УДК 519.855

Е. А. Умнов, А. Е. Умнов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Задача математического программирования для комплекса математических моделей

В работе рассматривается применение метода функций обратных связей для решения задачи математического программирования на комплексе математических моделей. Приводится описание алгоритма, основанного на сглаживающем свойстве функций обратных связей, решения задачи поиска оптимального распределения ресурсов между подсистемами моделируемого объекта.

Ключевые слова: распределенная задача математического программирования, функции обратных связей, задача оптимального распределения ресурсов.

E. A. Umnov, A. E. Umnov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

Mathematical programming problem for a complex of mathematical models

In this paper the feedback functions method is concidered. This method is used for solving the mathematical programming problems. The first-order method is used for solving parametric linkage problem. A numerical example of the procedure is given.

Key words: system of mathematical programming problems, feedback functions, problem of optimal distribution of resources.

Введение

Схема двухуровневой параметрической оптимизации, общий случай которой был рассмотрен, например в [1, 2], допускает ее использование также при решении задач, сформулированных для системы (комплекса) математических моделей. Такие задачи возникают либо при декомпозиции модели сложного объекта в совокупность моделей его подсистем, либо в случае, когда необходимо связать изначально независимые модели в единый комплекс, позволяющий решать некоторую общую для этого комплекса задачу.

Конкретным примером задачи этого типа может служить, например, задача оптимизации распределения ресурсов между различными отраслями экономики или же отраслевыми подсистемами. В последнем случае математическая модель каждой подсистемы рассматривается (с точки зрения управляющего субъекта, например, ЛПР – лица, принимающего решения) как некий «черный ящик», входными параметрами для которого являются объемы инвестируемых в подсистему ресурсов, а выходными служат количественные показатели эффективности функционирования данной подсистемы.

Отметим, что внутренняя структура, функциональная схема, информационная база, а также используемые алгоритмы и программное обеспечение моделей каждой из подсистем, вообще говоря, не только независимы друг от друга, но даже могут быть частично или полностью неизвестными (недоступными) как для других подсистем, так и для управляющего субъекта (ЛПР).

Чтобы описать структуру информационных потоков между управляющим субъектом и подсистемами, необходимую для постановки и решения задач на комплексе в целом, рассмотрим вначале вариант полностью открытых моделей подсистем, т.е. «прозрачных черных ящиков».

В этом случае логистическая задача оптимального распределения ресурсов в отрасли представляет собой двухуровневую параметрическую задачу, на нижнем уровне которой (отдельно для каждой подсистемы) рассчитываются оценки эффективности функционирования при заданном векторе выделенных ресурсов. В то время как на верхнем уровне, по полученным на нижнем уровне оценкам, находятся способы перераспределения ресурсов между подсистемами, приводящие к улучшению значений показателей функционирования системы в целом.

Рассмотрим формальную постановку подобной задачи и возможный подход к ее решению. Пусть исследуемый объект представляется как совокупность N подсистем (блоков), каждая из которых описывается конечномерным вектором, с компонентами, удовлетворяющими некоторой системе ограничений типа неравенство. При этом некоторая часть этих компонент используется в описании нескольких подсистем одновременно. Наконец, имеются как целевые функции отдельных подсистем, так и общая целевая функция, определяющая соотношение предпочтения между различными состояниями системы как единого целого.

Постановка задачи

Формальная постановка рассматриваемой задачи для блока с номером s $(\forall s = [1, N])$ является задачей математического программирования следующего вида[1]:

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать по } x_{(s)} \in E^{n_{(s)}} \text{ функцию } F_{(s)}\big(x_{(s)}\, u\big) \\ &\text{при условиях} \quad f_{(s)i}\big(x_{(s)},\, u\big) \leqslant 0 \quad \forall i = [1, m_{(s)}]\,, \end{aligned} \tag{1}$$

каждая из которых решается независимо в пространстве $E^{n_{(s)}}$ при фиксированном векторе параметров $u \in E^K$, имеющего координатное представление $\|u\| = \|\, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_K \,\|^{\mathrm{T}}$. Допустим, что задачи (1) имеют решение вида $x^*_{(s)}(u_{(s)})$.

Рассмотрим также задачу:

$$\begin{aligned} &\text{максимизировать по } u \in E^K \text{ функцию } \sum_{s=1}^{K} F_{(s)}\big(x^*_{(s)}(u), u\big) \\ &\text{при условиях } Y_t(u) \leqslant 0 \;\; \forall t = [1, M]\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Предположим, что допустимое множество задачи (2) содержится в Ω.

Далее для краткости задачи (1) будем называть задачами *нижнего уровня*, а задачу (2) именовать задачей *верхнего уровня*.

Основные затруднения, возникающие при использовании подобной двухуровневой модели, представляет задача (2), поскольку в формулировку ее условия входят зависимости $x^*_{(s)}(u)$, обладающие следующими специфическими свойствами.

1. Практической невозможностью (за исключением, быть может, некоторых тривиальных случаев) аналитического решения задачи нижнего уровня, а значит, также невозможностью постановки, исследования и решения в явном виде задачи верхнего уровня.
2. Возможным несовпадением области определения зависимости $x^*_{(s)}(u)$ и множества Ω, поскольку система условий задачи нижнего уровня может оказаться противоречивой для некоторых $u \in \Omega$.
3. Возможной нефункциональностью (неоднозначностью) зависимости $x^*_{(s)}(u)$ для тех u, при которых задача нижнего уровня имеет решение, но не единственное.
4. Негладкостью зависимости $x^*(u)$ в силу того, что условия задач нижнего уровня могут содержать ограничения типа «неравенство». Более того, даже существова-

[1] Здесь и далее нижний индекс, заключенный в круглые скобки, служит номером элемента какого-то множества (например, числовой или векторной последовательности). Нижний же индекс без скобок является номером компоненты вектора или матрицы.

ние непрерывных производных у функций $F(x,u)$ и $f_i(x,u)$ $\forall i=[1,m]$ достаточно высокого порядка не гарантирует гладкости (а иногда даже и непрерывности) зависимости $x^*(u)$, а значит, и входящих в формулировку задачи верхнего уровня условий.

Для преодоления указанных затруднений предлагается использовать вариант метода функций обратных связей, описание и некоторые детали обоснования которого приведены ниже.

Метод функций обратных связей

Рассмотрим вначале случай пары взаимно двойственных задач линейного программирования, записанных в симметричном формате, опустив для краткости зависимость их условий от u.

Пусть $x\in E^n$, $\Lambda\in E^m$, а их координатные представления соответственно равны $||x|| = ||\ \xi_1\,\xi_2\,\ldots\,\xi_n||^{\mathrm{T}}$, $||\Lambda|| = ||\ \lambda_1\,\lambda_2\,\ldots\,\lambda_m||^{\mathrm{T}}$. Тогда исходная задача линейного программирования будет иметь вид

максимизировать по $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\}$ $F(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}\sigma_j\xi_j$ при условиях: $\xi_j\geqslant 0$ $\forall j=[1,n]$ и

$$f_i(x)=-\beta_i+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j\leqslant 0 \quad \forall i=[1,m]. \tag{3}$$

Эту задачу будем именовать *прямой задачей* и обозначать ее решение как x^*.

Задача *двойственная* к прямой будет

минимизировать по $\{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\}$ $G(\Lambda)=\sum\limits_{i=1}^{m}\beta_i\lambda_i$ при условиях: $\lambda_i\geqslant 0$ $\forall i=[1,m]$ и

$$g_j(\Lambda)=-\sigma_j+\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\lambda_i\geqslant 0 \quad \forall j=[1,n]. \tag{4}$$

Ее решение будем обозначать Λ^*.

Введем функцию $\mathrm{P}(\tau,s)$ такую, что:

1°. Функция $P(\tau,s)$ имеет $\forall\tau>0$ и $\forall s$ непрерывные производные по всем своим аргументам до второго порядка включительно.

2°. Для всех $\tau>0$ и $\forall s$ выполнены неравенства

$$\frac{\partial P}{\partial s}>0\,; \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial s^2}>0\,. \tag{5}$$

3°. $P(\tau,s)>0$ $\forall s$ и любого $\tau>0$, причем

$$\lim_{\tau\to+0}P(\tau,s)=\left\{\begin{array}{rl} +\infty, & s>0\,,\\ 0, & s<0\,.\end{array}\right.$$

Определим также функции $Q(\tau,s)$ и $R(\tau,s)$ такие, что $Q(\tau,s)$ есть обратная по s к строго монотонной по s функции $\dfrac{\partial P(\tau,s)}{\partial s}$, а для функции $R(\tau,s)$ верно $\dfrac{\partial R(\tau,s)}{\partial s}=Q(\tau,s)$.

Тогда для пары взаимодвойственных задач (3) и (4) можно определить вспомогательную функцию:

$$U(\tau,x,\Lambda)=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sigma_j\xi_j-R(\tau,\xi_j)\Big)+\sum_{i=1}^{m}\Big(\beta_i\lambda_i+R(\tau,\lambda_i)\Big)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\xi_j\lambda_i\,, \tag{6}$$

обладающую, как будет показано ниже, стационарной точкой на паре векторов $\overline{x}(\tau,u)\in E^n$ и $\overline{\Lambda}(\tau,u)\in E^m$, являющихся решениями системы уравнений

$$\begin{cases} -\beta_i+\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\xi}_j &= \quad Q(\tau,\overline{\lambda}_i) \qquad \forall i=[1,m],\\ -\sigma_j+\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\overline{\lambda}_i &= -Q(\tau,\overline{\xi}_j) \qquad \forall j=[1,n]. \end{cases} \tag{7}$$

Кроме того, для метода функций обратных связей частные решения пары взимодвойственных задач (3) и (4) находятся по формулам

$$\xi_j^*=\lim_{\tau\to+0}\overline{\xi}_j(\tau) \qquad \forall\, j=[1,n], \tag{8}$$

$$\lambda_i^*=\lim_{\tau\to+0}\overline{\lambda}_i(\tau) \qquad \forall\, i=[1,m].$$

Докажем это, использовав установленный в [3] факт строгой выпуклости $U(\tau,x,\Lambda)$ вверх по x и строгой выпуклости вниз по Λ.

Вначале заметим, что для каждого вектора Λ с конечными положительными компонентами будет существовать единственный конечный вектор $\widehat{x}(\Lambda)$ с положительными компонентами, такой что условие $\mathrm{grad_x}U\left(\tau,\widehat{x}(\Lambda),\Lambda\right)=o$, имеющее в силу (6) вид

$$Q(\tau,\widehat{\xi}_j(\Lambda))-\sigma_j+\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\lambda_i=0 \quad \forall j=[1,n]\,, \tag{9}$$

означает (с учетом строгой выпуклости функции $U(\tau,x,\Lambda)$ вверх по x), что $\widehat{x}(\Lambda)=\operatorname*{argmax}_x U(\tau,x,\Lambda)\,.$

Действительно, согласно определению функции $Q(\tau,s)$, условия (9) равносильны равенствам

$$\widehat{\xi}_j(\Lambda)=\frac{\partial P}{\partial s}\big(\tau,-g_j(\Lambda)\big) \quad \forall j=[1,n]\,,\forall\Lambda>o,$$

правые части которых существуют и определены однозначно.

Рассуждая аналогично, мы приходим к заключению, что для каждого конечного вектора x с положительными компонентами будет существовать конечный вектор $\widehat{\Lambda}(x)$ с положительными компонентами, такой что

$$Q(\tau,\widehat{\lambda}_i(x))+\beta_i-\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\xi_j=0 \quad \forall i=[1,m] \tag{10}$$

и что $\quad\widehat{\Lambda}(x)=\operatorname*{argmin}_\Lambda U(\tau,x,\Lambda)\quad$ в силу строгой выпуклости $U(\tau,x,\Lambda)$ вниз по Λ.

Теперь найдем минимум $U(\tau,\widehat{x}(\Lambda),\Lambda)$ по Λ. Из (6) мы имеем

$$U(\tau,\widehat{x}(\Lambda),\Lambda)=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sigma_j\widehat{\xi}_j(\Lambda)-R(\tau,\widehat{\xi}_j(\Lambda))\Big)+\sum_{i=1}^{m}\Big(\beta_i\lambda_i+R(\tau,\lambda_i)\Big)-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\widehat{\xi}_j(\Lambda)\lambda_i\,. \tag{11}$$

В силу строгой выпуклости вниз этой функции, достаточное условие ее минимума будет

$$\frac{\partial U}{\partial\lambda_q}(\tau,\widehat{x}(\Lambda),\Lambda)=0 \qquad \forall q=[1,m]\,,$$

которое после перегруппировки слагаемых и учета (9) принимает вид

$$\beta_q+Q\left(\tau,\widehat{\widehat{\lambda}}_q\right)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_{qj}\widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}})=0 \qquad \forall q=[1,m]\,, \tag{12}$$

где вектор с неотрицательными компонентами $\widehat{\widehat{\Lambda}} = \underset{\Lambda}{\operatorname{argmin}}\, U(\tau, \widehat{x}(\Lambda), \Lambda)$.

Наконец, в силу (9), получаем

$$U(\tau,\widehat{x}(\widehat{\widehat{\Lambda}}),\widehat{\widehat{\Lambda}}) = \min_{\Lambda}\max_{x} U(\tau,x,\Lambda) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\beta_i\widehat{\widehat{\lambda}}_i + R(\tau,\widehat{\widehat{\lambda}}_i)\Big) + \sum_{j=1}^{n}\Big(\widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}})Q(\tau,\widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}})) - R(\tau,\widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}}))\Big). \tag{13}$$

Теперь найдем $\max\limits_{x}\min\limits_{\Lambda} U(\tau,x,\Lambda)$. Рассуждая аналогично вышеизложенному, получаем, что достаточное условие максимума $U(\tau,x,\widehat{\Lambda}(x))$ по x имеет вид

$$\sigma_k - Q\left(\tau,\widehat{\widehat{\xi}}_k\right) - \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ik}\widehat{\lambda}_i(\widehat{\widehat{\xi}}_k) = 0 \qquad \forall k = [1,n], \tag{14}$$

где вектор с неотрицательными компонентами $\widehat{\widehat{x}} = \underset{x}{\operatorname{argmax}}\, U(\tau,x,\widehat{\Lambda}(x))$. При этом, в силу (10), получим

$$U(\tau,\widehat{\widehat{x}},\widehat{\Lambda}(\widehat{\widehat{x}})) = \max_{x}\min_{\Lambda} U(\tau,x,\Lambda) = \sum_{i=1}^{m}\Big(\beta_i\widehat{\lambda}_i(\widehat{\widehat{x}}) + R(\tau,\widehat{\lambda}_i(\widehat{\widehat{x}}))\Big) + \sum_{j=1}^{n}\Big(\widehat{\widehat{\xi}}_j Q(\tau,\widehat{\widehat{\xi}}_j) - R(\tau,\widehat{\widehat{\xi}}_j)\Big). \tag{15}$$

Покажем теперь, что из условий (10) и (12) следует равенство $\widehat{\widehat{\Lambda}} = \widehat{\Lambda}\left(\widehat{\widehat{x}}\right)$, а из условий (9) и (14) вытекает соответственно $\widehat{\widehat{x}} = \widehat{x}\left(\widehat{\widehat{\Lambda}}\right)$. Например, формулу $\widehat{\widehat{x}} = \widehat{x}\left(\widehat{\widehat{\Lambda}}\right)$ можно получить так: рассмотрим совместно равенства (9) и (14), заменив в последнем индекс k на j:

$$\begin{array}{rcll} -Q(\tau,\widehat{\xi}_j(\Lambda)) & = & -\sigma_j + \sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\lambda_i & \qquad \forall j=[1,n], \\ -Q\left(\tau,\widehat{\widehat{\xi}}_j\right) & = & -\sigma_j + \sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\widehat{\lambda}_i(\widehat{\widehat{\xi}}_j) & \qquad \forall j=[1,n]. \end{array}$$

Первая группа этих равенств верна при любых положительных $\lambda_i\ \forall i=[1,m]$, в том числе и при $\widehat{\lambda}_i(\widehat{\widehat{\xi}}_j)\ \forall i=[1,m]$. Очевидно, что в этом случае правые части равенств оказываются одинаковыми. Но тогда будут равны и левые, то есть

$$Q\left(\tau,\widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}})\right) = Q\left(\tau,\widehat{\widehat{\xi}}_j\right) \quad \forall j=[1,n].$$

Последнее же равенство означает, что, в силу монотонности по s функции $Q(\tau,s)$, верны равенства $\widehat{\xi}_j(\widehat{\widehat{\Lambda}}) = \widehat{\widehat{\xi}}_j \quad \forall j=[1,n]$, то есть $\widehat{\widehat{x}} = \widehat{x}(\widehat{\widehat{\Lambda}})$.

Теперь из сопоставления формул (13) и (15) мы получаем, что

$$\min_{\Lambda}\max_{x} U(\tau,x,\Lambda) = \max_{x}\min_{\Lambda} U(\tau,x,\Lambda).$$

Это означает, что функция $U(\tau,x,\Lambda)$ имеет седловую точку, которая, в силу непрерывной дифференцируемости этой функции, является для нее стационарной.

Наконец, условия стационарности функции $U(\tau,x,\Lambda)$, которые можно записать в виде

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{grad_x} U\left(\tau,\widehat{\widehat{x}},\widehat{\widehat{\Lambda}}\right) = o\,, \\ \mathrm{grad}_{\Lambda} U\left(\tau,\widehat{\widehat{x}},\widehat{\widehat{\Lambda}}\right) = o\,, \end{array}\right.$$

равносильны в своей совокупности системе (7) при $\overline{x}(\tau) = \widehat{\widehat{x}}$ и $\overline{\Lambda}(\tau) = \widehat{\widehat{\Lambda}}$.

Приведем теперь краткий обзор основных свойств метода функций обратных связей, рассмотренных в [3, 4] и существенных для решения задачи распределенного моделирования (1) – (2).

Во-первых, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\tau \to +0} U(\tau, x, \Lambda) = L(x, \Lambda)\,,$$

где $L(x, \Lambda)$ – стандартная функция Лагранжа для задачи (3).

Во-вторых, для регулярной пары взаимодвойственных задач (3) – (4) выполняются предельные соотношения типа (8):

$$\xi_j^* = \lim_{\tau \to +0} \overline{\xi}_j(\tau) \qquad \forall\, j = [1, n],$$

$$\lambda_i^* = \lim_{\tau \to +0} \overline{\lambda}_i(\tau) \qquad \forall\, i = [1, m],$$

где $\overline{\xi}_j(\tau)$ и $\overline{\lambda}_i(\tau)$ суть единственные решения системы уравнений (7).

Наконец, в [4] показано, что для нелинейной, локально выпуклой задачи:

$$\begin{array}{l} \text{максимизировать по } x \in E^n \text{ гладкую целевую функцию } F(x, u) \\ \text{при условиях: } \xi_j \geqslant 0 \ \ \forall j = [1, n], \qquad f_i(x, u) \leqslant 0 \ \forall i = [1, m], \end{array} \tag{16}$$

где функции $f_i(x, u)$ $\forall i = [1, m]$ достаточно гладкие, система (7) может быть приведена к виду

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\overline{x}, \overline{\Lambda}, u) & = & -Q(\tau, \overline{\lambda}_i) \qquad \forall i = [1, m]\,, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \xi_j}(\overline{x}, \overline{\Lambda}, u) & = & \quad Q(\tau, \overline{\xi}_j) \qquad \forall j = [1, n]\,, \end{array} \right.$$

и где $L(x, \Lambda, u) = F(x, u) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x, u)$ – стандартная функция Лагранжа параметрической задачи (16).

Использование метода обратных функций для решения задач для системы моделей

Рассмотрим теперь возможный вариант процедуры поиска решения задачи верхнего уровня (в пространстве параметров), основанный на использовании метода функций обратных связей.

Вначале построим для модели s-й подсистемы в форме (1) вспомогательную U-функцию:

$$U_{(s)}(\tau, x_{(s)}, \Lambda_{(s)}, u) \quad = \quad F_{(s)}(x_{(s)}, u) - \sum_{i=1}^{m_{(s)}} \lambda_i f_{(s)i}(x_{(s)}, u) + \sum_{i=1}^{m_{(s)}} R(\tau, \lambda_{(s)i}) - \sum_{j=1}^{n_{(s)}} R(\tau, \xi_{(s)j}), \tag{17}$$

или

$$U_{(s)}\big(\tau, x_{(s)}, \Lambda_{(s)}, u\big) = L_{(s)}\big(x_{(s)}, \Lambda_{(s)}, u\big) \ + \sum_{i=1}^{m_{(s)}} R(\tau, \lambda_{(s)i}) \ - \sum_{j=1}^{n_{(s)}} R(\tau, \xi_{(s)j})\,,$$

где, как и раньше, $\dfrac{\partial R}{\partial s}\,(\tau, s) = Q(\tau, s)$, а $L_{(s)}\big(x_{(s)}, \Lambda_{(s)}, u\big)$ – стандартная функция Лагранжа. Вектор u в этих формулах один и тот же для всех s.

Обозначим через $\overline{x}_{(s)}$ и $\overline{\Lambda}_{(s)}$ стационарные точки вспомогательных функций $U_{(s)}$ при фиксированных u. Тогда условия их стационарности

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \dfrac{\partial U_{(s)}}{\partial \xi_{(s)j}} & = & 0 \quad \forall j = [1, n_{(s)}] \ , \\ \dfrac{\partial U_{(s)}}{\partial \lambda_{(s)i}} & = & 0 \quad \forall i = [1, m_{(s)}] \ , \end{array} \right. \tag{18}$$

можно рассматривать как определение неявно заданных вектор-функций $\overline{x}_{(s)}(u), \overline{\Lambda}_{(s)}(u)$.

С другой стороны, исходя из известной теоремы о системе функций, заданных неявно, в случае достаточной гладкости функций $F_{(s)}(x_{(s)}, u)$ и $f_{(s)i}(x_{(s)}, u) \ \ \forall i = [1, m_{(s)}]$ в некоторой окрестности точки $\overline{x}_{(s)}$ и $\overline{\Lambda}_{(s)}$ будут существовать непрерывные производные вида

$$\frac{\partial \overline{\xi}_{(s)j}}{\partial \nu_p} \quad \forall j = [1, n_{(s)}] \quad \text{и} \quad \frac{\partial \overline{\lambda}_{(s)i}}{\partial \nu_p} \quad \forall i = [1, m_{(s)}] \quad \forall p = [1, K] \, ,$$

значения которых находятся из следующего набора $\forall p = [1, K]$ систем линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \sum\limits_{t=1}^{n_{(s)}} \dfrac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \xi_{(s)j} \partial \xi_{(s)t}} \dfrac{\partial \overline{\xi}_{(s)t}}{\partial \nu_p} + \sum\limits_{q=1}^{m_{(s)}} \dfrac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \xi_{(s)j} \partial \lambda_{(s)q}} \dfrac{\partial \overline{\lambda}_{(s)q}}{\partial \nu_p} & = & - \dfrac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \xi_{(s)j} \partial \nu_p} \quad \forall j = [1, n_{(s)}] \ , \\ \sum\limits_{t=1}^{n_{(s)}} \dfrac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \lambda_{(s)i} \partial \xi_{(s)t}} \dfrac{\partial \overline{\xi}_{(s)t}}{\partial \nu_p} + \sum\limits_{q=1}^{m_{(s)}} \dfrac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \lambda_{(s)i} \partial \lambda_{(s)q}} \dfrac{\partial \overline{\lambda}_{(s)q}}{\partial \nu_p} & = & - \dfrac{\partial^2 U_{(s)}}{\partial \lambda_{(s)i} \partial \nu_p} \quad \forall i = [1, m_{(s)}] \ , \end{array} \right.$$

Перейдем теперь к исследованию задачи верхнего уровня (2). Рассмотрим случай, когда целевая функция в ее постановке есть функция вида

$$\overline{F}(u) = \sum_{s=1}^{K} F_{(s)}\big(\overline{x}_{(s)}(u), u\big),$$

а система ограничений получается объединением условий

$$f_{(s)i}\big(\overline{x}_{(s)}, \, u\big) \leqslant 0 \quad \forall i = [1, m_{(s)}] \quad \forall s = [1, N] \, ,$$

с условиями $Y_t(u) \leqslant 0 \ \ \forall t = [1, M]$.

Последнюю группу ограничений $Y_t(u) \leqslant 0 \ \ \forall t = [1, M]$, которым должны удовлетворять компоненты вектора параметров, проигнорируем, чтобы не затенять суть процедуры обилием технических деталей (их учет может быть сделан на практике любым стандартным методом, скажем, проекции градиента или штрафных функций).

Также нетрудно видеть, что, в силу сепарабельности модели по своим переменным, объединение моделей подсистем в одну задачу дает модель, для которой U-функция всей системы равна сумме U-функций этих подсистем.

В итоге, заменив в полученной формулировке зависимости $x^*_{(s)}(u) \quad \forall s = [1, N]$ на их сглаженные аппроксимации $\overline{x}_{(s)}(\tau, u)$, найденными при решении системы уравнений (18) и соответственно зависимости $\Lambda^*_{(s)}(u) \quad \forall s = [1, N]$ на аппроксимации $\overline{\Lambda}_{(s)}(\tau, u)$, получим $\overline{U}$-функцию, для которой стационарная точка будет будет приближенным решением исходной модели. Иными словами, необходимо искать стационарную точку функции

$$\overline{U}(\tau, u) = \sum_{s=1}^{N} U_{(s)}\big(\overline{x}_{(s)}(\tau, u), \overline{\Lambda}_{(s)}(\tau, u), u\big) \, . \tag{19}$$

Рассмотрим теперь схему решения задачи верхнего уровня, основанную на градиентном методе отыскания стационарной точки функции (11) в пространстве параметров u, в предположении, что для любой пробной точки u, введенной в условие каждой задачи нижнего уровня, находится ее решение, включающее значение векторов $\overline{x}_{(s)}(u)$ и $\overline{\Lambda}_{(s)}(u)$.

При использовании наиболее простого варианта градиентного метода – поиска стационарной точки – необходимо в каждой пробной точке находить:

1°. Значение функционала $\overline{U}(\tau, u)$.

2°. Значения производных $\overline{U}'_{\nu_t}$ $\forall t = [1, K]$.

Значения целевого функционала $\overline{U}(\tau, u)$ в процессе решения задачи верхнего уровня находятся по формуле (11). Для вычисления его градиента по компонентам вектора параметров используем правило дифференцирования сложной функции. В результате получим выражение

$$\overline{U}'_{\nu_t} = \sum_{s=1}^{N} \left(\frac{\partial U_{(s)}}{\partial \nu_t} + \sum_{j=1}^{n_{(s)}} \frac{\partial U_{(s)}}{\partial \xi_j} \frac{\partial \overline{\xi}_j}{\partial \nu_t} + \sum_{i=1}^{m_{(s)}} \frac{\partial U_{(s)}}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \overline{\lambda}_i}{\partial \nu_t} \right) \quad \forall t = [1, K]. \tag{20}$$

Наконец, следует отметить, что если целевая функция задачи верхнего уровня равна сумме целевых функций задач нижнего уровня (то есть если цели функционирования всего комплекса согласованы с целями отдельных подсистем), то формулы (20) можно упростить, использовав условия стационарности (18). Результат этого упрощения таков:

$$\overline{U}'_{\nu_t} = \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial U_{(s)}}{\partial \nu_t} \qquad \forall t = [1, K].$$

Пример практического использования алгоритма

Тот факт, что задача (2) может иметь содержательное и в достаточной степени неочевидное решение, иллюстрирует следующая модель.

Для системы двух задач нижнего уровня:

максимизировать по $\{\xi_1, \xi_2\} \in E^2$ функцию

$$4\xi_1 + 4\xi_2\,, \tag{21}$$

$$\begin{aligned} &\text{при условиях} \quad 0 \leqslant \xi_1 \leqslant 4, \quad 0 \leqslant \xi_2 \leqslant 2,\\ &\xi_1 + 2\xi_2 \leqslant \nu_1\,,\\ &2\xi_1 + \xi_2 \leqslant \nu_2 \end{aligned}$$

и максимизировать по $\{\xi_3, \xi_4\} \in E^2$ функцию

$$4\xi_1 + 3\xi_2\,, \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\text{при условиях} \quad 0 \leqslant \xi_3 \leqslant 4, \quad 0 \leqslant \xi_4 \leqslant 2,\\ &2\xi_3 + \xi_4 \leqslant \nu_3\,,\\ &\xi_3 + 2\xi_4 \leqslant \nu_4 \end{aligned}$$

решить следующую задачу верхнего уровня: найти неотрицательные значения параметров $\{\,\nu_1\,, \nu_2\,, \nu_3\,, \nu_4\,\}$, максимизирующих сумму целевых функций (21) и (22) при условиях:

$$\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 = 16\,,\\ \nu_3 + \nu_4 = 15\,. \end{aligned}$$

Пусть $\{\,\xi_1^*(\nu_1, \nu_2)\,\xi_2^*(\nu_1, \nu_2)\,\}$ и $\{\,\xi_3^*(\nu_3, \nu_4)\,\xi_4^*(\nu_3, \nu_4)\,\}$ решения задач (21) и (22), найденные при некоторых допустимых фиксированных значениях параметров. Тогда задача верхнего уровня будет иметь вид

максимизировать по $\{\,\nu_1\,, \nu_2\,, \nu_3\,, \nu_4\,\}$ функцию

$$F = 4\xi_1^*(\nu_1, \nu_2) + 4\xi_2^*(\nu_1, \nu_2) + 4\xi_3^*(\nu_3, \nu_4) + 3\xi_4^*(\nu_3, \nu_4)\,, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &\text{при условиях} \quad \nu_1 \geqslant 0\,,\ \nu_2 \geqslant 0\,,\ \nu_3 \geqslant 0\,,\ \nu_4 \geqslant 0\,,\\ &\nu_1 + \nu_2 = 16\,,\\ &\nu_3 + \nu_4 = 15\,. \end{aligned}$$

Графические представления зависимости целевой функции задачи верхнего уровня от параметров ν_1 и ν_3 показаны на рис. 1 и 2. Само решение задачи (23) является *неединственным* и имеет вид

$$\nu_1^* = \frac{22}{3} - t\,,\ \ \nu_2^* = \frac{26}{3} + t \quad \forall t \in \left[0, \frac{2}{3}\right], \quad \nu_3^* = 9\,,\ \ \nu_4^* = 6\,,$$
$$\xi_1^* = \frac{10}{3} + t\,,\ \ \xi_2^* = 2 - t\,, \quad \xi_3^* = 4\,,\ \ \xi_4^* = 1\,, \quad \text{а}\ \ F^* = 40\frac{1}{3}\,.$$

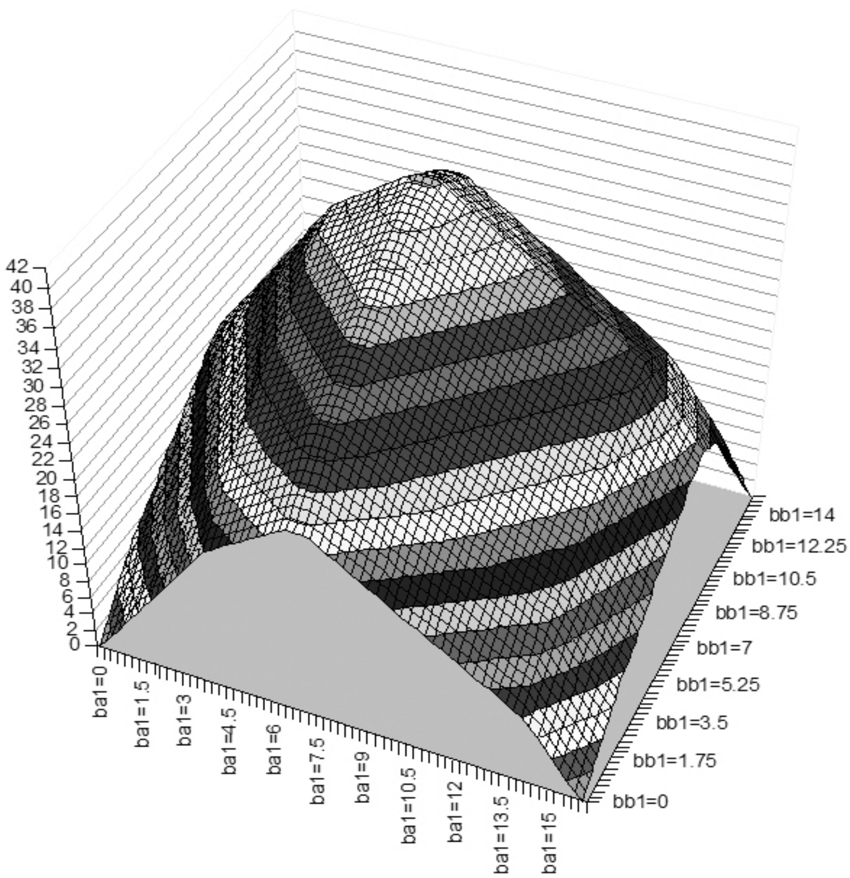

Рис. 1. 3D-представление решения задачи (2)

Продемонстрируем теперь практическое использование описанного метода на примере решения системы задач (21) – (23). Для упрощения (уменьшения числа индексов) формы записи будем использовать для прямых переменных первой подсистемы обозначение ξ, а второй – обозначение η.

Двойственные переменные обозначим соответственно при помощи λ и μ. Тогда согласно (17) U-функция для первой подсистемы (21) будет иметь вид

$$\begin{aligned} U_{(1)}(\tau, u) \ \ = \ \ & 4\xi_1 + 4\xi_2 - \lambda_1\,(\xi_1 + 2\xi_2 - \nu_1) - \lambda_2\,(2\xi_1 + \xi_2 + \nu_1 - 16) - \\ & -\lambda_3\,(\xi_1 - 4) - \lambda_4\,(\xi_2 - 2) - R(\tau, \xi_1) - R(\tau, \xi_2) + \\ & + R(\tau, \lambda_1) + R(\tau, \lambda_2) + R(\tau, \lambda_3) + R(\tau, \lambda_4)\,. \end{aligned}$$

Здесь конкретно мы используем следующий тип функции обратной связи

$$Q(\tau, s) = \frac{\partial R}{\partial s} = \frac{\tau}{2}\left(s - \frac{1}{s}\right) \qquad \text{и} \qquad R(\tau, s) = \frac{\tau}{2}\left(\frac{s^2}{2} - \ln s\right)\,.$$

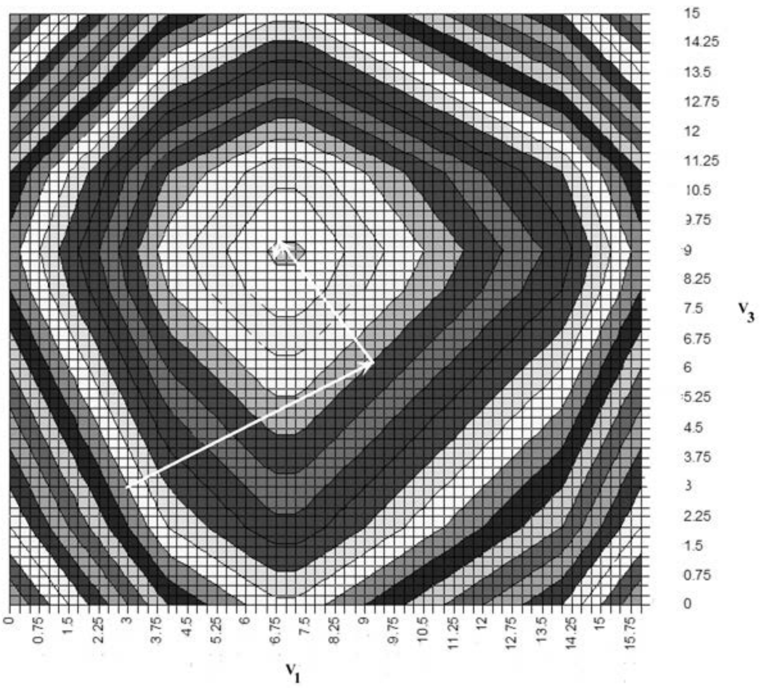

Рис. 2. Система изолиний решения задачи (2)

Условия стационарности (19) U-функции первой подсистемы при фиксированном значении параметра ν_1:

$$
\left\{
\begin{array}{rcl}
\dfrac{\partial U_1}{\partial \xi_1} & = & 4-\overline{\lambda}_1-2\overline{\lambda}_2-\overline{\lambda}_3-\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\xi}_1-\dfrac{1}{\overline{\xi}_1}\right) = 0\,,\\
\dfrac{\partial U_1}{\partial \xi_2} & = & 4-2\overline{\lambda}_1-\overline{\lambda}_2-\overline{\lambda}_4-\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\xi}_2-\dfrac{1}{\overline{\xi}_2}\right) = 0\,,\\
\dfrac{\partial U_1}{\partial \lambda_1} & = & -\overline{\xi}_1-2\overline{\xi}_2+\nu_1+\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\lambda}_1-\dfrac{1}{\overline{\lambda}_1}\right) = 0\,,\\
\dfrac{\partial U_1}{\partial \lambda_2} & = & 16-\overline{\xi}_1-2\overline{\xi}_2-\nu_1+\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\lambda}_2-\dfrac{1}{\overline{\lambda}_2}\right) = 0\,,\\
\dfrac{\partial U_1}{\partial \lambda_3} & = & 4-\overline{\xi}_1+\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\lambda}_3-\dfrac{1}{\overline{\lambda}_3}\right) = 0\,,\\
\dfrac{\partial U_1}{\partial \lambda_4} & = & 2-\overline{\xi}_2+\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\lambda}_4-\dfrac{1}{\overline{\lambda}_4}\right) = 0\,.
\end{array}
\right.
$$

Аналогично U-функция для второй подсистемы (22) будет иметь вид

$$
\begin{aligned}
U_{(2)}(\tau,u) = \; & 4\eta_1+3\eta_2-\mu_1\left(2\eta_1+\eta_2-\nu_3\right)-\mu_2\left(\eta_1+2\eta_2+\nu_3-15\right)-\\
& -\mu_3\left(\eta_1-4\right)-\mu_4\left(\eta_2-2\right)-R(\tau,\eta_1)-R(\tau,\eta_2)+\\
& +R(\tau,\mu_1)+R(\tau,\mu_2)+R(\tau,\mu_3)+R(\tau,\mu_4)\,.
\end{aligned}
$$

Условия стационарности (19) U-функции второй подсистемы при фиксированном значении параметра ν_3:

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial U_2}{\partial \eta_1} = 4-2\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2-\overline{\mu}_3-\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\eta}_1-\dfrac{1}{\overline{\eta}_1}\right) & = & 0\,,\\ \dfrac{\partial U_2}{\partial \eta_2} = 3-\overline{\mu}_1-2\overline{\mu}_2-\overline{\mu}_4-\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\eta}_2-\dfrac{1}{\overline{\eta}_2}\right) & = & 0\,,\\ \dfrac{\partial U_2}{\partial \mu_1} = -2\overline{\eta}_1-\overline{\eta}_2+\nu_3+\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\mu}_1-\dfrac{1}{\overline{\mu}_1}\right) & = & 0\,,\\ \dfrac{\partial U_2}{\partial \mu_2} = 15-\overline{\eta}_1-2\overline{\eta}_2-\nu_3+\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\mu}_2-\dfrac{1}{\overline{\mu}_2}\right) & = & 0\,,\\ \dfrac{\partial U_2}{\partial \mu_3} = 4-\overline{\eta}_1+\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\mu}_3-\dfrac{1}{\overline{\mu}_3}\right) & = & 0\,,\\ \dfrac{\partial U_2}{\partial \mu_4} = 2-\overline{\eta}_2+\dfrac{\tau}{2}\left(\overline{\mu}_4-\dfrac{1}{\overline{\mu}_4}\right) & = & 0\,.\end{array}\right.$$

Исходя из упрощенных формул (20) и равенства $U(\tau,\nu_1,\nu_3)=U_1(\tau,\nu_1)+U_2(\tau,\nu_3)$, получаем, что для рассматриваемого комплекса двух подсистем

$$U'_{\nu_1}=\frac{\partial U}{\partial \nu_1}=\overline{\lambda}_1-\overline{\lambda}_2,\qquad U'_{\nu_3}=\frac{\partial U}{\partial \nu_3}=\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2. \tag{24}$$

Использование в формул (24) позволяет реализовать градиентный метод поиска стационарной точки U-функции в пространстве параметров $\{\nu_1,\nu_3\}$. Результаты вычислений для нескольких первых итераций из начальной точки $\nu_{1(0)}=3, \nu_{3(0)}=3$ при $\tau=0.01$ приведены в табл. 1–3, в записи которых использованы следующие обозначения:

$$\overline{F}_1=4\overline{\xi}_1+4\overline{\xi}_2\,,\qquad \overline{F}_2=4\overline{\eta}_1+3\overline{\eta}_2\,,\qquad \overline{F}=\overline{F}_1+\overline{F}_2,$$

$$\triangledown_{\nu_1}=\frac{\partial U}{\partial \nu_1},\qquad \triangledown_{\nu_3}=\frac{\partial U}{\partial \nu_3},\qquad \|\triangledown\|=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial \nu_1}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial \nu_3}\right)^2},$$

$$w_{\nu_1}=\frac{\triangledown_{\nu_1}}{\|\triangledown\|},\quad w_{\nu_3}=\frac{\triangledown_{\nu_3}}{\|\triangledown\|},\quad {\nu_1}^*=\nu_1+step\cdot w_{\nu_1},\quad {\nu_3}^*=\nu_3+step\cdot w_{\nu_3}\,.$$

Таблица 1

Поиск стационарной точки U-функции задачи (2) по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом

Итер.	ν_1	ν_3	$\overline{\xi}_1$	$\overline{\xi}_2$	$\overline{F}_1$	$\overline{\lambda}_1$	$\overline{\lambda}_2$	$\overline{\lambda}_3$	$\overline{\lambda}_4$
0	3.00	3.00	3.02	0.00	12.07	3.98	0.00	0.00	0.00
1	9.70	6.37	2.15	2.01	16.63	0.00	1.99	0.00	2.00
2	6.69	9.37	3.98	1.36	21.34	1.40	1.19	0.21	0.00
3	6.76	8.86	3.91	1.43	21.34	1.35	1.29	0.05	0.00
4	6.76	8.93	3.90	1.43	21.34	1.35	1.29	0.05	0.00

Таблица 2

Поиск стационарной точки U-функции задачи (2) по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом

Итер.	$\overline{\eta}_1$	$\overline{\eta}_2$	$\overline{F}_2$	$\overline{\mu}_1$	$\overline{\mu}_2$	$\overline{\mu}_3$	$\overline{\mu}_4$	$\overline{F}$	$\overline{U}$
0	0.50	2.00	8.01	2.00	0.00	0.00	0.99	20.08	20.16
1	2.19	2.00	14.76	1.99	0.00	0.00	1.00	31.38	31.47
2	4.01	0.81	18.48	0.00	1.49	2.47	0.00	39.82	37.83
3	3.88	1.12	18.88	1.63	0.68	0.04	0.00	40.22	40.21
4	3.93	1.07	18.93	1.61	0.69	0.07	0.00	40.27	40.23

Таблица 3

Поиск стационарной точки U-функции задачи (2) по параметрам ν_1 и ν_3 градиентным методом

Итер.	∇_{ν_1}	∇_{ν_3}	$\| \nabla \|$	w_{ν_1}	w_{ν_3}	*Step*		${\nu_1}^*$	${\nu_3}^*$
0	3.99	2.00	4.46	0.89	0.45	7.50		9.70	6.37
1	−1.99	1.99	2.82	−0.71	0.71	4.25		6.69	9.37
2	0.21	−1.48	1.50	0.14	−0.99	0.50		6.76	8.86
3	0.06	0.95	0.95	0.06	1.99	0.05		6.76	8.92
4	****	****	****	****	****	****		****	****

Графическое представление траектории движения в пространстве параметров для задачи (2) показано белыми стрелками на рис. 2.

Литература

1. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.
2. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979.
3. *Умнов Е.А., Умнов А.Е.* Метод параметрической линеаризации, использующий штрафные функции со всюду обратимой производной для решения пар двойственных задач // Труды МФТИ. 2011. Т. 3, № 1(9). С. 146–152.
4. *Умнов Е.А., Умнов А.Е.* Параметрический анализ в задачах математического программирования // Труды МФТИ. 2014. Т. 6, № 3(23). С. 73-83.

References

1. *Evtushenko Ju.G.* Methods of solution of extremal problems and their applications in systems of optimization. M.: Nauka, 1982. (in Russian).
2. *Fedorov V.V.* Numerical methods of maximin. M.: Nauka, 1979. (in Russian).
3. *Umnov E.A., Umnov A.E.* Parametric linearization method using penalty functions with everywhere invertable derivation. Proceedings of MIPT. 2011. V. 3, N 1. P. 146–152. (in Russian).
4. *Umnov E.A., Umnov A.E.* Parametric analysis in mathematical programming problems. Proceedings of MIPT. 2014. V. 6, N 2. P. 73–83. (in Russian).

Поступила в редакцию 17.10.2017