Задачи олимпиады по теоретической физик МФТИ

24 апреля 2021 г.

1 Энергия в лагранжевой механике с высшими производными (М.Г. Иванов)

Условие задачи

Дано действие с высшими производными

$$S[x_\alpha(t)] = \int_{t_1}^{t_0} L(x_\alpha, \dot{x}_\alpha, \ddot{x}_\alpha, \ldots, x_\alpha^{(n)}, t)\, dt, \quad \dot{x}_\alpha = \frac{dx_\alpha}{dt}, \quad \ddot{x}_\alpha = \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}, \quad \ldots \quad x_\alpha^{(n)} = \frac{d^n x_\alpha}{dt^n}. \tag{1}$$

1) Из принципа экстремального действия найдите уравнения движения.

2) Определите энергию через функцию L.

3) Вычислите для определённой вами энергии $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ при условии выполнения уравнений движения.

4) Убедитесь, что для автономного лагранжиана (при $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$) введённая энергия сохраняется.

5) Выпишите уравнения движения и энергию в частном случае $n = 2$.

6) Проверьте, что предложенное определение энергии работает для лагранжиана вида

$$L(x, \dot{x}, \ddot{x}) = -\frac{m\, x\ddot{x}}{2} - U(x). \tag{2}$$

Решение

Уравнения движения для действия (1) имеют вид

$$\frac{\delta S}{\delta x_\alpha} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{d^i}{dt^i} \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(i)}} = \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_\alpha} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(n)}} = 0. \tag{3}$$

Мы можем понизить порядок дифференциального уравнения рассмотрев производные с нулевой по $n-1$-ю в качестве новых координат $x_{\alpha,i} = x_\alpha^{(i-1)}$, $i = 1, \ldots, n$.

С помощью неопределённых множителей Лагранжа мы можем ввести лагранжиан без высших производных, который даст те же уравнения движения, что и исходное действие (1).

$$L_\lambda(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, \lambda_{\alpha,i}, t) = L(x_{\alpha,1}, x_{\alpha,2}, \ldots, x_{\alpha,n}, \dot{x}_{\alpha,n}, t) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_\alpha \lambda_{\alpha,i}(\dot{x}_{\alpha,i} - x_{\alpha,i+1}). \tag{4}$$

Соответствующее действие

$$S_\lambda[x_{\alpha,i}(t), \lambda_{\alpha,i}(t)] = \int L_\lambda(x_{\alpha,i}, \dot{x}_{\alpha,i}, \lambda_{\alpha,i}, t)\, dt \tag{5}$$

при вариации даёт следующие уравнения движения

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_\lambda}{\delta \lambda_{\alpha,i}} &= \dot{x}_{\alpha,i} - x_{\alpha,i+1} = 0, \quad i = 1,\dots,n-1 && (6)\\
\frac{\delta S_\lambda}{\delta x_{\alpha,1}} &= \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha,1}} - \frac{d\lambda_{\alpha,1}}{dt} = 0, && (7)\\
\frac{\delta S_\lambda}{\delta x_{\alpha,i}} &= \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha,i}} - \lambda_{\alpha,i-1} - \frac{d\lambda_{\alpha,i}}{dt} = 0, \quad i = 2,\dots,n-1 && (8)\\
\frac{\delta S_\lambda}{\delta x_{\alpha,n}} &= \frac{\partial L}{\partial x_{\alpha,n}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,n}} - \lambda_{\alpha,n-1} = 0. && (9)
\end{aligned}$$

Мы можем стандартным образом (поскольку от высших производных мы уже избавились) определить импульсы

$$p_{\alpha,i} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_{\alpha,i}} = \lambda_{\alpha,i}, \quad i = 1,\dots,n-1 \qquad p_{\alpha,n} = \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_{\alpha,n}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,n}}. \tag{10}$$

и энергию

$$\mathcal{E}_\lambda = \sum_{i=1}^{n}\sum_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}p_{\alpha,i} - L_\lambda = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_\alpha \dot{x}_{\alpha,i}\lambda_{\alpha,i} + \dot{x}_{\alpha,n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,n}} - L_\lambda = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_\alpha x_{\alpha,i+1}\lambda_{\alpha,i} + \dot{x}_{\alpha,n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha,n}} - L \tag{11}$$

Уравнение баланса энергии имеет обычный вид

$$\frac{d\mathcal{E}_\lambda}{dt} = -\frac{\partial L_\lambda}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{12}$$

потому, что мы получили эту энергию из лагранжиана без высших производных.

Осталось избавиться от лишних переменных. Из уравнений (6) получаем

$$x_{\alpha,i} = x_\alpha^{(i-1)}, \quad \text{где} \quad x_\alpha = x_{\alpha,1}.$$

Из уравнений (8)–(9), решая их в обратном порядке выражаем лагранжевы множители $\lambda_{\alpha,i}$:

$$\begin{aligned}
\lambda_{\alpha,n-1} &= \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(n-1)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha^{(n)}},\\
\lambda_{\alpha,n-2} &= \frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(n-2)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha^{(n-1)}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha^{(n)}},\\
&\cdots\\
\lambda_{\alpha,i} &= \sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(i+j)}}, \quad i = 1,\dots,n-1 && (13)
\end{aligned}$$

Уравнение (7) после подстановки $\lambda_{\alpha,1}$ воспроизводит уравнения движения для исходного лагранжиана с высшими производными (3), мы обосновали тем самым переход от действия (1) к действию (5) (впрочем, этот переход и без того обоснован применением метода множителей Лагранжа). Выражение в левой части (3) имеет вид $\lambda_{\alpha,0}$, вычисленного по формуле (13).

Также по формуле (13) может быть вычислено $p_{\alpha,n} = \lambda_{\alpha,n}$. Т.е. мы можем определить $\lambda_{\alpha,i}$ при $i = 0, 1, \dots, n$.

Окончательно получаем

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n}\sum_\alpha x_\alpha^{(i)}\lambda_{\alpha,i} - L, \qquad \lambda_{\alpha,i} = \sum_{j=0}^{n-i}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial L}{\partial x_\alpha^{(i+j)}}. \tag{14}$$

Полученная энергия (14) уже не содержит вспомогательных переменных и полностью выражена в терминах исходного лагранжиана.

При $n = 2$

$$\mathcal{E} = \sum_\alpha \left[\dot{x}_\alpha \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\alpha} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_\alpha}\right) + \ddot{x}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}^\alpha}\right] - L.$$

Для лагранжиана (2) получаем обычное выражение для энергии нерелятивистской частицы в потенциале:

$$\mathcal{E} = \dot{x}_\alpha \left(-\frac{d}{dt}\left[-\frac{mx}{2}\right]\right) + \ddot{x}_\alpha \left[-\frac{mx}{2}\right] - \left(-\frac{mx\ddot{x}}{2} - U(x)\right) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x).$$

Это неудивительно, ведь лагранжиан (2) сводится к стандартному (кинетическая энергия минус потенциальная) добавлением полной производной по времени.

Альтернативные способы решения

1) По аналогии с выводом уравнения Гамильтона-Якобы мы можем догадаться, что

$$\mathcal{E} = \frac{dS}{dt},$$

где полная производная по времени берётся вдоль траектории, удовлетворяющей уравнению движения.

То, что данная догадка верна следует из приведённого выше решения, которое сводит задачу с высшими производными к стандартному лагранжевому формализму без высших производных. В случае если эта догадка взята за основу, после нахождения выражения для энергии следует сделать проверку и убедиться, что $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$.

2) По аналогии с обычной энергией можно искать энергию из уравнения

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Сведение $\frac{\partial L}{\partial t}$ к полной производной по времени требует аккуратных вычислений, но некоторые участники смогли пройти этот путь.

2 Протоны солнечного ветра на экваторе (В.П. Крайнов)

Условие задачи

Протон солнечного ветра с кинетической энергией $\mathcal{E}$ движется в плоскости магнитного экватора Земли. Магнитный момент Земли равен μ.

1) Найти *сепаратрису* — неустойчивую траекторию, разделяющую финитные и инфинитные траектории.

2) Найти уходящую на бесконечность траекторию, для которой момент импульса частицы на бесконечности стремится к нулю.

Решение (В.П. Крайнов, М.Г. Иванов)

Рассмотрим движение нерелятивистской заряженной частицы с зарядом q и массой m в магнитном поле диполя $\boldsymbol{\mu} = (0, 0, \mu)$, расположенного в начале координат. Частица совершает движение в плоскости $x - y$.

Функция Лагранжа имеет вид

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}\big(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{A}(\mathbf{r})\big)$$

С учётом того, что потенциал магнитного диполя и момент механического импульса имеют вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{[\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{r}]}{r^3}, \qquad \mathbf{l} = m[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}],$$

Получаем

$$L(\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}\frac{\big(\dot{\mathbf{r}},[\boldsymbol{\mu}\times\mathbf{r}]\big)}{r^3} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}\frac{\big(\boldsymbol{\mu},[\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}]\big)}{r^3} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{q}{mc}\frac{\big(\boldsymbol{\mu},\mathbf{l}\big)}{r^3} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{q}{mc}\frac{\mu l_z}{r^3}.$$

В полярных координатах на плоскости $x-y$ имеем $l_z = mr^2\dot{\varphi}$.

$$L(r,\varphi,\dot{r},\dot{\varphi}) = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} + \frac{q\mu}{c}\frac{\dot{\varphi}}{r}.$$

Поскольку функция Лагранжа не зависит от времени и φ, мы получаем два закона сохранения.

Закон сохранения энергии

$$\mathcal{E} = \frac{m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}{2} = \frac{mV_0^2}{2} = \text{const},$$

и закон сохранения импульса по координате φ (этот импульс представляет собой проекцию момента обобщённого импульса заряженной частицы на ось z)

$$L_z = p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} + \frac{q\mu}{cr} = l_z + \frac{q}{c}A_\varphi.$$

Отсюда

$$\dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2} - \frac{q\mu}{cmr^3} = \frac{L_z}{mr^3}\left(r - \frac{q\mu}{cL_z}\right).$$

Мы видим, что угловая скорость $\dot{\varphi}$ обращается в нуль при $r = r_0 = \frac{q\mu}{cL_z}$. Угловая скорость не обращается в нуль тогда и только тогда, когда $r_0 \ll 0$. Мы рассмотрим пороговое значение $r_0 = +\infty$, т.е. $L_z = 0$.

Исключим из выражения для энергии угловую скорость

$$\mathcal{E} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{1}{2mr}\left(L_z - \frac{q\mu}{c}\frac{1}{r}\right)^2.$$

Сепаратриса

Эффективная потенциальная энергия имеет вид

$$U(r) = \frac{1}{2mr}\left(L_z - \frac{q\mu}{c}\frac{1}{r}\right)^2.$$

Найдём равновесные значения r

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial 1/r} &= -\frac{1}{r^2}\frac{1}{2m}\left\{\left(L_z - \frac{q\mu}{c}\frac{1}{r}\right)^2 + \frac{1}{r}2\left(L_z - \frac{q\mu}{c}\frac{1}{r}\right)\left(-\frac{q\mu}{c}\right)\right\} = \\ &= -\frac{1}{r^2}\frac{1}{2m}\left(L_z - \frac{q\mu}{c}\frac{1}{r}\right)\left(L_z - 2\frac{q\mu}{c}\frac{1}{r}\right)\end{aligned}$$

$$r_1 = \frac{q\mu}{cL_z}, \qquad r_2 = 2r_1 = \frac{2q\mu}{cL_z}.$$

Поскольку на больших расстояниях $U(r) > 0$ убывает как $\frac{1}{r}$, то r_2 — максимум, а r_1 — минимум. Сепаратриса соответствует неустойчивому равновесному значению радиуса, т.е. максимуму $U(r)$

$$r(t) = r_2 = \frac{2q\mu}{cL_z} = \text{const},$$

$$r_2 L_z = \frac{2q\mu}{c} = mr_2^2 V_0 + \frac{q\mu}{c} \quad \Rightarrow \quad r_2 = \sqrt{\frac{q\mu}{cmV_0}}, \quad \dot{\varphi} = \frac{V_0}{r_2} = \sqrt{\frac{cmV_0^3}{q\mu}}.$$

Траектория уходящая на бесконечность с $l_z = 0$

Чтобы найти уравнение траектории в полярных координатах $r(\varphi)$ перейдём от дифференцирования по времени к дифференцированию по углу, при этом удобно заменить радиальную переменную $r = \rho^{-1}$

$$\dot{r} = \dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi} = \left(\frac{L_z}{mr^2} - \frac{q\mu}{cmr^3}\right)\frac{dr}{d\varphi} = \left(\frac{L_z}{m}\rho^2 - \frac{q\mu}{cm}\rho^3\right)\frac{d\rho^{-1}}{d\varphi} = \frac{1}{m}\left(\frac{q\mu}{c}\rho - L_z\right)\frac{d\rho}{d\varphi}.$$

Теперь энергия имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2m}\left(\frac{q\mu}{c}\rho - L_z\right)^2 \left\{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2\right\}.$$

Обозначим

$$\epsilon = \frac{2mc^2}{q^2\mu^2}\mathcal{E} = r_2^{-4}, \qquad \lambda = \frac{c}{q\mu}L_z.$$

Получаем

$$r_2^{-4} = (\lambda - \rho)^2 \left\{\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 + \rho^2\right\}.$$

Мы можем обезразмерить уравнение, положив

$$2\gamma = -\lambda r_2 = -\sqrt{\frac{c}{|q\mu|}}\frac{L_z}{\sqrt[4]{2m\mathcal{E}}}, \qquad \xi = \rho r_2 = \sqrt{\frac{|q\mu|}{c}}\frac{\rho}{\sqrt[4]{2m\mathcal{E}}}$$

$$1 = (2\gamma + \xi)^2 \left\{\left(\frac{d\xi}{d\varphi}\right)^2 + \xi^2\right\}.$$

(Для сепаратрисы $\gamma = -1$.)

Получается уравнение с разделяющимися переменными, легко решающееся в квадратурах

$$\frac{d\xi}{d\varphi} = \sqrt{\frac{1}{(2\gamma+\xi)^2} - \xi^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1}{(2\gamma+\xi)^2} - \xi^2}}.$$

В пороговом случае $L_z = \gamma = 0$ интеграл легко берётся аналитически

$$\varphi = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{1}{\xi^2} - \xi^2}} = \int \frac{\xi d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}} = \frac{1}{2}\arcsin(\xi^2) + \varphi_0$$

Поворотом системы координат мы можем положить $\varphi_0 = 0$.

$$r(\varphi) = \rho^{-1} = \frac{r_2}{\sqrt{\sin(2\varphi)}}.$$

Чтобы идентифицировать полученную кривую перейдём обратно в декартовы координаты

$$x = r\,\cos\varphi = r_2\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}}, \qquad y = r\,\sin\varphi = r_2\sqrt{\frac{1}{2}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}.$$

Мы получили гиперболу асимптоты которой пересекаются в начале координат под прямым углом:

$$x\cdot y = \frac{r_2^2}{2} = \frac{|q\mu|}{2c}\frac{1}{\sqrt{2m\mathcal{E}}} = \frac{|q\mu|}{2mc}\frac{1}{V_0} = \mathrm{const}.$$

3 Электроны в нанотрубке (В.П. Крайнов)

Условие задачи

Одномерная задача взаимодействующих пи-электронов в углеродной одностенной нанотрубке качественно моделируется двумя электронами в притягивательном дельта-функционном внешнем потенциале и их дельта-функционным отталкиванием друг от друга. Используя вариационное приближение, найти энергию основного состояния.

Решение

Стационарное уравнение Шредингера для двух взаимодействующих электронов в дельта-яме имеет вид (здесь и далее полагаем $\hbar = m = 1$)

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) + U\,\delta(x_1 - x_2) - k\left[\delta(x_1) + \delta(x_2)\right]. \qquad (15)$$

Амплитуда $U > 0$ моделирует короткодействующее отталкивание этих электронов друг от друга. Далее временно положим $k = 1$.

Пространственно симметричная волновая функция двух электронов основного состояния с полным спином $S = 0$ берется в вариационной форме, обобщающей хорошо известное простое решение в одномерной дельта-яме для одной частицы:

$$\Psi(x_1, x_2) = A\left(\mathrm{e}^{-\alpha|x_1|-\beta|x_2|} + \mathrm{e}^{-\alpha|x_2|-\beta|x_1|}\right). \qquad (16)$$

Если $U = 0$, получаем $\alpha = \beta = 1$, и полная энергия двух электронов $E = ?1$. Величины $1/\alpha$ и $1/\beta$ характеризуют среднее расстояние соответствующего электрона от дельта-ямы.

Из вариационного расчета с волновой функцией (16) следует, что полная энергия состояния равна

$$E = \alpha\beta - \alpha - \beta + 2U\frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2 + \beta^2 + 6\alpha\beta}.$$

Минимизируя ее по вариационным параметрам, получим два уравнения:

$$1 = \alpha + 2U\frac{\alpha^2(\alpha^2 + 2\alpha\beta + 5\beta^2)}{(\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2)^2};$$

$$1 = \beta + 2U\frac{\beta^2(5\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2)}{(\alpha^2 + 6\alpha\beta + \beta^2)^2}.$$

Они имеют простое решение (восстановлены обычные единицы):

$$\alpha = \beta = 1 - \frac{mU}{4\hbar^2 k^2}.$$

Полная энергия системы двух электронов равна

$$E(U) = -\frac{\hbar^2 k^2}{m} + \frac{U}{2} - \frac{mU^2}{16\hbar^2 k^2}.$$

Из него следует, что при увеличении отталкивания энергия электронов увеличивается, и при $U = 4k^2\hbar^2/m$ они вылетают в непрерывный спектр: $\alpha = \beta = 0$; $E = 0$.

4 Геометрия квантовых газов (А.А. Пухов)

Условие задачи

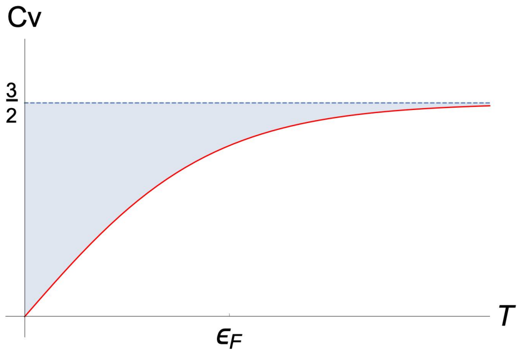

Рис. 1

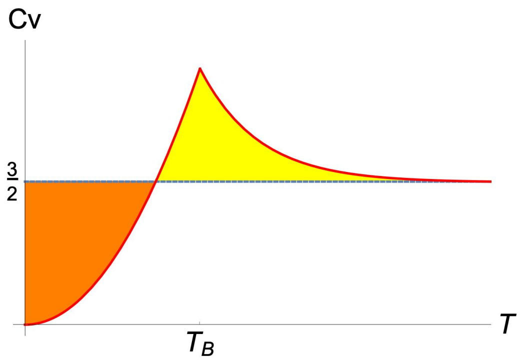

Рис. 2

1. На рис.1 изображена зависимость теплоемкости $c_V(T)$ идеального электронного газа (в расчете на один электрон) от температуры T. Энергия Ферми газа равна ε_F. Чему равна выделенная на рис.1 серым цветом площадь?

2. На рис.2 изображена зависимость теплоемкости $c_V(T)$ идеального бесспинового бозе-газа (в расчете на один атом) от температуры T. Температура бозе-конденсации газа равна T_B. Покажите, что выделенные на рис.2 разными цветами площади равны. Чему равна каждая из этих площадей?

Решение

1. Выделенная серым цветом площадь равна

$$\Pi = \int\limits_0^\infty \left(\frac{3}{2} - c_V(T)\right) dT = \int\limits_0^\infty \left(\frac{de_{\text{кл}}}{dT} - \frac{de_{\text{кв}}}{dT}\right) dT = (e_{\text{кл}}(T) - e_{\text{кв}}(T))|_0^\infty = e_{\text{кв}}(0), \tag{17}$$

где введены в расчете на один электрон энергия невырожденного (классического) газа $e(T) = \frac{3}{2}T$ и энергия вырожденного (квантового) газа $e_{\text{кв}}(T) = \int\limits_0^T c_V(T')dT'$. Поскольку $e_{\text{кл}}(\infty) - e_{\text{кв}}(\infty) = 0$, $e_{\text{кл}}(0) = 0$, а энергия, приходящаяся на один электрон заполненной ферми-сферы при $T = 0$ равна $e_{\text{кв}}(0) = \frac{3}{5}\varepsilon_F$, для выделенной серым цветом площади получаем $\Pi = \frac{3}{5}\varepsilon_F$.

2. Действуя аналогично, с учетом того, что для бозе-газа $e_{\text{кв}}(0) = 0$, для алгебраической площади Π между асимптотой $c_V = \frac{3}{2}$ и кривой $c_V(T)$ получаем $\Pi = 0$. Таким образом, выделенные оранжевым Π_* и желтым Π_{**} цветом площади равны $\Pi_* = \Pi_{**}$. Проще вычислить оранжевую площадь Π_*. Поскольку теплоемкость бозе-газа ниже точки конденсации $T < T_B$ равна $c_V(T) = \frac{15\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}{4\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\frac{T}{T_B}\right)^{\frac{3}{2}} = 1,92 \cdot \left(\frac{T}{T_B}\right)^{\frac{3}{2}}$, кривая теплоемкости $c_V(T)$ пересекает асимптоту $c_V = \frac{3}{2}$ при условии $c_V(T_*) = \frac{3}{2}$, то есть при температуре $T_* = 0,85 \cdot T_B$. Выделенная оранжевым цветом (ниже прямой) площадь равна

$$\Pi_* = \int\limits_0^{T_*} \left(\frac{3}{2} - 1,92 \cdot \left(\frac{T}{T_B}\right)^{\frac{3}{2}}\right) dT = 0,93 \cdot T_B \tag{18}$$

Выделенная желтым цветом (выше прямой) площадь Π_{**} такая же, $\Pi_{**} = 0,93 \cdot T_B$.