Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
А. А. Воронов
15 июня 2021 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Основы общей теории относительности**
по направлению подготовки:
03.04.01 «Прикладные математика и физика»,
14.04.02 «Ядерные физика и технологии»
16.04.01 «Техническая физика»
физтех-школа: **ФАКТ, ФРКТ, ЛФИ**
кафедра: **теоретической физики**
курс: 1 (магистратура)
семестр: 1
Трудоемкость:
лекции – 30 часов
практические (семинарские) занятия – 30 часов
Курсовые и контрольные работы – 4
Экзамен – 1 семестр

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60
Самостоятельная работа – 45 часов

Программу и задание составил к.ф.-м.н., доц.
С. Н. Вергелес

Программа принята на заседании
кафедры теоретической физики
28 мая 2021 года

Заведующий кафедрой
д.ф.-м.н., профессор
Ю. М. Белоусов

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ

1. Многообразия. Векторы на многообразии и касательное пространство. Ковекторы и кокасательное пространство. Тензоры и тензорные поля на многообразии.

2. Дифференциальные формы на многообразии. Внешнее умножение дифференциальных форм. Внешний дифференциал дифференциальной формы. Комплекс де Рама. Интегрирование дифференциальных форм. Теорема Стокса. Формулы Гаусса–Остроградского и Грина.

3. Векторные расслоения. Связности на расслоении. Связности, согласованные с метрикой на метризованных расслоениях.

4. Перенесение вектора по бесконечно малому параллелограмму. Тензор кривизны. Тензор кручения. Структурные уравнения Картана. Тождества Бианки.

II. ГЕОМЕТРОДИНАМИКА

1. Вывод уравнения движения частицы в гравитационном поле. Переход к нерелятивистскому пределу.

2. Тензор энергии–импульса материи.

3. Уравнения Эйнштейна.

4. Нерелятивистский предел и закон Ньютона.

5. Псевдотензор энергии–импульса.

6. Слабые гравитационные волны в пустоте.

7. Центрально-симметричное гравитационное поле. Решение Шварцшильда. Гравитационный коллапс сферического тела.

8. Движение в центрально-симметричном гравитационном поле массивных и безмассовых частиц. Смещение перигелия орбиты и искривление луча света, пролетающего мимо звезды.

9. Изотропное пространство. Закрытая изотропная модель. Открытая изотропная модель. Красное смещение.

10. Размышления о проблеме квантования гравитации.

Литература

Основная

1. *Вергелес С.Н.* Лекции по общей теории относительности. – Москва : МФТИ, 2017.

2. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. – Москва : Наука, 1979.

3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – Москва : Физматлит, 2006.

4. *Дирак П.А.М.* Общая теория относительности. – Москва : Атомиздат, 1978.

Дополнительная

1. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. – Москва : Мир, 1975.

З А Д А Н И Е

1. Пусть X, Y, Z — векторные поля. Определим коммутатор двух векторных полей $[X,\, Y] = -[Y,\, X]$ как набор следующих компонент:

$$[X,\, Y] = X^j \frac{\partial}{\partial x^j} Y^i - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} X^i \,.$$

а) Доказать, что коммутатор двух векторных полей есть вектор, т.е. набор n указанных компонент преобразуется как набор компонент вектора при общих преобразованиях координат.

б) Доказать тождество Якоби:

$$[X,\, [Y,\, Z]] + [Y,\, [Z,\, X]] + [Z,\, [X,\, Y]] \equiv 0 \,.$$

2. Доказать равенство $dd\omega = 0$ для любой дифференциальной формы.

3. Пусть $\mathcal{X}$ – пространство R^2, из которого удалено начало координат. Показать, что 1-форма

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

замкнута, т.е. $d\omega = 0$, но не точна, т.е. $\omega \neq df$ ни для какой функции f на $\mathcal{X}$.

4. **а)** Пусть $\mathcal{X}$ – пространство R^3 с координатами x, y, z, $\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$ – произвольная 2-форма в R^3 и область $D \subset R^3$ имеет регулярную границу. Используя теорему Стокса, доказать формулу Гаусса–Остроградского:

$$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV =$$

$$= \iint_{\partial D} (\, P\,n_x + Q\,n_y + R\,n_z \,)\, dS.$$

Здесь dV и dS – элементы объема пространства R^3 и площади поверхности $S = \partial D$ соответственно, а $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z\,)$ – единичная нормаль к поверхности S, направленная во внешность D.

б) Пусть $D \subset R^2$ – область с регулярной границей ∂D и $\omega = P\,dx + Q\,dy$ – произвольная 1-форма в R^2. Доказать при помощи теоремы Стокса формулу Грина:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \oint_{\partial D} (\, P\,dx + Q\,dy\,).$$

в) Получить формулу Стокса в трехмерном пространстве из общей теоремы Стокса.

5. Определим сферу S^2 в пространстве R^3 с координатами x, y, z уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Пусть метрика на сфере S^2 индуцирована евклидовой метрикой $dS_E^2 = dx^2 + dy^2 + + dz^2$ пространства R^3. Найти на S^2 связность без кручения, согласованную с этой метрикой, и ее тензор кривизны.

6. Вычислить

$$[\,\nabla_\mu,\, \nabla_\nu\,]\, X^\lambda \equiv (\,\nabla_\mu\,\nabla_\nu - \nabla_\nu\,\nabla_\mu\,)\, X^\lambda\,,$$

где X^λ – компоненты контравариантного векторного поля и ∇_μ – оператор контравариантного дифференцирования.

7. Вывести формулу

$$\nabla_\mu J^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_\mu(\sqrt{|g|}\,J^\mu)$$

при отсутствии кручения.

8. а) Вывести уравнение движения частицы в гравитационном поле из принципа наименьшего действия

$$\delta S = -mc\delta\int ds = 0, \qquad ds = \sqrt{g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu}.$$

б) Доказать, что вариационный принцип

$$\delta S = -\frac{1}{2}\,\delta\int d\tau\left\{\frac{1}{e(\tau)}\,g_{\mu\nu}(x(\tau))\frac{dx^\mu}{d\tau}\cdot\frac{dx^\nu}{d\tau} + e(\tau)(mc)^2\right\},$$

где $e(\tau)$ и $x^\mu(\tau)$ – независимые переменные, эквивалентен вариационному принципу из пункта а).

9. Используя тождество Бианки, доказать, что в отсутствие кручения имеет место тождество

$$\nabla_\nu\left(R^\nu_\mu - \frac{1}{2}\,\delta^\nu_\mu R\right) = 0.$$

Здесь R^ν_μ – тензор Риччи, R – скалярная кривизна пространства и ∇_μ – оператор ковариантного дифференцирования.

10. Оценить уносимую гравитационными волнами энергию системы, состоящей из двух звезд, вращающихся друг вокруг друга.

11. В четырёхмерном пространстве-времени (размерность 3+1) для каждого значения импульса имеется два независимых фотона (спиральности ± 1) и два независимых гравитона (спиральности ± 2). Сколько имеется фотонов в пространствах размерности $(2+1)$ и $(1+1)$? То же самое для гравитонов.

12. В линеаризованной теории гравитации в нерелятивистском пределе найти все компоненты метрического тензора. В случае вращающегося центрально-симметричного тела выразить компоненты g_{0i} на больших расстояниях от тела через его механический момент импульса.

13. Найти метрику для заряженной центрально-симметричной звезды (чёрной дыры) в области пространства, в которой имеются лишь гравитационное и электромагнитное поля.

14. На поверхности планеты (без атмосферы) стоит зенитная пушка, которая выстреливает часы вертикально вверх. В момент вылета из ствола часы синхронизируются с другими такими же часами, которые прикреплены к пушке. Через некоторое время часы, вылетевшие из ствола пушки, под действием силы тяжести падают рядом со вторыми часами. Какие часы отстанут в момент падения первых часов?

15. Изучить движение частицы в центрально-симметричном гравитационном поле:

а) Найти угловое смещение перигелия орбиты спутника Солнца за один оборот.

б) Вычислить угловое отклонение светового луча, пролетающего мимо Солнца.

16. Тело движется по круговой орбите ($r = \text{const}$) в метрике Шварцшильда. Найти зависимость момента импульса и энергии от радиуса r.

17. Рассмотрим "наивную"модель Вселенной в духе ньютоновской механики: трехмерное пространство является плоским, в нем равномерно и изотропно в среднем распределены звезды, причем светимости одинаковых объемов пространства одинаковы. Показать, что в такой модели светимость неба оказалась бы бесконечно большой.

18. Доказать, что в замкнутом пространстве полный электрический заряд равен нулю.

19*. Определим в пятимерном пространстве Минковского с координатами $z_0, \ldots, z_4$ и метрикой

$$d\,s^2 = d\,z_0^2 - d\,z_1^2 - d\,z_2^2 - d\,z_3^2 - d\,z_4^2$$

гиперповерхность при помощи уравнения

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - z_4^2 = -H^{-2}, \quad H = \text{const}\,.$$

Эта гиперповерхность называется пространством де Ситтера. Пусть метрика в пространстве де Ситтера индуцируется метрикой в пространстве Минковского, в которое оно вложено. Найти тензор кривизны Римана в пространстве де Ситтера. Каким должен быть тензор энергии-импульса материи, чтобы метрика пространства де Ситтера удовлетворяла уравнению Эйнштейна?

Срок сдачи задания: 06.12 – 13.12. 2021 г.

Подписано в печать 15.06.2021. Формат $60 \times 84^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 0,5. Уч.-изд. л. 0,4. Тираж 50 экз. Заказ № 103.
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
тел.: +7(495)408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
тел.: +7(495)408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru