$ — плотность источника ионизации электронным ударом (вторичные электроны ионизации рождаются с пренебрежимо малыми скоростями, что отражено 3-мерной дельта-функцией $\delta^3(\mathbf{v})$). Линейный оператор $L(\mathbf{v})$ включает упругие и неупругие столкновения:

$$L(\mathbf{v}) = L_{el}(\mathbf{v}) + L_{in}(\mathbf{v}), \quad (2)$$

$$L_{el}(\mathbf{v}) = \omega_{el}(\nu) \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial \nu_i} (\delta_{ik} \nu^2 - \nu_i \nu_k) \frac{\partial}{\partial \nu_k}, \quad (3)$$

$$L_{in}(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}) = \int d^3 \nu' \mu(\mathbf{v}, \mathbf{v}') f(\mathbf{v}') - \omega(\nu) f(\mathbf{v}), \quad (4)$$

$$\mu(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \mu_3 \left(\nu, \nu', \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{\nu \nu'} \right), \quad (5)$$

$$\omega(\nu) = \int d^3 \nu' \mu(\mathbf{v}', \mathbf{v}) = 2\pi \int_0^\infty \nu'^2 d\nu' \int_0^\pi d\theta \sin \theta \mu_3(\nu', \nu, \cos \theta). \quad (6)$$

Здесь ω_{el} , ω — средние частоты упругих и неупругих столкновений электрона с атомами, $\mu(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ — парциальная частота перехода $\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}$ электрона в неупругом процессе, в случае изотропной среды она зависит от трёх скалярных переменных: абсолютных величин начальной и конечной скорости электрона и косинуса угла рассеяния.

Плотность источника ионизации определена независимым соотношением:

$$s(\mathbf{r}) = \int d^3\nu \omega_{ion}(\nu) f(\mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (7)$$

Здесь ω_{ion} — средняя частота процесса ионизации электронным ударом.

Требуется исследовать свойства решения задачи (1) – (7) в случае 3: R , $\lambda_{tr} \ll \lambda$. В терминах введенных выше частот (с учётом соотношений $\omega_{el}(\nu) = N\nu\sigma_{tr}(\nu)$, $\omega(\nu) = N\nu\sigma_{in}(\nu)$) получим

$$\omega(\nu) \ll \omega_{el}(\nu), \quad (8)$$

$$R \ll \frac{\nu}{\sqrt{\omega_{el}(\nu)\omega(\nu)}}. \quad (9)$$

У аргона диапазон выполнения неравенства (8) простирается по кинетической энергии от энергии возбуждения 1-го уровня 11.5 эВ до примерно 30 эВ. При этом условие (9) ограничивает размер газового разряда величиной

$$RN \ll 0.232 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-2},$$

здесь N — плотность газа, м^{-3} , σ_{tr} , σ_{in} — транспортное сечение упругого рассеяния и сечение неупругого рассеяния электрона на атомах газа. При давлении 1 мм ртутного столба и температуре 300 К получим ограничение

$$R \ll 72 \text{ мм}.$$

3. Решение задачи

Согласно результатам работы [5], решение задачи представимо в виде

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int_{\partial\Omega} d^2r' j_n(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', 0) + \int_{\Omega} d^3r' s(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', 0). \quad (10)$$

Здесь Ω , $\partial\Omega$ — геометрический объём разряда и его граница, j_n — нормальная компонента плотности потока электронов, положительная на катоде, $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}')$ — фундаментальное решение оператора кинетического уравнения (1):

$$\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - L(\mathbf{v}) \right) g(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{v} - \mathbf{v}'). \quad (11)$$

При этом плотность источника ионизации $s(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению

$$s(\mathbf{r}) = \int_{\partial\Omega} d^2r' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') j_n(\mathbf{r}') + \int_{\Omega} d^3r' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') s(\mathbf{r}'), \quad (12)$$

где

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int d^3\nu \omega_{ion}(\nu) g(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', 0). \quad (13)$$

Согласно результатам работ [11, 12], существование и единственность решения уравнения (12) обусловлено существованием фундаментального решения $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}')$ для вспомогательного дифференциального оператора:

$$\left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - L_{el}(\mathbf{v}) + \omega(\nu) \right) g_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}') = \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{v} - \mathbf{v}'). \quad (14)$$

В этих работах доказано, что если решение (14) существует, оно является единственным. При этом носитель функции $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}')$ принадлежит множеству $\{\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}')\}$, где

$$\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{m_e v^2}{2e} - \varphi(\mathbf{r}) \quad (15)$$

— полная механическая энергия электрона. Из свойства носителя следует, что если g_1 существует, то оно представимо в виде

$$g_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}') = C(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}') \delta(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}')), \quad (16)$$

где C — некоторая функция своих переменных. Условие (8) позволяет сделать более сильное предположение:

$$C(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}') = C_1(\varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}')). \quad (17)$$

Представление (17) означает *эргодическую гипотезу* для распределения g_1 : оно предполагается *равномерным* всюду вдоль энергетической гиперповерхности $\{\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}')\}$. Основанием для такого предположения является представление о том, что быстрая диффузия вдоль гиперповерхности практически выравнивает распределение.

Эргодическая гипотеза, взятая в таком виде, является очень грубым приближением: игнорируются дифференциальные потоки электронов вдоль самой энергетической гиперповерхности, и обеспечивается лишь равенство источника и стока частиц в интегральном смысле. При $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = (\mathbf{r}', \mathbf{v}')$ функция g_1 должна иметь особенность, которая здесь тоже игнорируется. Обосновать гипотезу можно решением такой задачи.

Задача. В закрытой комнате имеется источник дыма (сигарета), стены дым не поглощают. Воздух поглощает дым очень медленно, скорость поглощения пропорциональна концентрации. При каких соотношениях размера сигареты, комнаты, коэффициента диффузии и коэффициента поглощения дыма установившаяся концентрация дыма будет везде одинаковой с точностью до 1%?

На рисунке 1 приведено решение для сферической комнаты с источником дыма в её центре. Здесь $x = r/R$, r — расстояние от центра комнаты, м, R — радиус комнаты, м, n — относительная концентрация дыма. Решение дано для $R\sqrt{\omega/D} = 0.01$, где D — коэффициент диффузии, м²/с, ω — коэффициент поглощения дыма, с⁻¹.

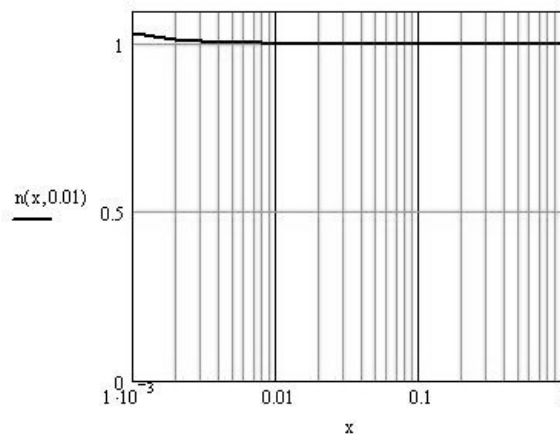


Рис. 1

Если энергетическая гиперповерхность достигает стенки объёма газового разряда, вместо условия поглощения на стенке, как это было принято в работах [5, 11], здесь необходимо *допущение о полном (или почти полном) отражении* ионизирующих электронов [12]. Как упоминалось в работе [11], условие полного отражения может быть обеспечено выбором подходящего потенциального поля. Исключением является *анод* — граница с самым высоким, как правило, электрическим потенциалом и самой низкой потенциальной энергией

электрона, которую поэтому в фазовом пространстве пересекают все энергетические гиперповерхности. Поскольку анод по своему физическому смыслу не может не поглощать электроны, для обеспечения равномерности распределения вдоль энергетической гиперповерхности требуется либо высокий коэффициент отражения быстрых электронов на аноде (близкий к единице), либо его малая площадь поверхности. Для справедливости дальнейших выкладок необходимо, чтобы доля ионизирующих электронов при данной энергии, поглощённых стенками (включая анод), была много меньше доли, потерявшей часть этой энергии в неупругих процессах. Тогда потоком на стенки можно пренебречь.

Здесь следует напомнить, что анодный ток образуют в основном медленные (гидродинамические) электроны. Даже если материал анода поглощает полностью любые электроны — быстрые и медленные, — малое поглощение быстрых электронов и одновременно большое поглощение медленных можно обеспечить его сетчатой структурой. Если длина свободного пробега быстрого электрона много больше поперечника проволоки сетки, быстрый электрон, почти не отклоняясь прианодным полем, по инерции почти всегда пройдёт в ячейку анодной сетки, не попадая на анод. Медленный же электрон обладает малой инерцией и, двигаясь в основном вдоль силовых линий против поля, придёт на анод.

Нормировочную константу (17) можно определить, подставляя (17) и (16) в (14) и интегрируя уравнение по всему фазовому пространству. При этом интеграл преобразуется к виду

$$C_1(\varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}')) \int \int d^3r d^3\nu \omega(\nu) \delta(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}')) = 1.$$

Правая часть равна единице при условии, что точка \mathbf{r}', \mathbf{v}' принадлежит фазовому пространству ионизирующих электронов, в противном случае она равна нулю. Интегрирование фактически сводится к интегралу по ограниченному множеству: участку гиперповерхности с энергией $\varepsilon' = \varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}')$. Это определяет нормировочную константу

$$C_1(\varepsilon') = \left[\int \int d^3r d^3\nu \omega(\nu) \delta(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \varepsilon') \right]^{-1}, \quad (18)$$

и полностью определяет решение задачи:

$$g_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}') = C_1(\varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}')) \delta(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}')). \quad (19)$$

Нормировочный интеграл в (18) допускает ряд полезных преобразований. Во-первых, поскольку подынтегральная функция не зависит от направления скорости, можно проинтегрировать по двум переменным направления скорости:

$$\begin{aligned} C_1(\varepsilon') &= \left[\int_{\Omega} d^3r \int_0^{\infty} 4\pi \nu^2 d\nu \omega(\nu) \delta\left(\frac{m_e \nu^2}{2e} - \varphi(\mathbf{r}) - \varepsilon'\right) \right]^{-1} = \\ &= \left[4\pi \frac{e}{m_e} \int_{\Omega} d^3r (\nu \omega(\nu)) \Big|_{\nu=\sqrt{\frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r})+\varepsilon')}} \right]^{-1} = \\ &= \left[4\pi \frac{e}{m_e} \int_{\Omega \cap \{\varphi(\mathbf{r})+\varepsilon'>0\}} d^3r \sqrt{\frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r})+\varepsilon')} \omega\left(\sqrt{\frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r})+\varepsilon')}\right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Во-вторых, элемент интегрирования по пространству можно представить в виде

$$d^3r = d^2S \frac{du}{E(\mathbf{r})},$$

здесь d^2S — элемент площади эквипотенциальной поверхности $\varphi(\mathbf{r}) = u = \text{const}$. При использовании этого представления получим

$$C_1(\varepsilon') = \left[4\pi \frac{e}{m_e} \int_{u+\varepsilon'>0} du \sqrt{\frac{2e}{m_e}(u+\varepsilon')} \omega \left(\sqrt{\frac{2e}{m_e}(u+\varepsilon')} \right) \int_{\Omega \cap \{\varphi(\mathbf{r})=u\}} \frac{d^2S}{E(\mathbf{r})} \right]^{-1}.$$

Окончательно имеем

$$C_1(\varepsilon') = \left[\int_0^\infty 4\pi \nu^2 d\nu \omega(\nu) p \left(\frac{m_e \nu^2}{2e} - \varepsilon' \right) \right]^{-1}. \quad (20)$$

Здесь введена весовая функция эквипотенциальной поверхности:

$$p(u) = \int_{\Omega \cap \{\varphi(\mathbf{r})=u\}} \frac{d^2S}{E(\mathbf{r})}. \quad (21)$$

Далее для всех остальных входящих величин можно воспользоваться формулами работ [11, 12]. Линейный оператор \hat{g} , соответствующий ядру $g(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}')$, равен:

$$\hat{g} = \left(\sum_{n=0}^N \hat{K}^n \right) \hat{g}_1, \quad N = [\varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}') / \varepsilon_{in}], \quad (22)$$

здесь \hat{g}_1 — линейный оператор, соответствующий ядру $g_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}')$. Оператор \hat{K} в формуле (22) определён через ядро

$$\hat{K}f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int \int d^3r' d^3v' K(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}') f(\mathbf{r}', \mathbf{v}').$$

Используя определение этого оператора в [11, 12] и формулу (19), получим

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}') &= \int d^3v'' g_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}'') \mu(\mathbf{v}'', \mathbf{v}') = \\ &= C_1(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v})) \int d^3v'' \delta(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}) - \varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{v}'')) \mu(\mathbf{v}'', \mathbf{v}') = \\ &= C_1(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v})) \int 2\pi \nu''^2 d\nu'' \delta\left(\frac{m_e \nu''^2}{2e} - \varphi(\mathbf{r}') - \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v})\right) \mu_2(\nu'', \nu') = \\ &= \frac{C_1(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}))}{2\sqrt{\frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r}') + \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}))}} \frac{2e}{m_e} \int 2\pi \nu''^2 d\nu'' \delta\left(\nu'' - \sqrt{\frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r}') + \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}))}\right) \mu_2(\nu'', \nu') = \\ &= 2\pi C_1(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v})) \frac{e}{m_e} \sqrt{\frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r}') + \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}))} \mu_2\left(\sqrt{\frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r}') + \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}))}, \nu'\right). \end{aligned}$$

Окончательное выражение:

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{v}; \mathbf{r}', \mathbf{v}') = 2\pi C_1(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v})) \frac{e}{m_e} \sqrt{\nu^2 - \frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}'))} \mu_2\left(\sqrt{\nu^2 - \frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}'))}, \nu'\right). \quad (23)$$

Здесь введено обозначение

$$\mu_2(\nu, \nu') = \int_{-1}^1 d\xi \mu_3(\nu, \nu', \xi). \quad (24)$$

Изучим действие оператора \hat{K} на функции двух скалярных переменных: потенциальной энергии электрона и абсолютного значения его скорости $f(\mathbf{r}, \nu) = F(\varphi(\mathbf{r}), \nu)$:

$$\begin{aligned} \hat{K}F(\varphi(\mathbf{r}), \nu) &= \int \int d^3r' d^3\nu' K(\mathbf{r}, \nu; \mathbf{r}', \nu') F(\varphi(\mathbf{r}'), \nu') = \\ &= 2\pi C_1(\varepsilon(\mathbf{r}, \nu)) \frac{e}{m_e} \times \\ &\times \int \int d^3r' d^3\nu' \sqrt{\nu^2 - \frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}'))} \mu_2\left(\sqrt{\nu^2 - \frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}'))}, \nu'\right) F(\varphi(\mathbf{r}'), \nu') = \\ &= 2\pi C_1(\varepsilon(\mathbf{r}, \nu)) \frac{e}{m_e} \times \\ &\times \int du' p(u') \int_0^\infty 4\pi \nu'^2 d\nu' \sqrt{\nu^2 - \frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r}) - u')} \mu_2\left(\sqrt{\nu^2 - \frac{2e}{m_e}(\varphi(\mathbf{r}) - u')}, \nu'\right) F(u', \nu'). \end{aligned}$$

Из указанного выражения видно, что в результате действия этого оператора мы получим также функцию потенциальной энергии и абсолютного значения скорости электрона:

$$F_1(u, \nu) = \hat{K}F(u, \nu) = \int du' p(u') \int_0^\infty 4\pi \nu'^2 d\nu' K(u, \nu; u', \nu') F(u', \nu'), \quad (25)$$

$$K(u, \nu; u', \nu') = 2\pi C_1\left(\frac{m_e \nu^2}{2e} - u\right) \frac{e}{m_e} \sqrt{\nu^2 - \frac{2e}{m_e}(u - u')} \mu_2\left(\sqrt{\nu^2 - \frac{2e}{m_e}(u - u')}, \nu'\right). \quad (26)$$

Более того, мы видим, что результат зависит лишь от одной скалярной переменной – полной энергии

$$\varepsilon(u, \nu) = \frac{m_e \nu^2}{2e} - u,$$

поскольку

$$K(u, \nu; u', \nu') = K(\varepsilon; u', \nu') = 2\pi C_1(\varepsilon) \frac{e}{m_e} \sqrt{\frac{2e}{m_e}(\varepsilon + u')} \mu_2\left(\sqrt{\frac{2e}{m_e}(\varepsilon + u')}, \nu'\right).$$

Для простоты обозначений мы не будем обозначать те же (по физическому смыслу) функции новыми символами при замене переменных в аргументах функций (хотя математически это – уже другие функции новых аргументов).

В переменных u, ν функция g_1 имеет вид

$$g_1(u, \nu; u', \nu') = C_1(\varepsilon(u, \nu)) \delta(\varepsilon(u, \nu) - \varepsilon(u', \nu')), \quad (27)$$

Действие операторов в (22) на функции от потенциала и абсолютной величины скорости электрона определено их ядрами аналогично формуле (25). Из (27) видно, что $g_1 = g_1(\varepsilon, \varepsilon')$, $\varepsilon' = \varepsilon(u', \nu')$, откуда следует, что и функция g является функцией двух скалярных переменных $g = g(\varepsilon, \varepsilon')$. Ядро интегрального уравнения (12) оказывается при этом функцией двух скалярных переменных электрического потенциала u, u' :

$$\begin{aligned} G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \int d^3\nu \omega_{ion}(\nu) g(\mathbf{r}, \nu; \mathbf{r}', 0) = \\ &= \int_0^\infty 4\pi \nu^2 d\nu \omega_{ion}(\nu) g\left(\frac{m_e \nu^2}{2e} - u, -u'\right) = G_0(u, u'), \end{aligned} \quad (28)$$

Из общей формулы решения для источника ионизации из работ [11, 12]

$$s(\mathbf{r}) = \left(\sum_{m=0}^M \hat{G}_0^m \right) \int_{\partial\Omega} d^2r' G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') j_n(\mathbf{r}'), \quad M = [U/\varepsilon_{ion}],$$

следует

$$s(u) = \left(\sum_{m=0}^M \hat{G}_0^m \right) G_0(u, -U) \frac{I_e}{e}, \quad I_e = e \int_{\partial\Omega_c} d^2r' j_n(\mathbf{r}'), \quad M = [U/\varepsilon_{ion}]. \quad (29)$$

Здесь оператор \hat{G}_0 соответствует ядру $G_0(u, u')$:

$$\hat{G}_0 f(u) = \int p(u') du' G_0(u, u') f(u'),$$

и введен потенциал катода $-U$ (U — напряжение разряда) и полный электронный ток катода I_e . Квадратные скобки здесь означают целую часть числа. Для ФРЭ имеем

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = g(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}), U) I_e/e + \int du' p(u') s(u') g(\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{v}), -u'). \quad (30)$$

4. Выводы

Получены общие формулы (19)–(30) решения задачи (1)–(7) с кинетическим уравнением для ионизирующих электронов в тлеющем разряде произвольной конфигурации в приближении эргодичности движения электронов вдоль энергетической гиперповерхности и малого поглощения ионизирующих электронов на границах разряда. Оказалось, что в этом приближении источник ионизации является функцией одной скалярной переменной — электрического потенциала, функция распределения электронов также является функцией одной скалярной переменной — полной механической энергии электрона.

Работа выполнена при поддержке гранта № 5499 Минобрнауки Российской Федерации.

Литература

1. Kutasi K., Donko Z. Hybrid model of a plane-parallel hollow-cathode discharge // J. Phys. D: Appl. Phys. — 2000. — V. 33. — P. 1081–1089.
2. Sigeneger F., Winkler R. Study of the electron kinetics in cylindrical hollow cathodes by a multi-term approach // Eur. Phys. J. AP. — 2002. — V. 19. — P. 211–223.
3. Baguer N., Bogaerts A., Gijbels R. Hollow cathode glow discharge in He: Monte Carlo-Fluid model combined with a transport model for metastable atoms // J. Applied Physics. — 2003. — V. 93. N 1. — P. 47–55.
4. Sigeneger F., Donko Z., Loffhagen D. Boltzmann equation and particle-fluid hybrid modelling of a hollow cathode discharge // Eur. Phys. J. Appl. Phys. — 2007. — V. 38. — P. 161–167.
5. Gorin V.V. Non-local model of hollow cathode and glow discharge — theory calculations and experiment comparison // Eur. Phys. J. D. — 2010. — V. 59. — P. 241–247, DOI: 10.1140/epjd/e2010-00165-9.
6. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. — М.: Наука, 1987.
7. Kagan Yu.M. Rate of ionization and density of electrons in a hollow cathode // J. Phys. D: Appl. Phys. — 1985. — V. 18. — P. 1113–1123.
8. Никулин С.П. Характеристики тлеющего разряда низкого давления с цилиндрическим полым катодом при большой протяженности катодного слоя // ЖТФ. — 1992. — Т. 62, № 12. — С. 21–27.
9. Gorin V.V. A Mathematical Model of Plane Glow Discharge and Hollow Cathode Effect // Ukr. J. Phys. — 2008. — V. 53, N 4. — P. 366–372.

10. *Цендин Л.Д.* Нелокальная кинетика электронов в газоразрядной плазме // Усп. физ. наук. — 2010. — Т. 180, № 2. — С. 139–164.
11. *Горин В.В.* Существование и единственность решения нелокального уравнения источника ионизации в тлеющем разряде и полом катоде // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 3. — С. 71–80.
12. *Gorin V.V.* Uniqueness Theorem for the Non-Local Ionization Source in Glow Discharge and Hollow Cathode // Journal of Modern Physics. — 2012. — V. 3, N 30. — P. 1647–1662. doi: 10.4236/jmp.2012.330202.

Поступила в редакцию 23.11.2012