УДК 533.6.011

В. Н. Голубкин[1,2], *Г. Б. Сизых*[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)
[2]Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н. Е. Жуковского

Экстремальные свойства давления в плоских дозвуковых течениях

На основе анализа уравнений Эйлера исследованы плоские стационарные дозвуковые течения идеального совершенного газа в ограниченных областях. Рассмотрены как безвихревые, так и вихревые течения. В предположении, что давление в рассматриваемой области не постоянно, скорость не обращается в ноль, а параметры течения (компоненты скорости, плотность и давление) дважды непрерывно дифференцируемы, получен следующий вывод. Максимум и минимум давления достигаются на границе и только на границе рассматриваемой области. Нарушение этого свойства экстремальных значений давления является достаточным признаком наличия либо точки торможения, либо звуковой точки.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, дозвуковые течения, вихревые течения, экстремальные свойства давления.

V. N. Golubkin[1,2], *G. B. Sizykh*[1]

[1]Moscow Institute of Physics and Technology (State University)
[2]Cent Aerohydrodynam Inst TsAGI

Property of the extreme pressure values in plane subsonic flows

Based on the analysis of the Euler equations, a steady plane subsonic flow of an ideal perfect gas is investigated. The flow in a bounded area is considered. The vorticity vector can be nonzero. It is assumed, that the pressure in the area under study is not constant, and parameters of the flow (velocity components, density and pressure) are twice continuously differentiable. The conclusion is: if the velocity does not vanish, the pressure maximum and minimum are achieved at the boundary and only at the boundary of the area. The violation of this property of the extreme pressure values is a sufficient indication of the presence of a stagnation point or a sound point.

Key words: Euler equations, subsonic flow, vortex flow, property of the extreme pressure values.

1. Введение

При исследовании экстремальных свойств газодинамических параметров, как правило [1—4], используются различные следствия теоремы Хопфа [5, 6]. Теорема Хопфа справедлива для определенного вида уравнений в частных производных эллиптического типа. Получение для выбранного газодинамического параметра «подходящего» уравнения представляет собой отдельную и, как правило, очень сложную задачу. В данной статье удалось найти «подходящее» уравнение для давления в плоском дозвуковом потоке газа без точек торможения.

В этой связи уместно упомянуть три известные в настоящее время теоремы об экстремальных свойствах течений газа. Первые две теоремы доказаны для стационарных безвихревых дозвуковых течений баротропного газа. Согласно первой теореме, которая верна в общем 3D-случае, модуль скорости не может достигать максимума во внутренних точках течения [1, гл. II]. Вторая теорема утверждает, что в плоских течениях без точек торможения невозможно достижение минимума модуля скорости во внутренних точках течения [7]. Третья теорема – это теорема о звуковой линии [8]. Она доказана для плоских стационарных безвихревых течений баротропного газа, в которых местное число Маха не превышает единицу. Согласно теореме о звуковой линии, если в таком течении есть внутренняя звуковая точка (точка, в которой местное число Маха равно единице), то через эту звуковую точку проходит прямая линия, целиком состоящая из звуковых точек. Эта линия в каждой точке перпендикулярна скорости газа и не может заканчиваться внутри потока.

Заметим, что все три перечисленные теоремы верны для безвихревых течений. Полученное в данной статье экстремальное свойство давления – первый принцип максимума, справедливый для вихревых течений газа.

2. Основные обозначения и уравнения движения

Обозначим: $\mathbf{V}$ – скорость, $\rho > 0$ – плотность, $k > 0$ – показатель адиабаты, $p = C\rho^k$ – давление (величина $C > 0$ постоянна вдоль линий тока). Стационарное движение газа с гладкими параметрами описывается уравнениями Эйлера, записанными, например, в форме Громеки–Ламба [9]:

$$[\mathbf{rot}\mathbf{V} \times \mathbf{V}] = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right), \qquad V = |\mathbf{V}|, \tag{1}$$

уравнением неразрывности:

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \tag{2}$$

и уравнением адиабатического движения частиц газа:

$$\mathbf{V}\cdot\nabla\left(\frac{p}{\rho^k}\right) = 0. \tag{3}$$

3. Дозвуковые течения без точек торможения

Рассмотрим дозвуковое течение внутри ограниченной плоской односвязной области G. Пусть во внутренних точках этой области параметры течения $(p,\ \rho,\ \mathbf{V})$ дважды непрерывно дифференцируемы. А на замыкании области G эти параметры непрерывны, и скорость газа не обращается в ноль. Давление и плотность в дозвуковых течениях также не обращаются в ноль. Тогда, в силу непрерывности, существуют положительные константы δ_V, δ_ρ, δ_p и δ_M, такие, что всюду выполнены неравенства

$$V \geqslant \delta_V > 0, \tag{4}$$

$$kp - \rho V^2 \geqslant \delta_M > 0, \tag{5}$$

$$\rho \geqslant \delta_\rho > 0, \tag{6}$$

$$p \geqslant \delta_p > 0. \tag{7}$$

Эти неравенства будут использованы для вывода об ограниченности коэффициентов уравнения в частных производных, которое будет получено ниже.

4. Необходимое условие совместности уравнений движения газа

Поскольку скорость ни в одной точке не обращается в ноль, во всей замкнутой области $\bar{G}$ можно ввести в этой области ортогональную систему естественных координат (O, s, n) так, чтобы равенства вида $n = \mathrm{const}$ задавали линии тока, а равенства вида $s = \mathrm{const}$ задавали линии, ортогональные линиям тока. Тогда $C = C(n)$. Пусть H_s и H_n – коэффициенты Ламе этой системы координат [10]. Поскольку компоненты скорости дважды непрерывно дифференцируемы и выполнено условие (4), то и коэффициенты Ламе будут дважды непрерывно дифференцируемы. В координатах (s, n) уравнения (1) и (2) представляют собой три следующие скалярные уравнения:

$$-\frac{V}{H_s H_n}\frac{\partial}{\partial n}(VH_s) = -\frac{1}{\rho H_n}\frac{\partial}{\partial n}p - \frac{1}{H_n}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{V^2}{2}\right),$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{1}{H_s}\frac{\partial}{\partial s}p + \frac{1}{H_s}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{H_s}\frac{\partial}{\partial s}(\rho V H_n) = 0.$$

С учетом (4), (6) и (3), перепишем эти уравнения в виде

$$\frac{1}{H_n}\frac{\partial}{\partial n}H_s = \frac{H_s}{H_n}\frac{1}{\rho V^2}\frac{\partial}{\partial n}p, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}V = -\frac{1}{\rho V}\frac{\partial}{\partial s}p, \tag{9}$$

$$\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial s}\ln\, p + \frac{\partial}{\partial s}\ln\, V + \frac{\partial}{\partial s}\ln\, H_n = 0. \tag{10}$$

Из (9) и (10) исключим $\frac{\partial}{\partial s}V$:

$$\frac{1}{H_s}\frac{\partial}{\partial s}H_n = \frac{H_n}{H_s}\frac{kp - \rho V^2}{kp\rho V^2}\frac{\partial}{\partial s}p. \tag{11}$$

Независимо от природы плоского течения для дважды непрерывно дифференцируемых коэффициентов Ламе справедливо дифференциальное равенство, доказательство которого можно найти в [11]:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{H_s}\frac{\partial}{\partial s}H_n\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{H_n}\frac{\partial}{\partial n}H_s\right) = 0. \tag{12}$$

С использованием формул (8) и (11) последнее равенство позволяет получить следующее необходимое условие совместности уравнений (8) и (11):

$$a_{11}\frac{\partial^2}{\partial s^2}p + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial n^2}p + b_1\frac{\partial}{\partial s}p + b_2\frac{\partial}{\partial n}p = 0, \tag{13}$$

где

$a_{11} = \frac{H_n}{H_s}\frac{kp-\rho V^2}{kp\rho V^2}$, $a_{22} = \frac{H_s}{H_n}\frac{1}{\rho V^2}$,

$$b_1 = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{H_n}{H_s}\frac{kp-\rho V^2}{kp\rho V^2}\right), \quad b_2 = \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{H_s}{H_n}\frac{1}{\rho V^2}\right).$$

Если уравнение (13) используется для поиска решения рассматриваемой задачи, то нельзя считать, что коэффициенты a_{11}, a_{22}, b_1 и b_2 являются известными функциями координат s и n. Однако если уравнение (13) используется для выяснения свойств решения задачи в предположении, что такое решение существует, то эти коэффициенты можно считать некоторыми известными функциями координат. Такой подход (считать коэффициенты известными функциями) неоднократно использовался в доказательствах, например в [1–4]. Учитывая неравенства (4) – (7), можно указать следующие свойства этих коэффициентов. Во-первых, они определены и ограничены во всех внутренних точках течения. Во-вторых, коэффициент a_{11} и произведение $a_{11}a_{22}$ отделены от нуля некоторыми положительными константами. Эти свойства будут использованы в следующем разделе.

5. Следствие теоремы Хопфа и принцип максимума давления

Для исследования свойств решений уравнения (13) воспользуемся следствием теоремы Хопфа, приведенным в монографии [7]. Сформулируем это следствие для двумерного случая, заменив обозначения упомянутой монографии: пространственные координаты будем обозначать символами s и n, а решение уравнения – символом p.

Следствие теоремы Хопфа. *Пусть коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1 и b_2 уравнения*

$$a_{11}\frac{\partial^2}{\partial s^2}p + 2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial s\partial n}p + a_{22}\frac{\partial^2}{\partial n^2}p + b_1\frac{\partial}{\partial s}p + b_2\frac{\partial}{\partial n}p = 0 \qquad (14)$$

определены в ограниченной области G и являются ограниченными функциями s и n. Пусть, далее, во всех точках области G коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы и существует константа $\delta > 0$, такая, что во всех точках области G выполняется неравенство

$$a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 \geqslant \delta. \qquad (15)$$

Тогда если решение $p \in C(\bar{G}) \cap C^2(G)$ уравнения (14) существует и если оно не постоянно на $\bar{G}$, то оно достигает как своего максимума, так и своего минимума на границе и только на границе области G.

У теоремы Хопфа есть еще два следствия. Они относятся к случаю, когда правая часть (14) не равна нулю. При прочих равных условиях одно из этих следствий утверждает, что если правая часть (14) неотрицательна, то решение (если оно не постоянно) достигает своего максимума на границе и только на границе области G. В другом следствии сформулирован аналогичный вывод о точках минимума для случая, когда правая часть (14) не положительна. Таким образом, именно приведенное выше следствие теоремы Хопфа (для нулевой правой части (14)) обеспечивает утверждения и относительно минимума, и относительно максимума. В связи с этим заметим, что применение операции div к обеим частям уравнения (1) также приводит к уравнению эллиптического типа. Но как в прямоугольной декартовой системе координат, так и во введенной выше системе естественных координат (O, s, n), это уравнение будет иметь вид уравнения (14) с нетривиальной правой частью. Вопрос о том, равна ли эта правая часть нулю или имеет определенный знак, остается в настоящее время открытым. И применение следствий теоремы Хопфа невозможно. В этом состояла основная трудность данного исследования. Она преодолена тем, что следствие теоремы Хопфа применено не к уравнению, полученному в результате применения операции div к обеим частям уравнения (1), а к уравнению (13), полученному из дифференциального свойства коэффициентов Ламе (12), что в итоге обеспечило равенство нулю правой части (13).

Уравнение (13) можно представить в виде (14), положив $a_{12} = 0$. Как отмечено в конце предыдущего раздела, коэффициент a_{11} и произведение $a_{11}a_{22}$ отделены от нуля некоторыми положительными константами. Поэтому коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} являются коэффициентами положительно определенной квадратичной формы и выполнено условие (15). То есть для уравнения (13) все условия следствия теоремы Хопфа оказываются выполненными. Отсюда следует утверждение.

Дозвуковой принцип максимума давления (ДПМД). *Пусть в ограниченной области G дозвуковое течение идеального совершенного газа таково, что гидродинамические параметры p, $\rho, \mathbf{V}$ дважды непрерывно дифференцируемы в области G и непрерывны в замкнутой области $\bar{G}$. И пусть во всей замкнутой области $\bar{G}$ отсутствуют точки торможения.*

Тогда если давление p не постоянно, то и максимум и минимум p достигаются на границе и только на границе области G.

Рассмотрим по отдельности требования, содержащиеся в приведенной формулировке ДПМД.

1. В течении должны отсутствовать точки торможения. Это требование неустранимо, поскольку можно привести пример достижения максимального значения давления во внутренней точке течения. Например, точка торможения может возникать при столкновении двух противоположно направленных однородных струй газа, и в этой точке будет максимум давления.

С математической точки зрения это условие существенно используется в двух моментах приведенного доказательства. Во-первых, из отсутствия точек с нулевой скоростью следует возможность введения системы естественных координат (O, s, n). Во-вторых, следует ограниченность коэффициентов уравнения (13), что требуется для применения следствия теоремы Хопфа.

2. Течение должно быть дозвуковым (число Маха $\mathrm{M} < 1$). Нарушение этого требования приводит к вырождению уравнения (13) – при $\mathrm{M} \geqslant 1$ оно уже не будет уравнением эллиптического типа. Вопрос об экстремальных значениях давления при наличии в течении или на границе точек с числом Маха $\mathrm{M} \geqslant 1$ выходит за рамки данной работы.

6. Признак наличия сверхзвуковой точки или точки торможения

Полученный выше принцип ДПМД дает достаточный признак наличия в течении точек торможения или звуковых точек. Пусть на границе ∂G области G течение дозвуковое, а p_1 и p_2 – минимальное и максимальное значения давления на границе ∂G. Тогда для выяснения факта наличия точек торможения или звуковых точек могут оказаться достаточными измерения давления во внутренних точках, не являющихся ни точками торможения, ни звуковыми (или сверхзвуковыми) точками. Действительно, если хотя бы в одной внутренней точке A давление p_A окажется меньше p_1 или больше p_2, то из ДПМД последует, что в течении есть либо точка торможения, либо звуковая (или сверхзвуковая) точка. Вопрос о том, какие именно точки – звуковые точки или точки торможения, имеются в течении (при нарушении условия $p_1 < p_A < p_2$), представляет собой отдельную содержательную задачу. В общей постановке эта задача в данной работе не рассматривается. Однако для течений газа с малыми скоростями, когда из физических соображений можно предполагать отсутствие звуковых и сверхзвуковых точек, из нарушения условия $p_1 < p_A < p_2$ следует существование именно точек торможения.

7. Заключение

Проведен анализ полных уравнений Эйлера плоского стационарного течения идеального совершенного газа, которое может быть вихревым, а энтропия может быть различной на различных линиях тока. Получен дозвуковой принцип максимума давления (ДПМД). Показано, что в дозвуковом течении без точек торможения давление достигает минимума и максимума на границе течения.

В качестве следствия ДПМД предложено достаточное условие (признак) наличия либо точки торможения, либо звуковой (или сверхзвуковой) точки. Хотя предложенный признак не позволяет указать на место расположения таких точек, он позволяет значительно сократить количество измерений давления для выявления факта их наличия.

Литература

1. *Берс Л.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой аэродинамики. М.: Издательство иностранной литературы, 1961.

2. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Издательство иностранной литературы, 1963.

3. *Голубкин В.Н., Сизых Г.Б.* Принцип максимума функции Бернулли // Ученые записки ЦАГИ. 2015. Т. 46, № 5. С. 53–56.

4. *Голубкин В.Н., Ковалёв В.П., Сизых Г.Б.* Принцип максимума давления в плоских течениях идеальной несжимаемой жидкости // Ученые записки ЦАГИ. 2016. Т. 47, № 6. С. 28–36.

5. *Hopf E.* Elementare Bemerkungen uber die Losungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Elliptischen Typus // Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. 1927. V. 19. P. 147–152.

6. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: Издательство иностранной литературы, 1957.

7. *Сизых Г. Б.* Признак наличия точки торможения в плоском безвихревом течении идеального газа // Труды МФТИ. 2015. Т. 7, № 2(26). С. 108–112.

8. *Gilbarg D., Shiffman M.* On Bodies Achieving Extreme Value of the Critical Mach Number. I // J. Ration. And Analysis. 1954. V. 3, N 2. P. 209–230.

9. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge University Press, 1895.

10. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003.

11. *Сизых Г. Б.* Критерий Бернулли для установившегося плоскопараллельного течения вязкой несжимаемой жидкости // Труды МФТИ. 2013. Т. 5, № 2. С. 81–87.

References

1. *Bers L.* Mathematical Aspects of Subsonic and Transonic Gas Dynamics. — New York: Wiley, 1958.

2. *Serrin J.* Mathematical principles of classical fluid mechanics. Berlin-G?ttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1959.

3. *Golubkin V. N., Sizykh G. B.* Maximum principle for Bernoulli function. TsAGI Science Journal. 2015. V. 46, I. 5. P. 485–490.

4. *Golubkin V. N., Kovalev V. P., Sizykh G. B.* Maximum principle for pressure in ideal incompressible fluid flows. TsAGI Science Journal. 2016. V. 47, I. 6. P. 28–36.

5. *Hopf E.* Elementary remarks on the solutions of partial differential equations of second order of Elliptic type // Meeting reports of the Prussian Academy of Sciences. 1927. V. 19. P. 147–152. — (in German).

6. *Miranda C.* Partial Differential Equations of Elliptic Type. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1970.

7. *Sizykh G. B.* Sign of the presence of braking points in a planar irrotational flow of an ideal gas. Proceedings of MIPT. 2015. V. 7, N 2. P. 108–112. (in Russian).

8. *Gilbarg D., Shiffman M.* On Bodies Achieving Extreme Value of the Critical Mach Number. I. J. Ration. And Analysis. 1954. V. 3, N 2. P. 209–230.

9. *Lamb H.* Hydrodynamics. Cambridge University Press, 1895.

10. *Loytsyansky L.G.* Mechanics of Liquids and Gases. Pergamon Press. Oxford, 1966.

11. *Sizykh G.B.* Bernoulli criterion for plane-parallel steady flow of viscous incompressible fluid. Proceedings of MIPT. 2013. V. 5, N 2. P. 81-87. (in Russian).

Поступила в редакцию 03.11.2016