

УДК 531.36

А. В. Карапетян¹, М. А. Муницына^{2,3}¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова²Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)³Институт проблем управления имени В. А. Трапезникова РАН

Динамика волчка тип-топ при вязком трении

Простейшей моделью волчка тип-топ является неоднородный динамически симметричный шар, центр масс которого лежит на оси динамической симметрии, но не совпадает с геометрическим центром. В настоящей работе предполагается, что со стороны плоскости на шар действует сила трения скольжения, пропорциональная скорости точки контакта с плоскостью. При некотором классе начальных условий приводятся приближенные уравнения, описывающие его динамику.

Ключевые слова: вязкое трение, неоднородный шар, устойчивость.

А. V. Karapetyan¹, M. A. Munitsyna^{2,3}¹Lomonosov Moscow State University²Moscow Institute of Physics and Technology³V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

Tip-top dynamics in viscous friction

The simplest model of a tippe-top is an nonhomogeneous dynamically symmetric ball, the center of mass of which lies on the axis of dynamic symmetry, but does not coincide with the geometric center. In the present work, approximate equations that describe the dynamics of a tip-top under a certain class of initial conditions for a model of viscous friction are obtained. Qualitative analysis is supplemented by quantitative estimates.

Key words: viscous friction, tip-top, stability.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о движении неоднородного динамически симметричного шара на горизонтальной плоскости. Пусть r – радиус шара, s – расстояние между его геометрическим центром O и центром масс S ($s \neq 0$). Будем считать, что прямая SO с единичным ортом $\mathbf{e} = \overline{SO}/s$ является осью динамической симметрии шара, а A и C – его экваториальный и осевой моменты инерции.

Теоремы об изменении количества движения и кинетического момента шара, условие постоянства единичного вектора восходящей вертикали $\boldsymbol{\gamma}$ и условие безотрывности движения, отнесенные к главным центральным осям инерции шара, имеют соответственно вид

$$m\dot{\mathbf{v}} + [\boldsymbol{\omega}, m\mathbf{v}] = -mg\boldsymbol{\gamma} + N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}, \quad \mathbb{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbb{J}\boldsymbol{\omega}] = [\mathbf{r}, N\boldsymbol{\gamma} + \mathbf{F}] + \mathbf{M},$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}] = 0, \quad (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}) = 0. \quad (1)$$

Здесь m – масса шара, \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ – векторы скорости его центра масс и угловой скорости, $\mathbf{r} = s\mathbf{e} - r\boldsymbol{\gamma}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$ – радиус-вектор и скорость нижней точки шара соответственно, g – ускорение свободного падения, $N \geq 0$ – величина нормальной составляющей реакции опорной плоскости, $\mathbb{J} = \text{diag}(A, A, C)$ – центральный тензор инерции шара, \mathbf{F} и \mathbf{M} – сила и момент трения.

При заданной модели трения

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, N), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}, N) \quad (2)$$

система (1) замкнута относительно переменных \mathbf{v} , $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и N . Локальный анализ рассматриваемой модели волчка представлен в работах [1, 2], а глобальный качественный анализ – в работах [3–5]. Численные исследования в рамках поликомпонентного сухого трения проводились в [6]. Сравнительный анализ различных моделей проведен в [7]. В работе [8] представлен метод обобщенных диаграмм Смейла [9, 10] в задаче о движении волчка тип-топ на вязкоупругой плоскости.

При $\mathbf{M} = 0$ система (1) имеет первый интеграл, представляющий собой линейную комбинацию проекций кинетического момента на вертикаль и на ось динамической симметрии шара (интеграл Желле [11])

$$K(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = -\frac{1}{Cr}(\mathbb{J}\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}) = k = \text{const}, \quad (3)$$

а при $\mathbf{M} = 0$ и $\mathbf{F} = 0$ – интеграл энергии

$$H(\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + \frac{1}{2}(\mathbb{J}\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) - mg(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{r}) = h = \text{const}, \quad (4)$$

интеграл вида

$$\omega_3 = \text{const}, \quad (5)$$

выражающий постоянство проекции кинетического момента шара и на ось динамической симметрии, а также интеграл вида

$$V(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}) = ([\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}], [\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{v}]) = v^2 = \text{const}, \quad (6)$$

выражающий постоянство величины проекции скорости центра масс на опорную плоскость. В общем случае система (1) допускает энергетическое соотношение

$$\dot{H} = (\mathbf{F}, \mathbf{u}) + (\mathbf{M}, \boldsymbol{\omega}), \quad (7)$$

и на ее решениях справедливы равенства

$$\dot{K} = -\frac{1}{Cr}(\mathbf{M}, \mathbf{r}), \quad (8)$$

$$\dot{V} = \frac{([\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}], [\mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}])}{m}. \quad (9)$$

Заметим, что в случае отрыва шара от плоскости ($N = 0$) для описания его динамики следует положить $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 0$ в первых трех уравнениях (1), отбросив последнее уравнение. При этом для отслеживания возвращения на контакт следует рассматривать также уравнение

$$\dot{z} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}), \quad (10)$$

где z – высота над плоскостью нижней точки шара (в момент отрыва и при возвращении на контакт $z = 0$).

1.1. Абсолютно гладкая плоскость

Рассмотрим случай абсолютно гладкой плоскости $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{M} = 0$. Наличие интегралов (3)–(6) и геометрического интеграла

$$\Gamma(\boldsymbol{\gamma}) = (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}) = 1 \quad (11)$$

позволяет понизить порядок системы (1) до единицы.

При $k \neq \omega_3(\pm 1 - s/r)$ получим

$$\frac{1}{2}(A + ms^2 \sin^2 \theta)\dot{\theta}^2 + W(\theta) = h - \frac{mv^2}{2}, \quad (12)$$

где θ – угол нутации ($\sin \theta \neq 0$ при $k \neq \omega_3(\pm 1 - s/r)$), а $W(\theta)$ – эффективный потенциал вида

$$W(\theta) = \frac{1}{2}C\omega_3^2 + \frac{C^2(kr - (r \cos \theta - s)\omega_3)^2}{2A \sin^2 \theta} + mg(r - s \cos \theta).$$

Функция $W(\theta)$ имеет на промежутке $\theta \in (0, \pi)$ одну критическую точку $\theta = \arccos x$, являющуюся точкой строгого локального минимума и определяющуюся равенством

$$\frac{(k - (x-b)\omega_3)^2}{a(1-x^2)^2} x - \frac{k - (x-b)\omega_3}{a(1-x^2)} \omega_3 - c = 0. \quad (13)$$

Здесь a , b и c – параметры шара

$$a = \frac{A}{C} \in [1/2, +\infty], \quad b = \frac{s}{r} \in (0, 1), \quad c = \frac{mgs}{C} \in (0, +\infty].$$

Критической точке $W(\theta)$ соответствуют решения уравнений движения шара на абсолютно гладкой плоскости вида

$$\begin{aligned} v_1 &= v(\cos \omega t \cos \omega_0 t - \sin \omega t \cos \theta \sin \omega_0 t), \\ v_2 &= v(-\cos \omega t \sin \omega_0 t - \sin \omega t \cos \theta \cos \omega_0 t), \\ v_3 &= v \sin \omega t \sin \theta, \\ \omega_1 &= \omega \sin \theta \sin \omega_0 t, \\ \omega_2 &= \omega \sin \theta \cos \omega_0 t, \\ \omega_3 &= \text{const}, \\ \gamma_1 &= \sin \theta \sin \omega_0 t, \\ \gamma_2 &= \sin \theta \cos \omega_0 t, \\ \gamma_3 &= \cos \theta, \\ N &= mg, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\omega = \frac{k - (x-b)\omega_3}{a(1-x^2)}, \quad \omega_0 = \omega_3 - \omega x. \tag{15}$$

Они определяют устойчивые регулярные прецессии вокруг центра масс, равномерно прямолинейно движущегося вдоль плоскости. При этом величина нормальной реакции опорной плоскости равна весу шара.

При $k = \omega_3(\pm 1 - s/r)$ соответствующие решения имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \pm 1, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \text{const}, \\ v_1 = v \sin \omega_3 t, \quad v_2 = v \cos \omega_3 t, \quad v_3 = 0, \quad N = mg, \end{aligned} \tag{16}$$

которым соответствуют равномерные вращения шара вокруг вертикально расположенной оси симметрии, равномерно движущейся вдоль плоскости. Решения (16) всегда устойчивы при наименьшем расположении центра масс шара ($\theta = 0$), а при наивысшем расположении центра масс ($\theta = \pi$) устойчивы при выполнении неравенства $\omega_3^2 \geq 4Amgs/C^2$ [12].

1.2. Плоскость с трением скольжения

Рассмотрим случай плоскости с вязким трением скольжения

$$\mathbf{F} = -\kappa \mathbf{u}, \quad \mathbf{M} = 0. \tag{17}$$

Тогда из рассмотренных в предыдущем параграфе стационарных движений реализуются только те, на которых проскальзывание отсутствует. Это равномерные вращения вокруг неподвижной вертикальной оси симметрии ((16) при $v = 0$) и регулярные прецессии вокруг неподвижного центра масс ((14) при $v = 0$), параметры которых полностью определяются постоянной интеграла Желле [4]:

$$\begin{aligned} \theta = \arccos y, \quad \omega_0 = -b\omega, \quad \omega = \frac{k}{a(1-y^2) + (y-b)^2}, \\ k^2 = c \frac{(a(1-y^2) + (y-b)^2)^2}{b - (1-a)y}, \end{aligned} \tag{18}$$

и справедливо равенство

$$\omega_3^2 = \frac{(b-y)^2 c}{(a-1)y + b}. \tag{19}$$

Полный параметрический анализ устойчивости этих решений и соответствующие диаграммы Смейла представлены в [3–4]. В частности, если параметры шара удовлетворяют равенствам

$$1 + b > a > \frac{1-b}{8} \left(7 + b\sqrt{1 + 14b + b^2} \right), \tag{20}$$

то вращения с наименьшим расположением центра масс ($y = 1$) устойчивы при $\omega^2 < \omega_+^2$ ($k^2 < k_+^2$), а с наивысшим ($y = -1$) – при $\omega^2 > \omega_-^2$ ($k^2 > k_-^2$), где

$$\omega_{\pm}^2 = c \frac{(1 \mp b)^2}{a \mp (1-b)}, \quad k_{\pm} = \omega_{\pm}(\pm 1 - b),$$

а прецессии всегда устойчивы. Соответствующая диаграмма Смейла представлена на рис. 1.

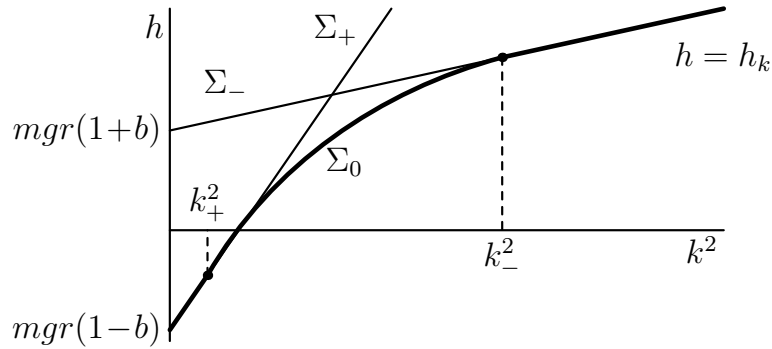


Рис. 1

Множества Σ_{\pm} и Σ_0 соответствуют вращениям $y = \pm 1$ и прецессиям соответственно, жирным кривым соответствуют устойчивые движения. В случае (20) каждому значению k соответствует ровно одно устойчивое движение, точные выражения для соответствующей зависимости $h = h_k(k)$ представлены в [3].

Все точки плоскости (k^2, h) , принадлежащие множеству $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_-$, инвариантны относительно фазового потока системы (1), а все остальные ($h > h_k$) эволюционируют вдоль прямой $k = \text{const}$ в сторону уменьшения h [13]. Это обстоятельство позволяет дать глобальный качественный анализ динамики шара [4]. Например, если в начальном положении ось шара почти вертикальна, центр масс близок к наинижнему положению, а начальная угловая почти сонаправлена с осью и достаточно велика (так, что k больше бифуркционного значения k_-), начальное положение точки на плоскости (k^2, h) лежит в окрестности Σ_+ правее прямой $k^2 = k_-^2$. Следовательно, при движении шара эта точка будет двигаться вдоль прямой $k^2 = \text{const}$ в сторону уменьшения h до тех пор, пока не достигнет множества Σ_- . Таким образом, в процессе движения ось динамической симметрии шара перевернется к вертикальному положению с наивысшим расположением центра масс, и шар будет равномерно вращаться вокруг нее. Аналогичным образом определяется финальное движение шара при любых начальных условиях.

Для исследования описанных переходных процессов заметим, что при $\mathbf{M} = 0$ на решениях системы (1) справедливо равенство

$$\dot{\omega}_3 = \frac{r}{C}([\mathbf{F}, \boldsymbol{\gamma}], \mathbf{e}_3). \tag{21}$$

Откуда в предположении о малости трения следует, что ω_3 является медленной переменной, а приближенное уравнение, описывающее ее изменение, может быть получено подстановкой вместо быстрых переменных соответствующих периодических или почти периодических решений исходной системы, найденных в предположении о постоянстве медленной переменной [14,15], т.е. соответствующих стационарным движениям шара на абсолютно гладкой плоскости.

Например, если начальные условия лежат в окрестности неустойчивых вращений, то в качестве порождающих решений можно выбрать (14) с учетом (15), (13). Тогда из (21) полагая $v = 0$ получим

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_3 &= -\kappa \frac{r^2}{A} \Phi(\omega_3), \\ \Phi(\omega_3) &= (b-x)k + (a(1-x^2) + (b-x)^2) \omega_3, \end{aligned} \tag{22}$$

где при $\omega_3 \neq k\sigma_{\pm}$, $\sigma_{\pm} = (\pm 1 - b)^{-1}$ зависимость $x = x(\omega_3)$ определяется равенствами (13), а при $\omega_3 = k\sigma_{\pm}^k$ следует положить $x = \pm 1$ ($\dot{\omega}_3 = 0$).

В силу соотношений (1) справедливо неравенство $\omega_3/k \geq \sigma_-$, откуда следует, что функция $\Phi(\omega_3)$ не меняет знак. Кроме того, она обращается в ноль только в точках $\omega_3 = k\sigma_{\pm}$, и

решение (22) стремится к $k\sigma_{\pm}$ при начальных условиях $\omega_3(0) \geq k\sigma_+$ ($\omega_3(0) \leq k\sigma_+$) в случае $k > 0$ ($k < 0$).

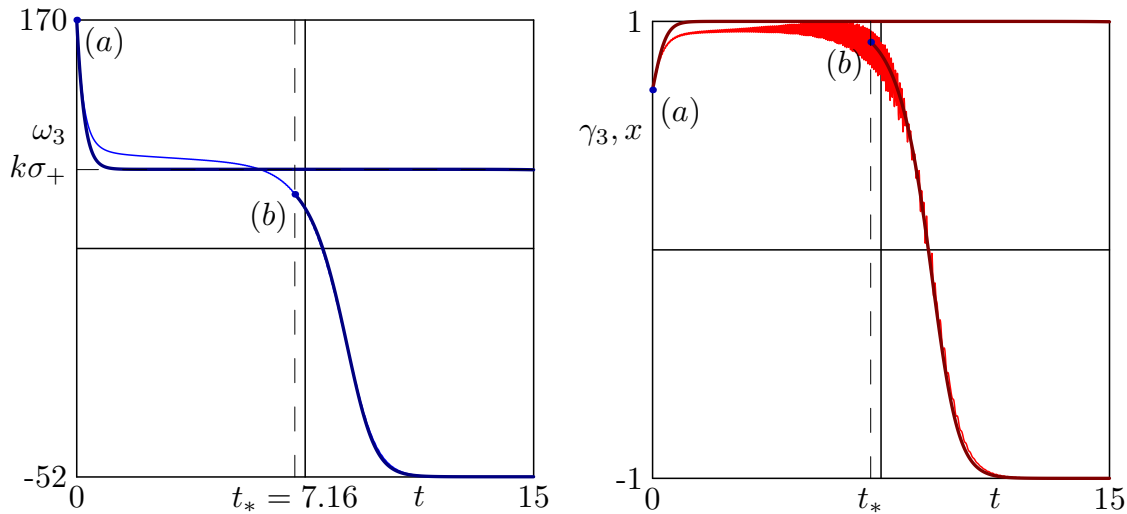


Рис. 2

На рис. 2 представлены результаты численного интегрирования уравнений движения шара с параметрами (соответствующих условиям (20))

$$a = 1, \quad b = 1/3, \quad c = 300 \text{ c}^{-1} \quad (23)$$

на плоскости с коэффициентом трения $\kappa = 0.1 \text{ кг/с}$ при начальных условиях

$$\mathbf{v}(0) = 0, \quad \gamma_3(0) = 0.7, \quad \gamma_1(0) = 0, \quad \omega_3(0) = 170 \text{ рад/с}, \quad \omega_1(0) = \omega_2(0) = 0 \quad (24)$$

(начальное значение $\gamma_2(0)$ определяется геометрическим интегралом) – зависимость от времени проекции угловой скорости шара на ось динамической симметрии ω_3 и косинуса угла нутации γ_3 (тонкие кривые). Начальные условия (24) соответствуют начальному положению точки плоскости (k^2, h) выше прямой Σ_+ и правее бифуркационного значения k_-^2 . Как и следовало ожидать, в численном эксперименте наблюдается переход к неустойчивым вращениям с наимизшим расположением центра масс с последующим переходом к устойчивым вращениям с наивысшим его расположением.

Жирными кривыми на рис. 2 обозначены численные решения приближенного уравнения (22) с начальными условиями

$$\begin{aligned} \omega_3(0) &= 170 \text{ рад/с}, & (a) \\ \omega_3(t_*) &= 85 \text{ рад/с}, & (b) \end{aligned} \quad (25)$$

и соответствующего закона изменения косинуса угла нутации. Начальные условия (25а) соответствуют (24), а соответствующее решение (22) – переходу к неустойчивому вращению. Значение t_* определялось из условия равенства (25б) при численном интегрировании уравнений движения шара с начальными условиями (24). Решение (22) с начальными условиями (25б) соответствует последующему переходу от неустойчивого вращения к устойчивому.

Рассмотрим теперь случай, когда начальные условия находятся не только в окрестности окрестности неустойчивых вращений (16) (при $v = 0$), а в окрестности любых решений (14) (с учетом (15), (13)), отличных от (18). В этом случае из равенства (9) можно заключить, что при малом трении v так же, как и ω_3 является малой величиной, что позволяет построить соответствующее приближенное уравнение.

Из (21), (9) получим

$$\begin{aligned} \dot{v} &= -\kappa \frac{v}{m} - \kappa \frac{r}{ma} \Phi(\omega_3) \frac{\cos \omega t}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \dot{\omega}_3 &= -\kappa \frac{r}{C} v \sqrt{1-x^2} \cos \omega t - \kappa \frac{r^2}{A} \Phi(\omega_3), \end{aligned} \quad (26)$$

где величина ω определяется первым равенством (15), т.е.

$$\omega = \begin{cases} \frac{-\sqrt{4ac(bx-1)(-x+b)} + k^2 - k}{2a(bx-1)}, & \frac{\omega_3}{k} \in (\sigma_-, \sigma_+), \\ \frac{\sqrt{4ac(bx-1)(-x+b)} + k^2 - k}{2a(bx-1)}, & \frac{\omega_3}{k} \in (\sigma_+, +\infty). \end{cases} \quad (27)$$

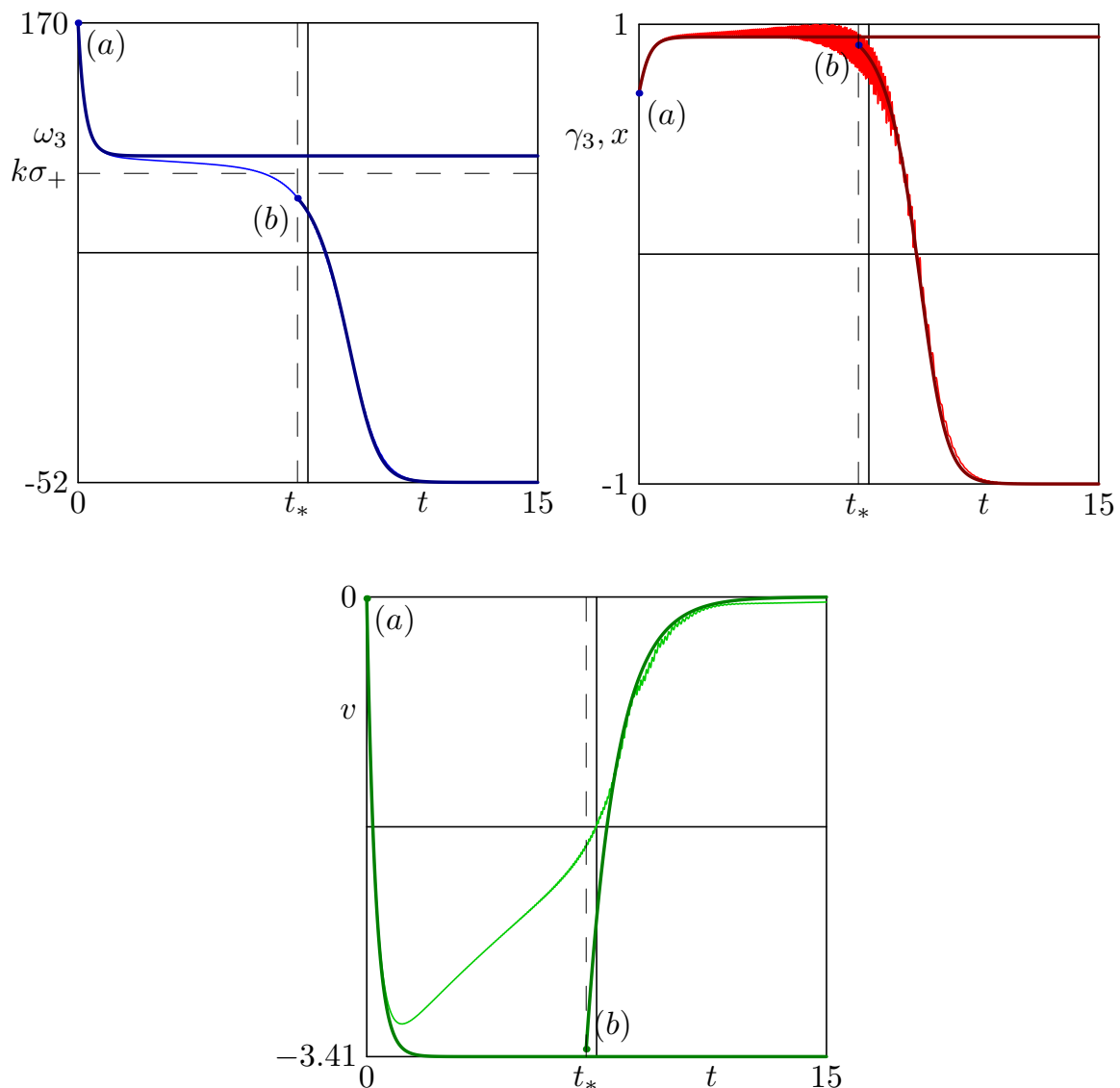


Рис. 3

Из равенства (27) при движении в области $\omega_3/k < \sigma_+$ следует, что абсолютная величина ω достаточно велика и ωt является быстрой величиной. Осредняя уравнение (26) по времени, получим то же уравнение (21) и равенство $\dot{v} = -kv/m$. Таким образом, на основном переходе от множества Σ_+ к множеству Σ_- , величина v экспоненциально стремится к нулю, не оказывая влияния на изменение ориентации шара. Если же начальная точка плоскости (k^2, h) лежит выше множества σ_+ и правее прямой $k^2 = k_-^2$, то величина ω достаточно мала, вследствие чего величина v оказывает влияние на изменение ω_3 . Этим объясняется отклонение решения уравнений (22) от решения полной системы уравнений. На рис. 3 представлены решения системы (26) при начальных условиях $v(0) = 0$ м/с, (25а)

и системы (26) при начальных условиях $v(t_*) = -3.4$ м/с, (25b), а также соответствующие решению полных уравнений движения шара величины.

В заключение заметим, что учет момента трения верчения [16] позволяет описать рассматриваемый переходной процесс без задержки на неустойчивом вращении.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-01-00140, 18-01-00335) и Программы фундаментальных научных исследований по приоритетным направлениям, определяемым Президиумом Российской академии наук, № 7 «Новые разработки в перспективных направлениях энергетики, механики и робототехники».

Литература

1. *Контенсу П.* Связь между трением скольжения и трением верчения в её учет в теории волчка // Проблемы гироскопии. Москва : Мир, 1967. С. 60–77.
2. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin : Springer, 1971 = *Магнус К.* Гироскоп. Теория и применение. Москва : Мир, 1974. 526 с.
3. *Карпетян А.В.* Качественное исследование волчка на плоскости с трением // ПММ. 1991. Т. 55, № 4. С. 698–701.
4. *Карпетян А.В.* Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. Т. 43, № 3. С. 33–41.
5. *Карпетян А.В.* Инвариантные множества механических систем с симметрией // Проблемы устойчивости и управления. Сборник научных статей, посвященный 80-летию академика Владимира Мефодьевича Матросова. Москва : Физматлит, 2013. С. 184–210.
6. *Климов Д.М., Журавлёв В.Ф.* О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Механика твердого тела. 2005. Т. 40, № 6. С. 157.
7. *Зобова А.А.* Различные модели трения в динамике двусферического волчка // Известия РАН. Механика твердого тела. 2013. № 2. С. 21–28.
8. *Zobova A.A., Karapetyan A.V.* Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns // Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. P. 1007–1013.
9. *Карпетян А.В.* Качественный анализ динамики диссипативных систем с симметрией на основе метода обобщенных диаграмм Смейла // Современные проблемы математики и механики. Том 2. Механика. Выпуск 2. Москва : Изд-во МГУ, 2009. С. 192–200.
10. *Карпетян А.В.* Обобщенные диаграммы Смейла и их применение к задачам динамики систем с трением // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Тр. 10-й Междунар. Четаевской конф. Т. 1. Секц. 1. Аналитическая механика. Казань, 2012. Казань : Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. С. 247–258.
11. *Jellet J.H.* A treatise on the theory of friction. Dublin; London : Macmillan, 1872. 230 p.
12. *Карпетян А.В.* Об устойчивости стационарных движений тяжелого твердого тела на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости // ПММ. 1981. Т. 45, № 3. С. 504–511.
13. *Карпетян А.В.* Устойчивость стационарных движений. Москва : Эдиториал УРСС, 1988. 165 с.
14. *Моргунов Б.И.* Волосов В.М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Москва : МГУ, 1971. 508 с.
15. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. Москва : Физматлит, 1994. 400 с.

16. *Муницына М.А.* Переходные процессы в динамике волчка тип-топ // ПММ. 2020. Т. 84, вып. 4. С. 426–434.

References

1. *Kontesy P.* The relationship between sliding friction and spinning friction into account in theory spinning top. Gyroscopy problems. Moscow : Mir, 1967. P. 60–77. (in Russian).
2. *Magnus K.* Kreisel. Theorie und Anwendungen. Berlin: Springer, 1971 = *Magnus K.* Gyroscop. Theory and application. Moscow : Mir, 1974. 526 p.
3. *Karapetyan A. V.* Qualitative investigation of the dynamics of a top on a plane with friction. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1991. V. 55, N 4. P. 698–701. (in Russian).
4. *Karapetyan A. V.* Global qualitative analysis of Tippe-top dynamics. Mechanics of Solids. 2008. V. 43, N 3. P. 33–41. (in Russian).
5. *Karapetyan A. V.* Invariantnye mnozhestva mehanicheskikh sistem s simmetriej. Problemy ustojchivosti i upravleniia. Sbornik nauchnyh statej, posviashchennyj 80letiiu akademika Vladimira Mefod'evicha Matrosova. Moscow : Fizmatlit, 2013. P. 184–210. (in Russian).
6. *Klimov D.M., Zhuravlev V.P.* On the dynamics of the thompson top (tippe top) on the plane with real dry friction. Mechanics of Solids. 2005. V. 40, N 6. P. 117. (in Russian).
7. *Zobova A.A.* Various friction models in two-sphere top dynamics. Izvestiya RAS. Mechanics of Solids. 2013. V. 48, N 2. P. 21–28. (in Russian).
8. *Zobova A.A., Karapetyan A.V.* Tippe-top on visco-elastic plane: steady-state motions, generalized Smale diagrams and overturns. Lobachevskii J. Math. 2017. V. 38. P. 1007–1013.
9. *Karapetyan A. V.* Kachestvennyj analiz dinamiki dissipativnyh sistem s simmetriej na osnove metoda obobshchennyh diagramm Smejla. Sovremennye problemy na tematiki i mehaniki. Tom 2. Mehanika. Vypusk 2. Moscow : Izd-vo MGU, 2009. P. 192–200. (in Russian).
10. *Karapetyan A. V.* Obobshchennye diagrammy Smejla i ih primenenie k zadacham dinamiki sistem s treniem. Analiticheskaja mehanika, ustojchivost' i upravlenie: Tr. 10-j Mezhdunar. SHetaevskoj konf. T. 1. Sekc. 1. Analiticheskaja mehanika. Kazan, 2012. Kazan : Izd-vo Kazan. gos. tehn. un-ta, 2012. P. 247–258. (in Russian).
11. *Jellet J.H.* A treatise on the theory of friction. Dublin; London : Macmillan, 1872. 230 p.
12. *Karapetyan A. V.* On stability of steady state motions of a heavy solid body on an absolutely rough horizontal plane. Applied Mathematics and Mechanics. 1981. V. 45, N 3. P. 504–511. (in Russian).
13. *Karapetyan A. V.* Stability of steady motions. Moscow : Editorial URSS, 1998. 165 p. (in Russian).
14. *Morgunov B.I. Volosov V.M.* Metod osredneniia v teorii nelinejnyh kolebatel'nyh sistem. Moscow : MGU, 1971. 508 p. (in Russian).
15. *Blehtman I.I.* Vibracionnaia mehanika. Moscow : Fizmatlit, 1994. 400 p. (in Russian).
16. *Munitsyna M.A.* Transition processes in tippe-top dynamics. Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2020. V. 84. N 4. P. 426–434. (in Russian).

Поступила в редакцию 16.07.2020