

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 1

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили x^2 , его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2 , его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

2. Решите неравенство

$$x^{\log_3 x} - 2 \leq \left(\sqrt[3]{3}\right)^{\log_{\sqrt{3}}^2 x} - 2 \cdot x^{\log_3 \sqrt[3]{x}}.$$

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{5}\right)$, а числа $3 + \sin x, 3 + \sin y, 3 + \sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C . Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω , описанной около треугольника ABC . Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 4 и 9.

а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC .

б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны AB .

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(60; 45)$. Найдите количество таких квадратов.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a - 2 \leq 0, \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - b^2 + 4b + 6 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a .

7. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ – правильный треугольник ABC . Объем пирамиды равен $\frac{25}{\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D , равна 3. Точка M – середина ребра CD .

Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB .

б) Найдите все возможные значения длины ребра CD , если дополнительно известно, что грани BSD и ABC взаимно перпендикулярны.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 2

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2 , его наибольшее значение увеличилось на $\frac{27}{2}$, а когда из него вычли $4x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если из него вычесть $2x^2$?

2. Решите неравенство

$$\left(\sqrt[10]{125}\right)^{\log^2_{\sqrt{5}} x} + 3 \geq x^{\log_5 x} + 3 \left(\sqrt[5]{x}\right)^{\log_5 x}.$$

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos \frac{1}{9}$, а числа $5 + \cos x, 5 + \cos y, 5 + \cos z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\cos y$.
4. В треугольнике ABC сторона AB равна $\sqrt{11}$, а угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C . Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω , описанной около треугольника ABC . Расстояния от точек A и C до этой касательной относятся как 9 : 25.
- а) Найдите отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC .
- б) Найдите расстояние от точки C до прямой ℓ и радиус окружности Ω .
5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55; 40)$. Найдите количество таких квадратов.
6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a + 4 \leq 0, \\ x^2 + y^2 + 10x + 2y - b^2 - 8b + 10 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a .

7. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ – правильный треугольник ABC . Объём пирамиды равен $\frac{100}{3\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D , равна 4. Точка M – середина ребра CD . Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.
- а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB .
- б) Найдите все возможные значения длины ребра CD , если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 3

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2 , его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2 ?
2. Решите неравенство

$$x^{\log_{13} x} + 7 (\sqrt[3]{x})^{\log_{13} x} \leq 7 + \left(\sqrt[3]{13}\right)^{\log_{\sqrt{13}} x}.$$

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$, а числа $2 + \sin x, 2 + \sin y, 2 + \sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.
4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C . Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω , описанной около треугольника ABC . Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 5 и 12.
 - а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC .
 - б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны BC .
5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(25; 60)$. Найдите количество таких квадратов.
6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x \cos a - y \sin a - 3 \leq 0, \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y - b^2 - 6b + 8 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a .

7. Основание треугольной пирамиды $KLMN$ объёма 75 – правильный треугольник KLM со стороной 10. Точка T – середина ребра MN . Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, равны между собой.
 - а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре KL .
 - б) Найдите все возможные значения длины ребра MN , если дополнительно известно, что грани KLM и LMN перпендикулярны.

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

БИЛЕТ 4

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарем

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $2x^2$, его наибольшее значение увеличилось на 10, а когда из него вычли $5x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на $\frac{15}{2}$. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $3x^2$?

2. Решите неравенство

$$\left(\sqrt[7]{4}\right)^{\log^2_{\sqrt{2}} x} + 6 \geq x^{\log_2 x} + 6 \left(\sqrt[7]{x}\right)^{\log_2 x}.$$

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha = \arccos \frac{5}{9}$, а числа $1 + \cos x, 1 + \cos y, 1 + \cos z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\cos y$.
4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C . Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω , описанной около треугольника ABC . Радиус окружности Ω равен $5\sqrt{2}$, а расстояния от точек A и C до касательной ℓ относятся как $2 : 5$.
- а) Найдите отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC .
- б) Найдите расстояние от точки C до прямой ℓ и длину стороны AB .
5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(35; 65)$. Найдите количество таких квадратов.
6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x \cos a + y \sin a + 3 \leq 0, \\ x^2 + y^2 + 8x - 4y - b^2 + 6b + 11 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a .

7. Основание треугольной пирамиды $KLMN$ объёма 100 – правильный треугольник KLM со стороной 10. Точка T – середина ребра MN . Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, равны между собой.
- а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре KL .
- б) Найдите все возможные значения длины ребра MN , если дополнительно известно, что грани KLM и LMN взаимно перпендикулярны.