Олимпиада по теоретической физике

Условия и решения

Суббота 25 апреля 2015 г. 12:20 – 17:00
аудитория 115КПМ

1 Внезапное воздействие (М.В. Суслов)

Частица с массой m находится в связанном состоянии ψ_0 в одномерном поле δ-ямы

$$U(x) = -\frac{\hbar^2\kappa}{m}\delta(x).$$

В начальный момент времени $t = 0$ проводится измерение, которое определяет находится ли частица справа от ямы (при $x > 0$). Если частица не обнаруживается справа от ямы, то волновая функция при $x > 0$ обнуляется, а слева от ямы (при $x < 0$) остаётся неизменной (с точностью до нормировки).

Определите следующие вероятности:
p_1 — при упомянутом выше измерении в момент времени $t = 0$ частица обнаружена справа от ямы (событие 1).
p_2 — событие 1 не произошло, при $t \to +\infty$ частица снова обнаружена в связанном состоянии.
p_3 — событие 1 не произошло, при $t \to +\infty$ частица обнаружена справа от от ямы при $x \gg 1/\kappa$.
p_4 — событие 1 не произошло, при $t \to +\infty$ частица обнаружена далеко от от ямы при $x \ll -1/\kappa$.

Решение

Волновая функция связанного состояния имеет вид

$$\psi_0(x) = \sqrt{\kappa}e^{-\kappa|x|}.$$

В силу чётности волновой функции $\psi_0(x)$ плотность вероятности $|\psi_0(x)|^2$ также чётна, так что вероятности обнаружить частицу при $x > 0$ и при $x < 0$ равны. Следовательно $p_1 = \frac{1}{2}$. Если событие 1 не произошло, то волновая функция принимает вид

$$\psi_1(x) = \sqrt{2}\,\theta(-x)\,\psi_0(x), \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Множитель $\sqrt{2}$ добавлен для нормировки.

Разложим состояние ψ_1 на чётную и нечётную части:

$$\psi_1(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x), \qquad \psi_\pm(x) = \frac{\psi(x) \pm \psi(-x)}{2}.$$

$$\psi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(x), \qquad \psi_-(x) = -\mathrm{sgn}(x)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_0(x).$$

Мы видим, что если частица была в состоянии ψ_1, то вероятность обнаружить её в состоянии ψ_0 равна $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$.

$$p_2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

В силу стационарности состояния ψ_0 эта вероятность не зависит от времени. Если частица находится в состоянии ψ_0, то вероятность обнаружить её на больших расстояниях от ямы ($|x| \gg 1/\kappa$) стремится к нулю ($\sim e^{-2\kappa|x|}$).

Поскольку для δ-ямы есть только одно связанное состояние ψ_0, то ψ_- — суперпозиция нечётных состояний непрерывного спектра. При $t \to +\infty$ функция $\psi_-(x,t) \to 0$ при любом фиксированном x (доказательство см. ниже), т.к. волновой пакет неограниченно расплывается (плотность вероятности утекает на бесконечность). При этом нечётная функция ψ_- остаётся нечётной. Таким образом, вероятность обнаружить частицу при $t \to +\infty$ на больших расстояниях от ямы связана с вкладом ψ_-. В силу нечётности ψ_- и чётности соответствующей плотности вероятности $|\psi_-(x,t)|^2$ вероятности обнаружить частицу далеко слева и далеко справа равны:

$$p_3 = p_4 = \frac{1}{8}.$$

Докажем, что $\psi_-(x,t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для любого фиксированного x (участники олимпиады могли использовать это утверждение без доказательства). Нечётное состояние «не чувствует» δ-яму, так что ψ_- эволюционирует как если бы у нас была свободная частица. Эволюцию удобно выразить через импульсное представление

$$\psi_-(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{\frac{i}{\hbar}px}\, \psi_-(p,t)\, dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{\frac{i}{\hbar}px}\, \psi_-(p,0)\, e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}}\, dp =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i2mx^2}{t\hbar}} \int e^{-\frac{it}{2m\hbar}(p-\frac{2mx}{t})^2}\, \psi_-(p,0)\, dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i2mx^2}{t\hbar}} \int e^{-\frac{it}{2m\hbar}p^2}\, \psi_-(p+\tfrac{2mx}{t},0)\, dp.$$

При больших t значение $\psi_-(x,t)$ при фиксированном x стремится к нулю как интеграл от быстро осциллирующей функции:

$$\psi_-(x,t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-\frac{it}{2m\hbar}p^2}\, \psi_-(p,0)\, dp \to 0.$$

2 Одномерная модель процесса перезарядки (Е.А. Дорофеев)

Частица массы m совершает одномерное движение в поле двух δ-образных потенциальных ям:

$$U(x,t) = -\frac{\hbar^2\kappa}{m}\left(\delta(x) + \delta(x - \sqrt{a^2+v^2t^2})\right)$$

одна из которых неподвижно находится в начале координат, а вторая движется из правой бесконечности достигает координаты $x = a$, а затем повторяет движение в обратном направлении. В начале процесса, то есть при $t \to -\infty$ частица локализована на левой δ-яме и её волновая функция есть:

$$\psi_0(x) = \sqrt{\kappa}e^{-\kappa|x|}.$$

Определить вероятность того, что при $t \to +\infty$ частица «уедет» на бесконечность на правой δ-яме, считая, что ямы не сближаются очень сильно: $\kappa a \gg 1$ и правая δ-яма движется очень медленно: $vm/\hbar a\kappa^2 \ll 1$.

Решение

Поскольку по условию задачи гамильтониан системы

$$\hat{H}(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2\kappa}{m}\left[\delta(x) + \delta(x - b(t))\right]$$

(где $b(t) = \sqrt{a^2+v^2t^2}$) медленно меняется со временем, то следуя адиабатическому подходу Борна-Фока для решения временного уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t} = \hat{H}(t)\Psi(t) \tag{1}$$

рассмотрим ортонормированные собственные функции $\varphi_+(x,b(t))$ и $\varphi_-(x,b(t))$ связанных состояний гамильтониана $\hat{H}(t)$:

$$\hat{H}(t)\varphi_\pm(x,b(t)) = E_\pm(b(t))\varphi_\pm(x,b(t))$$

зависящих от времени как от параметра через функцию $b(t)$. Здесь $\varphi_+(x, b(t))$ - четная функция относительно преобразования $x \to b - x$ оставляющего инвариантным гамильтониан задачи, а $\varphi_-(x, b(t))$ соответственно нечетная. Эти функции имеют следующий вид (зависимость b от t для краткости опускаем):

$$\varphi_+(x,b) = \begin{cases} A_+ e^{k_+ x} & x < 0 \\ B_+(e^{-k_+ x} + e^{k_+(x-b)}) & 0 < x < b \\ A_+ e^{k_+(b-x)} & b < x \end{cases} \tag{2}$$

$$\varphi_-(x,b) = \begin{cases} A_- e^{k_- x} & x < 0 \\ B_-(e^{-k_- x} - e^{k_-(x-b)}) & 0 < x < b \\ -A_- e^{k_-(b-x)} & b < x \end{cases} \tag{3}$$

при этом условие непрерывности в точках $x = 0$ и $x = b$ и условие на скачок производной в этих же точках имеют соответственно вид:

$$A_\pm = B_\pm(1 \pm e^{-k_\pm b})$$

$$B_\pm(1 \mp e^{-k_\pm b}) + A_\pm(1 - 2\kappa/k_\pm) = 0$$

Для существования нетривиальных решений у этой системы необходимо выполнение равенства

$$k_\pm = \kappa(1 \pm e^{-k_\pm b}) \tag{4}$$

которое через $k_\pm$ и определяет энергии состояний $\varphi_+(x)$ и $\varphi_-(x)$

$$E_\pm = -\frac{\hbar^2 k_\pm^2}{2m}$$

Воспользуемся тем,что по условию задачи $\kappa a >> 1$, и поэтому расстояние между ямами всегда достаточно велико. Это позволяет решить уравнение (4) в явном виде с точностью до $O(e^{-2\kappa b})$:

$$k_\pm = \kappa(1 \pm e^{-\kappa b}) \tag{5}$$

Тогда расстояние между уровнями $E_\pm$ с той же точностью есть:

$$\Delta E = E_- - E_+ = \frac{2\hbar^2\kappa^2}{m} e^{-\kappa b} \tag{6}$$

Решение уравнения Шредингера (1) будем искать в "квазклассическом по времени" виде:

$$\Psi(x,t) = C_+\varphi_+(x,b(t))e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} E_+(b(\tau))d\tau} + C_-\varphi_-(x,b(t))e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} E_-(b(\tau))d\tau} \tag{7}$$

По условию задачи правая яма движется очень медленно. В этом случае коэффициенты $C_\pm$ можно считать постоянными и их нужно выбрать из начального условия. При $t = -\infty$ волновая функция $\Psi(x,t)$ должна совпадать с связанным состоянием локализованным на левой яме $\varphi_l(x) = \sqrt{\kappa}e^{-\kappa|x|}$. Это состояние при $b \to \infty$ совпадает со следующей суперпозицией

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_+(x) + \varphi_-(x)\right)$$

и поэтому следует положить

$$C_+ = C_- = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Тогда при $t = \infty$ функция $\Psi(x,t)$ будет представлять линейную комбинацию

$$\Psi(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varphi_+(x)e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} E_+(b(\tau))d\tau} + \varphi_-(x)e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} E_-(b(\tau))d\tau}\right) \tag{8}$$

которую можно представить в виде

$$\Psi(x,\infty) = C_l\varphi_l(x) + C_r\varphi_r(x)$$

здесь $\varphi_r(x) = \sqrt{\kappa} e^{-\kappa|x-b|}$ - состяние локализованное на правой яме, а коэффициенты C_l и C_r даются следующими выражениеми

$$C_l = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} E_+(b(\tau))d\tau} + e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} E_-(b(\tau))d\tau}\right)$$

$$C_r = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} E_+(b(\tau))d\tau} - e^{-\frac{i}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} E_-(b(\tau))d\tau}\right)$$

Вероятность того, что произойдет перезарядка и частица "уедет"на правой яме есть $w = |C_r|^2$. Простое вычисление дает

$$w = \sin^2(\eta)$$

$$\eta = \frac{1}{2\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta E(t) dt$$

где $\Delta E(\tau)$ дается выражением (6). Тогда

$$\eta = \frac{\hbar\kappa^2}{m}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa\sqrt{a^2+v^2t^2}} dt$$

Перейдем в этом интеграле к переменной $x = -\kappa a + \kappa\sqrt{a^2 + v^2t^2}$ тогда

$$dt = \frac{(\kappa a + x)dx}{v\kappa\sqrt{2\kappa a x + x^2}}$$

и интеграл примет вид

$$\eta = \frac{2\hbar\kappa^2}{mv\kappa} e^{-\kappa a}\int_0^{\infty} e^{-x}\frac{(\kappa a + x)}{\sqrt{2\kappa a x + x^2}} dx$$

Поскольку $\kappa a \gg 1$, а $x \sim 1$ то

$$\eta = \frac{2\hbar\kappa^2 \kappa a}{mv\kappa\sqrt{2\kappa a}} e^{-\kappa a}\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

Оставшийся интеграл равен $\sqrt{\pi}$. Окончательно

$$\eta = \sqrt{2\pi}\left(\frac{\hbar}{mva}\right)(\kappa a)^{3/2} e^{-\kappa a}$$

Поскольку ямадвижется очень медленно, то можно считать, что $\frac{\hbar}{mva} \gg 1$. Тогда даже наличие экспоненциально малого фактора $e^{-\kappa a}$ не означает что η, а с ней и вероятность перезарядки обязательно малы.

3 Вихри в сверхтекчей плёнке (С.Н. Бурмистров)

В тонкой (квазидвумерной) сверхтекучей плёнке энергия взаимодействия пары вихрь-антивихрь, т.е. двух паралелльных вихревых нитей с противоположно направленными циркуляциями одинаковой величины κ, зависит от расстояния между нитями:

$$U(r) = U_0 \ln\frac{r}{a}, \qquad U_0 = \rho d\frac{\kappa^2}{2\pi},$$

где a — минимально возможное расстояние между вихревыми нитями, ρ — плотность жидкости и d — толщина плёнки или длина каждой из нитей. Найти среднеквадратичное расстояние $\langle r^2\rangle$ между нитями в зависимости от температуры и определить температуру Березинского-Костерлица-Таулеса $T_{\text{БКТ}}$, выше которой должна происходить диссоциация пары вихрь-антивихрь.

Решение

Поскольку вероятность флуктуаций пропорциональна $\exp[-U(r)/T]$, то средний квадрат расстояния между вихревыми нитями может быть вычислен по формуле

$$\langle r^2\rangle = \frac{\int\limits_a^\infty 2\pi r\,dr\,r^2\,e^{-U(r)/T}}{\int\limits_a^\infty 2\pi r\,dr\,e^{-U(r)/T}} = \frac{\int\limits_a^\infty dr\,r^3\,\exp\left(-\frac{U_0}{T}\ln\frac{r}{a}\right)}{\int\limits_a^\infty dr\,r\,\exp\left(-\frac{U_0}{T}\ln\frac{r}{a}\right)} = a^2\frac{U_0-2T}{U_0-4T}.$$

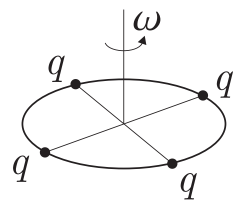
При $T=0$ средний квадрат расстояния между нитями минимален $\langle r^2\rangle = a^2$. С увеличением температуры $\langle r^2\rangle$ растёт и при температуре, равной

$$T_{\text{БКТ}} = \frac{U_0}{4} = \frac{\rho_s d\kappa^2}{8\pi},$$

обращается в бесконечность, т.е. произойдёт разрушение связанного состояния (диссоциация) пары вихрь-антивихрь.

4 Странное излучение (С.Н. Филиппов)

На ободе колеса радиуса R закреплены 4 одинаковых заряда q, образующих вершины квадрата (см. рис.). Колесо вращается с угловой скоростью ω такой, что $\omega R \ll c$. Найдите усреднённое по времени угловое распределение и интенсивность излучения.



Решение

Система обладает неизменными во времени дипольным, квадрупольным и магнитным моментами, поэтому соответствующих вкладов в излучении нет. Для расчета излучения в выражении для запаздывающих потенциалов удерживаем члены порядка $1/r$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}',t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,d^3\mathbf{r}' \approx \frac{q}{cr}\sum_a \mathbf{v}_a\left(t'+\frac{(\mathbf{r}'_a\cdot\mathbf{n})}{c}\right), \tag{9}$$

где $t' = t-\frac{r}{c}$, $\mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a(t')$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Подставляя члены разложения

$$\mathbf{v}_a\left(t'+\frac{(\mathbf{r}'_a\cdot\mathbf{n})}{c}\right) = \mathbf{v}_a(t') + \dot{\mathbf{v}}_a(t')\frac{(\mathbf{r}'_a\cdot\mathbf{n})}{c} + \ddot{\mathbf{v}}_a(t')\frac{(\mathbf{r}'_a\cdot\mathbf{n})^2}{2c^2} + \dddot{\mathbf{v}}_a(t')\frac{(\mathbf{r}'_a\cdot\mathbf{n})^3}{6c^3} + \ldots \tag{10}$$

в выражение (9), замечаем, что первые три слагаемых при суммировании по $a = 1,2,3,4$ дают нуль. С учетом $\dddot{\mathbf{v}}_a(t') = \omega^4\mathbf{r}'_a$ получаем:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{q}{6c^4 r}\sum_{a=1,2,3,4}\dddot{\mathbf{v}}_a(t')(\mathbf{r}'_a\cdot\mathbf{n})^3 = \frac{q\omega^4}{3c^4 r}\sum_{a=1,2}\mathbf{r}'_a(\mathbf{r}'_a\cdot\mathbf{n})^3 = \frac{q\omega^4 R^4}{3c^4 r}\sum_{a=1,2}\mathbf{n}'_a(\mathbf{n}'_a\cdot\mathbf{n})^3, \tag{11}$$

где $\mathbf{n}'_a = \frac{r'_a}{R}$ – единичные векторы, $(\mathbf{n}'_1\cdot\mathbf{n}'_2) = 0$. Пусть $\dot{\mathbf{n}}'_1 = \omega\mathbf{n}'_2$ и $\dot{\mathbf{n}}'_2 = -\omega\mathbf{n}'_1$, тогда

$$\begin{aligned}\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A} = -\frac{1}{c}[\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{A}}] = -\frac{q\omega^5R^4}{3c^5r}\quad\Big\{\quad & [\mathbf{n}\times\mathbf{n}'_1](\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_2)\left(3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_1)^2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_2)\right) - \\ & -[\mathbf{n}\times\mathbf{n}'_2](\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_1)\left(3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_2)^2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_1)\right)\Big\}.\end{aligned} \tag{12}$$

Угловое распределение

$$\begin{aligned}\frac{dI}{d\Omega} &= \frac{c}{4\pi}\mathbf{H}^2r^2 = \frac{q^2\omega^{10}R^8}{36\pi c^9}\left\{\left((\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_1)^2+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_2)^2\right)^3 - 16(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_1)^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_2)^2\left((\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_1)^2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'_2)^2\right)^2\right\} \\ &= \frac{q^2\omega^{10}R^8}{36\pi c^9}\sin^6\theta\left(1-\sin^2\theta\sin^2 4\omega t'\right),\end{aligned} \tag{13}$$

где θ – угол между направлением $\mathbf{n}$ и осью колеса. Усреднение по времени даёт

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\Omega} &= \frac{q^2\omega^{10}R^8}{36\pi c^9}\sin^6\theta\left(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta\right), \qquad (14) \\ I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta\, \frac{dI}{d\Omega} = \frac{16q^2\omega^{10}R^8}{567c^9}. \qquad (15) \end{aligned}$$