УДК 519.855

П. А. Бирюкова, А. Е. Умнов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Об одном методе анализа решений оптимизационных задач для систем математических моделей

Целью данной работы является построение оптимизационной задачи для системы математических моделей (ММ), состоящей из нескольких отдельных объектов. Предложенная ММ была приведена к параметрической форме, допускающей двухуровневый метод ее решения. На основе метода гладких штрафных функций предложены метод решения задачи и метод определения параметров чувствительности полученных решений.

Ключевые слова: комплексы математических моделей, метод гладких штрафных функций, оптимизационные задачи, декомпозиционная схема, чувствительность решений, матрица чувствительности.

P. A. Biryukova, A. E. Umnov

Moscow Institute of Physics and Technology (State University)

On one method of analysis of solutions of optimization problems for systems of mathematical models

The aim of this paper is to present the optimization problem for the system of mathematical models of several objects. This mathematical model is created in parametrical form, which has a two-steps method of its solution. We show the method of problem solution and the method of decision sensitivity parameters of solutions using the penalty method.

Key words: systems of mathematical models, penalty function method, decomposition, optimization problems, sensitivity of decision, matrix of sensitivity.

В настоящей работе рассматривается метод решения конечномерных оптимизационных задач, формулируемых для комплексов математических моделей (ММ), описывающих функционирование отдельных подсистем этого комплекса[1]. В прикладной математике задачи данного класса применяются при моделировании экономических, социальных, технических и других систем. Постановка задачи, рассматриваемая в нашей работе, заключается в следующем. Предположим, что необходимо связать в единый комплекс N ММ, для каждой из которых формулируется задача математического программирования (МП): минимизировать по $x^s \in \mathbb{R}^{n^s}$ функцию $f^s(x^s)$ при условиях

$$\varphi_i^s(x^s) \leqslant 0,\ i = \overline{1, m^s},\ s = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где $\mathbb{R}^{n^s}$ – евклидово n^s-мерное пространство[2].

В более краткой записи задача (1) имеет вид

$$f^s(x^s) \to \min_{x^s \in G_s},\ s = \overline{1, N}, \tag{2}$$

где $G_s = \{x^s \in \mathbb{R}^{n^s} : \varphi_i^s(x^s) \leqslant 0,\ i = \overline{1, m^s}\}$.

Система ММ (СММ) представляет собой объединение N ММ (1), (2), связанных логически для всех моделей условиями (ограничениями) и функцией цели, представляющей

[1] В специальной научной литературе для комплексов ММ используется термин distributed modeling, [1].

[2] Ограничения типа равенства также могут быть включены в условие задачи (1), но это не приводит к существенному усложнению задачи.

собой линейную комбинацию их целевых функций. Математические формулировки СММ могут иметь различный вид [6].

Рассмотрим СММ в виде
минимизировать по всем $x^s \in G_s,\ s = \overline{1,N}$,

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha^s f^s(x^s) \tag{3}$$

при условиях

$$x^s \in G_s,\ s = \overline{1,N}, \sum_{s=1}^{N} h_j^s(x^s) \leqslant V_j,\ j = \overline{1,M};\ \alpha^s > 0,\ s = \overline{1,N}.$$

В задаче (3) числа $V_j,\ j = \overline{1,M}$, при других постановках могут быть параметрами. Весовые коэффициенты α^s в (3) назначаются экспертами; часто $\alpha^s \equiv 1,\ s = \overline{1,N}$. Введем вектор $x = \{x^1, x^2, ..., x^N\}$ размерности $n = m^1 + m^2 + ... + m^N$ и множества $G^j = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{s=1}^{N} h_j^s(x^s) \leqslant V_j\},\ j = \overline{1,M}$, тогда задачу (3) можно записать в виде

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha^s f^s(x^s) \to \min_{x^s \in G_s,\ x \in G^j,\ s=\overline{1,N}, j=\overline{1,M}}. \tag{4}$$

Для решения оптимизационной задачи (3) модифицируем ее и задачи (1). Задачи (1) будем рассматривать в виде
минимизировать по $x^s \in \mathbb{R}^{n^s}$ функцию $f^s(x^s)$ при условиях

$$\varphi_i^s(x^s) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m^s},\ \text{и}\ h_j^s(x^s) \leqslant V_j^s,\ j = \overline{1,M},\ s = \overline{1,N}, \tag{5}$$

где V_j^s – параметры, удовлетворяющие условию

$$\sum_{s=1}^{N} V_j^s \leqslant V_j,\ j = \overline{1,M}. \tag{6}$$

Обозначим

$$\overline{G_s} = \{x^s \in \mathbb{R}^{n^s} : \varphi_i^s(x^s) \leqslant 0,\ i = \overline{1,m^s};\ h_j^s(x^s) \leqslant V_j^s,\ j = \overline{1,M},\ s = \overline{1,N}\}. \tag{7}$$

Тогда задача (5) будет иметь вид

$$f^s(x^s) \to \min_{x^s \in \overline{G_s},\ s=\overline{1,N}}. \tag{8}$$

Учитывая (6) и (7), модифицированную задачу (4) представим в виде

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha^s f^s(x^s) \to \min \tag{9}$$

при условиях

$$x^s \in \overline{G_s},\ s = \overline{1,N}, R_j(V) = \sum_{s=1}^{N} V_j^s - V_j \leqslant 0,\ j = \overline{1,M}.$$

Условия $R_j(V)$ в (9) – это условия (6). Максимальная размерность вектора параметров V равна $(N+1)M$. Как отмечалось ранее, не все V_j могут быть параметрами, некоторые из них могут быть фиксированными числами, и наоборот, в ограничения задачи (1) могут быть также быть введены параметры. Кроме того, возможны и ограничения на V_j. Поэтому будем считать, что размерность вектора V равна некоторому числу $L : V \in \mathbb{R}^L$, а размерность вектора $R(V)$ равна числу M, не обязательно совпадающему с (6). Таким образом, задача (9) будет иметь вид

$$\sum_{s=1}^{N} \alpha^s f^s(x^s) \to \min_{x\in\mathbb{R}^n,\, V\in\mathbb{R}^L}, \tag{10}$$

где $x^s \in \overline{G_s}$, $s = \overline{1,N}$, $R_j(V) \leqslant 0, j = \overline{1,M}$.

Переменными задачи (10) являются векторы x и V; ее размерность $n+L$ может оказаться большой. Рассмотрим метод ее решения, учитывающий структуру этой задачи.

Предположим, что задача (10) имеет локальное изолированное решение (x^{*s}, $s = \overline{1,N}$; V^*), а также имеют решения задачи (8) для всех параметров V, т.е. можно рассматривать их решения как функции $x^{*s}(V)$. Подставив $x^{*s}(V)$ в (10), получим

$$\min \sum_{s=1}^{N} \alpha^s f^s(x^{*s}(V)) \text{ по } V \in \mathbb{R}^L$$

при условии

$$\varphi_i^s(x^{*s}(V)) \leqslant 0,\ i = \overline{1, m^s};\ h_j^s(x^{*s}(V)) \leqslant V_j^s, R_j(V) \leqslant 0,\ j = \overline{1,M}. \tag{11}$$

Так как функции $x^{*s}(V)$, $s = \overline{1,N}$, удовлетворяют ограничениям задачи (11), то из (11) получаем задачу

$$\min \sum_{s=1}^{N} \alpha^s f^s(x^{*s}(V)),\ V \in \mathbb{R}^L \text{ и } R_j(V) \leqslant 0,\ j = \overline{1,M}, \tag{12}$$

т.е. получили задачу (12) значительно меньшей размерности, чем задача (10), особенностью которой является то, что неизвестны вектор-функции $x^{*s}(V)$, $s = \overline{1,N}$.

Функции $x^{*s}(V)$, $s = \overline{1,N}$, являются негладкими, что затрудняет построение методов решения задачи (12).

Идея предлагаемого метода состоит в замене функций $x^{*s}(V)$ другими, которые:
а) достаточно гладкие;
б) достаточно близкие к $x^{*s}(V)$;
в) определены $\forall\, V \in \mathbb{R}^L$.

Указанным требованиям удовлетворяют решения задач (8), полученные методом гладких штрафных функций (ШФ), [2]. Ограничения задач математического программирования (2) в задаче (5) или (8) обозначим:

$$\varphi_i(x^s, V) = \begin{cases} \varphi_i(x^s),\ i = \overline{1, m^s}, \\ h_j^s(x^s) - V_j,\ i = \overline{m^s + 1, m^s + j},\ j = \overline{1,M}. \end{cases}$$

Таким образом, получаем ограничения $\varphi_i(x^s, V) \leqslant 0$, $i = \overline{1, \overline{m^s}}$, где $\overline{m^s} = m^s + M$, и задача (8) имеет теперь вид

$$f^s(x^s) \to \min_{x^s \in \overline{G_s}}, \tag{13}$$

где $\overline{G_s} = \{x^s \in \mathbb{R}^{n^s} : \varphi_i^s(x^s, V) \leqslant 0,\ i = \overline{1, \overline{m^s}}\}$.

Более краткая по форме запись (13) задачи (8) нужна далее для удобной формулировки метода ее решения.

Метод ШФ для задачи (13) заключается в последовательной безусловной минимизации вспомогательной функции

$$E^s(x^s, V) = f^s(x^s) + \sum_{i=1}^{\overline{m^s}} P(T, \varphi_i^s(x^s, V)), \tag{14}$$

где штрафная функция $P(T,\lambda)$ определена для всех λ и удовлетворяет условию из [3]:

$$\lim_{T\to+0} P(T,\lambda) = \begin{cases} 0,\ \lambda<0,\\ +\infty,\ \lambda>0,\end{cases}$$

причем при некоторых условиях на $f^s,\ \varphi_i,\ P$ имеет место равенство

$$\lim_{T\to+0} \arg\min_{x^s} E^s(x^s,V) = x^{*s}(V). \tag{15}$$

Можно показать, что $\overline{x}^s(T,V) = \arg\min\limits_{x^s} E^s(T,x^s,V)$ обладает всеми указанными выше свойствами [2].

Рассмотрим задачу (10) в следующей форме:
найти

$$\min \sum_{s=1}^{N} \alpha^s f^s(x^s) \text{ по } x\in\mathbb{R}^n,\ V\in\mathbb{R}^L \tag{16}$$

при условиях $\varphi_i^s(x^s,V)\leqslant 0,\ i=\overline{1,\overline{m^s}},\ R_j(V)\leqslant 0,\ j=\overline{1,M}$.

Вспомогательная функция $E(x,V)$ для нее имеет вид

$$E(x,V) = \sum_{s=1}^{N}\alpha^s f^s(x^s) + \sum_{j=1}^{M} P(T,R_j(V)) + \sum_{s=1}^{N}\sum_{i=1}^{\overline{m^s}} P(T,\varphi_i^s(x^s,V)), \tag{17}$$

которую можно переписать также в виде

$$E(x,V) = \sum_{s=1}^{N}\alpha^s f^s(x^s) + \sum_{j=1}^{M} P(T,R_j(V)) + \sum_{s=1}^{N}\alpha^s\sum_{i=1}^{\overline{m^s}} P(T,\varphi_i^s(x^s,V)). \tag{18}$$

Множитель $\alpha^s>0$, введенный в третье слагаемое, не изменит свойств ШФ. Напомним, что вектор x в $E(x,V)$ равен $x=\{x^1,x^2,...,x^N\}$. Используя (14), из (18) получим более краткую форму представления $E(x,V)$:

$$E(x,V) = W(T,V) + \sum_{s=1}^{N}\alpha^s E^s(x^s,V), \tag{19}$$

где $W(T,V)=\sum_{j=1}^{M} P(T,R_j(V))$.

Приближенные значения оптимального решения x^*,V^* задачи (10) можно найти, решив задачу безусловной минимизации (БМ):

$$\min E(x,V), x\in\mathbb{R}^n, V\in\mathbb{R}^L, \tag{20}$$

однако мы предложим другой метод ее решения.

При решении N задач БМ: найти $\min\limits_{x^s\in\mathbb{R}^{n^s}} E^s(x^s,V)$ получаем решения $\overline{x^s}(T,V),\ s=\overline{1,N}$.

Подставляя $\overline{x^s}(T,V)$ в (19), получим функцию от переменной V:

$$\overline{E}(\overline{x},V) = W(T,V) + \sum_{s=1}^{N}\alpha^s E^s(\overline{x^s}(T,V),V), \tag{21}$$

где $\overline{x}=(\overline{x^1}(T,V),\overline{x^2}(T,V),...,\overline{x^N}(T,V))$.

Решение задачи БМ: найти $\min\overline{E}(\overline{x},V)$ при некоторых условиях, накладываемых на $f^s,\ \varphi_i^s,\ P,$ [3] обладает следующим свойством: $\lim\limits_{T\to+0} \arg\min\limits_{V\in\mathbb{R}^L} \overline{E}(\overline{x},V)=V^*$,

где V^* – компонента оптимального решения (x^*,V^*) задачи (10).

Итерационная схема решения задачи (10) методом ШФ.

1) Пусть задан начальный вектор $V_0 \in \mathbb{R}^L$.

2) Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ находим приближение V_k :

   $V_{k+1} = V_k + t_k W_k$, где W_k – вектор направления убывания функции $\overline{E}(\overline{x}(V), V)$ в точке V_k; t_k – шаг по направлению W_k.

3) Проверка условия окончания метода для функции $\overline{E}(\overline{x}(V), V)$ в точке $V = V_k$. Если условие выполнено – *stop*, не выполнено – $k \to k+1$ и переходим к пункту 2.

Замечание

1) Условие остановки метода ШФ для решения задач $\min E^s(x^s, V)$, $x^s \in \mathbb{R}^{n^s}$, и задачи (20) следующие:

   а) выбирается достаточно малое значение коэффициента штрафа $T_{\min}$;

   б) значения градиентов на k-м шаге целевых функций должны быть достаточно малы:

$$\left\| \frac{\partial E^s}{\partial x^s} \right\|_{x^s = \overline{x_k}} \leqslant \varepsilon, \; s = \overline{1, N}; \; \left\| \frac{\partial \overline{E}}{\partial V} \right\|_{V = V_k} \leqslant \varepsilon.$$

2) В качестве штрафной функции $P(T, \alpha)$ могут быть взяты, например, функции $Te^{\frac{\alpha}{T}}$ или $\frac{\sqrt{\alpha^2 + T^4} + \alpha}{2T^2}$. Помимо бесконечной дифференцируемости по α и $T > 0$, эти функции, как показано в [3], обеспечивают погрешность решения задач порядка малости T. Причем вторая из них, как показывает опыт решения тестовых задач, более удобна, поскольку сходимость численных методов может нарушаться из-за ограниченности области допустимых значений аргумента экспоненты.

Как указывалось выше, функция $P(T, \lambda)$ – гладкая, поэтому для применения метода ШФ необходимо знать значения $\operatorname{grad}_V \overline{E}(\overline{x}(V), V) \equiv \frac{\partial \overline{E}}{\partial V}$ и матрицу вторых производных $\left\{ \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial V_r \partial V_j} \right\}$, $r, j = \overline{1, S}$. Дифференцируя сложную функцию $(\overline{x}(V), V)$ по V, получим

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial V} = \frac{\partial E}{\partial V} + \frac{\partial \overline{x}}{\partial V} \cdot \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial V} + \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial x^s}{\partial V} \cdot \frac{\partial E}{\partial x^s}, \tag{22}$$

где $\frac{\partial x}{\partial V}^s$, $s = \overline{1, N}$ – матрицы чувствительности вектора x^s по параметру V. Матрица $\frac{\partial \overline{x}}{\partial V}$ составлена из N матриц $\frac{\partial \overline{x}}{\partial V}^s$. Компоненты вектора $\frac{\partial \overline{E}}{\partial V}$ равны

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial V_r} = \frac{\partial E}{\partial V_r} + \sum_{s=1}^{N} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial x_i^s} \cdot \frac{\partial \overline{x}^s}{\partial V_r}, \; r = \overline{1, L}. \tag{23}$$

Так как $\operatorname{grad}_{x^s} E^s(T, x^s, V) \equiv \frac{dE^s}{dx^s}\Big|_{x = \overline{x}^s} = 0$, то из (22) (или (23)) получим

$$\frac{d\overline{E}}{dV} = \frac{dE}{dV}, \tag{24}$$

т.е. для вычисления первых производных от вспомогательной функции $(T, \overline{x}^s(V), V)$ не требуются значения матриц чувствительности $\frac{dx^s}{dV}$, $s = \overline{1, N}$.

Продифференцируем $\frac{d\overline{E}}{dV_r}$ по V_j, $r, j = \overline{1, L}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial V_r \partial V_j} = \frac{\partial^2 E}{\partial V_r \partial V_j} + \textstyle\sum_{s=1}^{N} \sum_{i=1}^{n^s} \frac{\partial^2 E}{\partial V_r \partial x_i^s} \cdot \frac{\partial \overline{x}_i^s}{\partial V_j} + \sum_{s=1}^{N} \sum_{i=1}^{n^s} \frac{\partial E}{\partial x_i^s} \cdot \frac{\partial^2 \overline{x}_i^s}{\partial V_r \partial V_j} + \\ + \textstyle\sum_{s=1}^{N} \sum_{i=1}^{n^s} \frac{\partial \overline{x}_i^s}{\partial V_r} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i^s \partial V_r} + \sum_{j=1}^{n^s} \frac{\partial^2 E}{\partial x_i^s \partial x_j^s} \cdot \frac{\partial x_i^s}{\partial V_j} \right). \end{aligned} \tag{25}$$

Так как $\frac{\partial E}{\partial x_i^s} = 0,\ s = \overline{1, N}$, то третье слагаемое в (24) равно нулю. Продифференцируем $\frac{\partial E}{\partial x_i^s} = 0,\ s = \overline{1, N}$, по V_j, получим

$$\frac{\partial^2 E^s}{\partial V_j \partial x_i^s} + \sum_{j=1}^{n_s} \frac{\partial^2 E^s}{\partial x_i^s \partial x_j^s} \cdot \frac{\partial \overline{x}_j^s}{\partial V_j} = 0,\ s = \overline{1, N},\ j = \overline{1, S}. \tag{26}$$

Таким образом, и четвертое слагаемое в (26) равно нулю. Из (25) в итоге получим

$$\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial V_r \partial V_j} = \frac{\partial^2 E}{\partial V_r \partial V_j} + \sum_{s=1}^{N} \sum_{i=1}^{n_s} \frac{\partial^2 E}{\partial V_r \partial x_i^s} \cdot \frac{\partial \overline{x}_i^s}{\partial V_j}, \tag{27}$$

где для вычисления $\frac{\partial^2 \overline{E}}{\partial V_r \partial V_j}$ надо знать N матриц чувствительности $\frac{\partial \overline{x}_i^s}{\partial V_j}$, значения которых определяются из системы уравнений (26). Итак, имея в своем распоряжении формулы (24) и (27), можно для решения задач БМ найти:

$$\min E^s(x^s, V),\ x^s \in R^{n^s},\ s = \overline{1, N}; \tag{28}$$

$$\min \overline{E}(\overline{x}, V),\ V \in \mathbb{R}^L, \tag{29}$$

применять численные методы 1-го и 2-го порядков и тем самым находить приближенные значения согласующих параметров $V_j,\ j = \overline{1, L}$ и соответствующие им значения $\overline{x}^s,\ s = \overline{1, N}$, и $f^s(\overline{x}^s)$ и $\sum_{s=1}^{N} \alpha^s f^s(\overline{x}^s)$.

Отметим также одну важную специфику решения задачи (29). Дело в том, что процедура поиска минимума состоит из поиска направления W_k движения к минимуму в пространстве $\mathbb{R}^L$ и выбора величины шага t_k по этому направлению. Использование стандартных алгоритмов оценки величины шага может потребовать затрат больших вычислительных ресурсов, поскольку для каждой пробной точки в $\mathbb{R}^L$ потребуется решать N задач (28). Это следует обязательно учитывать, т.к. процедуры выбора шага t_k и построения направления W_k могут быть зависимыми. Одним из способов решения указанной проблемы является выбор такого метода решения задачи БМ (29), в котором число пробных шагов для выбора t_k невелико. К таким методам относится метод Ньютона, у которого в его области сходимости $t_k = 1$.

Чувствительность оптимальных решений для систем ММ

Под чувствительностью решений ММ обычно понимают скорость измерения исследуемой функции в зависимости от значения параметров модели [4]. В нашем случае – это производные $\frac{\partial x^s(V)}{\partial V_j},\ s = \overline{1, N},\ j = \overline{1, S}$, и $\frac{\partial f^s(x^s(V))}{\partial V_j}$, а также $\frac{\partial \sum_{s=1}^{N} \alpha^s f^s(x^s(V))}{\partial V_j},\ j = \overline{1, S}$. Для определения матрицы чувствительности $\frac{\partial x^s(V)}{\partial V_j},\ s = \overline{1, N},\ j = \overline{1, S}$, необходимо решить систему линейных уравнений ЛУ (26).

Очевидно, значение

$$\frac{\partial f^s(x^s(V))}{\partial V_j} = \sum_{i=1}^{n^s} \frac{\partial f^s(x^s)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i^s(V)}{\partial V_j},\ j = \overline{1, S}. \tag{30}$$

В (23) значение $\frac{\partial f^s(x^s)}{\partial E_i}$ находится прямым дифференцированием, а значения $\frac{\partial x^s(V)}{\partial V_j}$ берутся из решения систем ЛУ (26).

Значение производной (чувствительности) целевой функции составной ММ очевидно равно линейной комбинации производных N функций $f^s(x^s)$:

$$\frac{\partial \sum_{s=1}^{N} \alpha^s f^s(x^s(V))}{\partial V_j} = \sum_{s=1}^{N} \sum_{i=1}^{n^s} \frac{\partial f^s(x^s)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i^s(V)}{\partial V_j},\ j = \overline{1, S}. \tag{31}$$

Наше определение чувствительности решений (ЧР) является частным случаем ЧР, рассматриваемой в [5].

Для иллюстрации практического использования описанного подхода приведем пример. Необходимо связать в одну систему следующие ММ.

Модель 1. Минимизировать $(-3x_1^1 - x_2^1)$ при условиях:

$$\begin{array}{l} 0 \leqslant x_1^1 \leqslant 2;\ 0 \leqslant x_2^1 \leqslant 4, \\ 2x_1^1 + x_2^1 \leqslant V_1, \\ x_1^1 + x_2^1 \leqslant V_2. \end{array} \tag{32}$$

Модель 2. Минимизировать $(2x_1^2 - x_2^2)$ при условиях:

$$\begin{array}{l} 0 \leqslant x_1^2 \leqslant 3;\ 0 \leqslant x_2^2 \leqslant 3, \\ x_1^2 + 4x_2^2 \leqslant V_3, \\ x_1^2 + x_2^2 \leqslant V_4. \end{array} \tag{33}$$

Модель 3. Минимизировать $(-2x_1^3 - 3x_2^3)$ при условиях:

$$\begin{array}{l} 0 \leqslant x_1^3 \leqslant 5;\ 0 \leqslant x_2^3 \leqslant 3, \\ 3x_1^3 + x_2^3 \leqslant V_5, \\ x_1^3 + x_2^3 \leqslant V_6. \end{array} \tag{34}$$

Модель 4. Минимизировать $(x_1^4 - 2x_2^4)$ при условиях:

$$\begin{array}{l} 0 \leqslant x_1^4 \leqslant 4;\ 0 \leqslant x_2^4 \leqslant 5, \\ 2x_1^4 + 3x_2^4 \leqslant V_7, \\ x_1^4 + x_2^4 \leqslant V_8. \end{array} \tag{35}$$

Модели 1, 2, 3, 4 сформулированы в виде задачи (5).

Составная модель имеет вид

$$\min(-3x_1^1 - x_2^1 + 2x_1^2 - x_2^2 - 2x_1^3 - 3x_2^3 + x_1^4 - 2x_2^4)$$

при условиях на $x_i^s,\ s = \overline{1,4},\ i = \overline{1,2}$, удовлетворяющих (30) – (34) и условию

$$\sum_{j=1}^{8} V_j \leqslant 19. \tag{36}$$

Штрафная функция $P(T, \alpha) = \frac{\sqrt{\alpha^2 + T^4} + \alpha}{2T^2}$ и $T_{\min} = 0,01$.

Для решения задач БМ был применен метод Ньютона. Решение было получено на 9-й итерации. Согласно оценкам из [2], погрешность решения составила 2%. Приведем решение задачи (36) в табл. 1.

Итоговое решение

Общее число выполненных итераций: 9.
Общая вспомогательная функция: –19,10.
Норма вектора направления: 2,10 e^{-6}.
Величина шага по направлению: 0.

Таблица 1

Модель	**1**	**2**	**3**	**4**
Значения переменных x_i^s	1,00 0	0 0,30	0 1,83	0 0,5
Целевая функция	3	0,30	5,50	1,00
Вспомогательная функция	–3,01	–0,33	–5,55	–1,03
Согласующие параметры V_j	2,00 1,00	1,20 1,00	1,83 1,83	1,50 1,00
Вектор направления	0,23 0,12	0,03 0	0,23 0,23	0,14 0

Заключение

В данной работе рассмотрен один из вариантов построения комплекса ММ сложной системы, состоящей из N отдельных объектов. Предложенная оптимизационная ММ была приведена к параметрической форме, допускающей построение декомпозиционной схемы ее решения. Для решения оптимизационных задач был применен метод гладких штрафных функций. Отмечена специфика декомпозиционной схемы решения этих задач и сформулирован алгоритм их решения. Декомпозиционная схема решения задач позволяет получить приближенные значения параметров чувствительности их решений. Как нам представляется, приведенная методика построения комплексы ММ и их решения применимы для построения широкого класса ММ экономических, социальных, технических и других систем.

Литература

1. *Umnov A.E., Albegov M.M.* An Approach to Distributed Modeling. IIASA, RR-82-3, Laxenburg, Austria, Feb. 1982.
2. *Умнов А.Е.* Метод штрафных функций в задачах большой размерности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15, № 6. С. 1399–1411.
3. *Марковцев Д.А., Умнов А.Е., Умнов Е.А.* Параметрическая оптимизация для систем математических моделей // Сб. Тр. ИСА РАН. 2007. Т. 31(1). С. 42–50.
4. *Розенвассер Е.М., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем автоматического управления. Л.: Энергия, 1969.
5. *Измайлов А.Ф.* Чувствительность в оптимизации. М.: Физматлит, 2006.
6. *Умнов А.Е., Умнов Е.А.* Параметрический анализ решений задачи быстродействия для дискретных линейных моделей оптимального управления // Сб. Тр. ИСА РАН. 2007. Т. 31(1). С. 81–86.

References

1. *Umnov A.E., Albegov M.M.* An Approach to Distributed Modeling. IIASA, RR-82-3, Laxenburg, Austria, Feb.1982.
2. *Umnov A.E.* The method of penalty in problems of high dimensionality. J. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1975. V. 15, N 6. P. 1399–1411. (in Russian).
3. *Markovtsev D.A., Umnov A.E., Umnov E.A.* Parametric optimization for the systems of mathematical models. Proceedings of Institute for Systems Analysis RAS. 2007. V. 31(1). P. 42–50. (in Russian).
4. *Rosenwasser E.M., Yusupov R.M.* The sensitivity of the automatic control systems. Leningrad: Energy, 1969. (in Russian).

5. *Izmailov A.F.* The sensitivity of the optimization. Moscow: Fizmatlit, 2006. (in Russian).

6. *Umnov A.E., Umnov E.A.* Parametric analysis of the solutions optimal control problem for discrete linear optimal control models. Proceedings of Institute for Systems Analysis RAS. 2007. V. 31(1). P. 81–86. (in Russian).

Поступила в редакцию 13.12.2016