УДК 519.2

Н. А. Волков

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)
Инжиниринговый центр МФТИ

Монотонность функции биномиального распределения возле медианы

Для биномиальной случайной величины ξ с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и b/n хорошо известно, что ее медиана равна b, если $b \in \{1, \ldots, n\}$. В 2018 году Дмитриев и Жуковский исследовали монотонность по b функции $\mathsf{P}(\xi < b)$. В данной статье этот результат обобщен для случайной величины ξ с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и $b/(n + c)$ для произвольного $c \in [0, 1]$, а также подтверждена гипотеза, сформулированная Дмитриевым и Жуковским.

Ключевые слова: теория вероятностей, комбинаторика, биномиальное распределение, медиана.

N. A. Volkov

Moscow Institute of Physics and Technology
Center for engineering and technology of MIPT

Monotonicity of the binomial distribution function near the median

For the binomial random variable ξ with parameters $n \in \mathbb{N}$ and b/n its median is b if $b \in \{1, \ldots, n\}$. In 2018, Dmitriev and Zhukovskii study the monotonicity by b of the function $\mathsf{P}(\xi < b)$. In this paper this result is generalized to the random variable ξ with parameters $n \in \mathbb{N}$ and $b/(n + c)$ for all $c \in [0, 1]$, and the Dmitriev and Zhukovskii hypothesis is also confirmed.

Key words: probability theory, combinatorics, binomial distribution, median.

1. Введение

Для биномиальной случайной величины ξ с параметрами $n \in \mathbb{N}$ и b/n хорошо известно, что ее медиана равна b, если $b \in \{1, \ldots, n\}$ [1]. Рассмотрим биномиальную случайную величину $\xi_{b,n,c}$ с параметрами n и $\frac{b}{n+c}$, где $b < n$ — натуральные числа и $c \in (0, 1)$. Обозначим $p_{b,n,c} := \mathsf{P}(\xi_{b,n,c} < b)$. В статье [2] доказана

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

- *Если* $n \geqslant 3b + 2$, *то* $p_{b+1,n,0} > p_{b,n,0}$.
- *Если* $n \leqslant 3b + 1$, *то* $p_{b+1,n,0} < p_{b,n,0}$.

Заметим, что в 1968 году Джогдео и Самуэльс [3] изучали поведения вероятности $p_{b,n,0}$, а также отношения $\mathsf{P}(\xi = b)$ и $1/2 - \mathsf{P}(\xi < b)$, что мотивировано известным вопросом Рамануджана, относящимся к пуассоновским случайным величинам (см., например, [4]).

Кроме того, исследование монотонности $p_{b,n,c}$ по b мотивировано задачей о неравенстве малых отклонений (см., например, [5]), которая может быть сформулирована следующим образом: для $c > 0$ найти минимум $\mathsf{P}(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n < n + c)$ по всем множествам независимых неотрицательных случайных величин $\{\xi_1, ..., \xi_n\}$ с одинаковым средним. Эта задача до сих пор не решена. Тем не менее, было показано (см., например, [6]), что оптимальными случайными величинами являются величины, принимающие два значения с вероятностью 1 (как говорится, *с двумя атомами*). Если мы далее ограничимся *одинаково распределенными* случайными величинами с двумя атомами, то сведем исходную задачу к анализу монотонности $p_{b,n,c}$ по b.

В настоящей работе доказано, что если $c = 1$, то справедлива монотонность $p_{b,n,c}$ по b.

Теорема 2. *Если $c = 1$, то $p_{b+1,n,c} > p_{b,n,c}$ при любых $1 \leqslant b < n$.*

Из монотонности $p_{b,n,1}$ следует приведенная далее гипотеза, ранее сформулированная в [2].

Гипотеза 1. *Пусть $\alpha \in (0,1), \beta > 1$. Пусть b — целое число такое, что*

$$b < \frac{n+1-n\alpha}{\beta-\alpha} \leqslant b+1.$$

Тогда $\mathsf{P}(\xi_1 + ... + \xi_n < n+1) \geqslant p_{b,n,1}$, где $\xi_1, ..., \xi_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со средним 1, и равенство выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ и $\frac{n+1}{\beta} = b+1$.

Аналогичные этой гипотезе утверждения можно сформулировать для любого $c \in (0,1)$. В этой связи в данной статье исследована монотонность для всех $c \in (0,1)$.

Во-первых, обобщен первый пункт теоремы 1 на случай произвольного $c \in [0,1]$.

Теорема 3. *Если $n \geqslant 3b+2$, то $p_{b+1,n,c} > p_{b,n,c}$.*

Во-вторых, получен *асимптотический* результат, утверждающий, что порог, при котором монотонность меняется, равен $\frac{n}{3(1-c)}(1+o(1))$.

Теорема 4. $\forall \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \forall c \in (0,1)\ \exists n_0\ \forall n \geqslant n_0\ \forall b \in (\varepsilon n, n)$:

- *при $b < \frac{n(1-\delta)}{3(1-c)}$ выполнено $p_{b+1,n} > p_{b,n}$*
- *при $b > \frac{n(1+\delta)}{3(1-c)}$ выполнено $p_{b+1,n} < p_{b,n}$*

Благодаря этому существенно обобщена теорема 1 и получен инструмент, с помощью которого можно сформулировать следствия, аналогичные гипотезе 1.

2. Вспомогательные утверждения

Далее в статье будут использованы следующие обозначения:

1) $\Delta_{b,n+c} = \left[1 - \frac{b+1}{n+c}, 1 - \frac{b}{n+c}\right]$;

2) $g(z) = (1-z)^{b-1} z^{n-b}$;

3) $g_{b,n,c} = \int_{\Delta_{b,n+c}} g(z)dz$.

2.1. Полезное выражение для $p_{b,n,c}$

В этом разделе обобщим на случай произвольного c утверждения 1–3 из статьи [2].

Утверждение 1.

$$p_{b+1,n,c} - p_{b,n,c} = \frac{\left(\frac{b+1}{n+c}\right)^b \left(1 - \frac{b+1}{n+c}\right)^{n-b} - b\int_{1-\frac{b+1}{n+c}}^{1-\frac{b}{n+c}} (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}{b\int_0^1 (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}.$$

Доказательство. Запишем $p_{b,n}$ следующим способом:

$$p_{b,n,c} = \sum_{i=0}^{b-1} \binom{n}{b-1} \binom{b-1}{i} \frac{(n-b+1)!(b-1-i)!}{(n-i)!} \left(\frac{b}{n+c}\right)^i \left(1 - \frac{b}{n+c}\right)^{n-i}.$$

Поскольку

$$\frac{(n-b)!(b-1-i)!}{(n-i)!} = \frac{\Gamma(n-b+1)\Gamma(b-i)}{\Gamma(n-i+1)} = \mathrm{B}(n-b+1, b-i) = \int_0^1 x^{n-b}(1-x)^{b-i-1} dx,$$

получаем

$$p_{b,n,c} = n\binom{n-1}{b-1} \times$$

$$\times \int_0^1 \left[\sum_{i=0}^{b-1} \binom{b-1}{i} (1-x)^{b-i-1} \left(\frac{b}{n+c}\right)^i \left(1 - \frac{b}{n+c}\right)^{b-i-1}\right] x^{n-b} \left(1 - \frac{b}{n+c}\right)^{n-b+1} dx =$$

$$= \frac{n!}{(n-b)!(b-1)!} \int_0^1 \left[\frac{b}{n+c} + (1-x)\left(1 - \frac{b}{n+c}\right)\right]^{b-1} x^{n-b} \left(1 - \frac{b}{n+c}\right)^{n-b+1} dx =$$

$$= \frac{n!}{(n-b)!(b-1)!} \int_0^1 \left[1 - x\left(1 - \frac{b}{n+c}\right)\right]^{b-1} \left[x\left(1 - \frac{b}{n+c}\right)\right]^{n-b} d\left[x\left(1 - \frac{b}{n+c}\right)\right] =$$

$$= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-b+1)\Gamma(b)} \int_0^{1-\frac{b}{n+c}} (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz = \frac{\int_0^{1-\frac{b}{n+c}} (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}{\int_0^1 (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}.$$

Следовательно,

$$p_{b+1,n,c} - p_{b,n,c} = \frac{\int_0^{1-\frac{b+1}{n+c}} (1-z)^b z^{n-b-1} dz}{\int_0^1 (1-z)^b z^{n-b-1} dz} - \frac{\int_0^{1-\frac{b}{n+c}} (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}{\int_0^1 (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz} =$$

$$= \frac{\int_0^{1-\frac{b+1}{n+c}} (1-z)^b d\left(z^{n-b}\right)}{\int_0^1 (1-z)^b d\left(z^{n-b}\right)} - \frac{\int_0^{1-\frac{b}{n+c}} (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}{\int_0^1 (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz} =$$

$$= \frac{\left(\frac{b+1}{n+c}\right)^b \left(1 - \frac{b+1}{n+c}\right)^{n-b} + b\int_0^{1-\frac{b+1}{n+c}} (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}{b\int_0^1 (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz} - \frac{\int_0^{1-\frac{b}{n+c}} (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}{\int_0^1 (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz} =$$

$$= \frac{\left(\frac{b+1}{n+c}\right)^b \left(1 - \frac{b+1}{n+c}\right)^{n-b} - b\int_{1-\frac{b+1}{n+c}}^{1-\frac{b}{n+c}} (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}{b\int_0^1 (1-z)^{b-1} z^{n-b} dz}. \quad \square$$

2.2. Изучение поведения g

В статье [2] приведено следующее

Утверждение 2. Пусть $\ell \in \{1, \ldots, \min\{b-1, n-b\}\}$. Тогда

$$\frac{\partial^\ell g}{\partial z^\ell} = (1-z)^{b-1-\ell} z^{n-b-\ell} \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} (-1)^{\ell-i} z^{\ell-i} \frac{(n-1-i)!}{(n-1-\ell)!} \frac{(n-b)!}{(n-b-i)!}.$$

Аналогично статье [2], используя утверждение 2 и формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, получим верхнюю и нижнюю оценку для $g(z)$ на $\Delta_{b,n+c}$.

Обозначим для любого $\ell \in \mathbb{Z}_+$,

$$g_\ell(z) = \frac{1}{\ell!} \left(z - 1 + \frac{b+1}{n+c}\right)^\ell \left[\frac{\partial^\ell g}{\partial z^\ell} \left(1 - \frac{b+1}{n+c}\right)\right]$$

ℓ-м членом разложения g по формуле Тейлора, и $g_{\leqslant 3}(z) = \sum_{\ell=0}^{3} g_\ell(z)$. Также обозначим

$$d_4^-(z) = \frac{\partial^4 g}{\partial z^4}\left(1 - \frac{b+1}{n+c}\right), \quad d_4^+(z) = \frac{\partial^4 g}{\partial z^4}\left(1 - \frac{b}{n+c}\right).$$

Из доказательства утверждения 3 получаем, что для любого $5 \leqslant b \leqslant n/2$, функции d_4^- и d_4^+ являются нижними и верхними оценками $\partial^4 g/\partial z^4$ на $\Delta_{b,n+c}$.

Утверждение 3. Для $5 \leqslant b \leqslant n/3$ и всех $z \in \Delta_{b,n+c}$,

$$g_{\leqslant 3}(z) + g_4^+(z) \geqslant g(z) \geqslant g_{\leqslant 3}(z) + g_4^-(z),$$

где

$$g_4^-(z) = \frac{1}{24}\left(z - 1 + \frac{b+1}{n+c}\right)^4 d_4^-(z), \quad g_4^+(z) = \frac{1}{24}\left(z - 1 + \frac{b+1}{n+c}\right)^4 d_4^+(z).$$

Доказательство. Для каждого $\ell \in \{1, \ldots, \min\{b-1, n-b\}\}$, обозначим

$$f_\ell = \frac{\partial^\ell g/\partial z^\ell}{(1-z)^{b-1-\ell} z^{n-b-\ell}}.$$

Легко видеть, что для каждого ℓ, $\partial f_{\ell+1}/\partial z = -(\ell+1)(n-\ell-1) f_\ell$, и

$$f_2(z) = z^2(n-1)(n-2) - 2z(n-2)(n-b) + (n-b)(n-b-1)$$

отрицательна на

$$\Upsilon := \left(\frac{n-b}{n-1} - \frac{1}{n-1}\sqrt{\frac{(n-b)(b-1)}{n-2}}, \frac{n-b}{n-1} + \frac{1}{n-1}\sqrt{\frac{(n-b)(b-1)}{n-2}}\right).$$

Давайте покажем, что $\Delta_{b,n+c} \subset \Upsilon$. Во-первых,

$$1 - \frac{b+1}{n+c} \geqslant 1 - \frac{b+1}{n} > \frac{n-b}{n-1} - \frac{1}{n-1}\sqrt{\frac{(n-b)(b-1)}{n-2}},$$

так как разница между центральной и правой сторонами этого неравенства равна $\sqrt{\frac{(n-b)(b-1)}{n-2}} - \frac{2n-b-1}{n}$, и

$$n^2(n-b)(b-1) - (2n-b-1)^2(n-2) =$$

$$= n(b-5)(n(n-b)-b) + n(12n-15b-9) + 2b^2 + 2 + 4b > 0,$$

поскольку $5 \leqslant b \leqslant n/3$. Во-вторых,

$$1 - \frac{b}{n+c} < \frac{n-b}{n-1} + \frac{1}{n-1}\sqrt{\frac{(n-b)(b-1)}{n-2}}.$$

эквивалентно неравенству

$$(n-1)(n+c-b) - (n-b)(n+c) < (n+c)\sqrt{\frac{(n-b)(b-1)}{n-2}}.$$

В данном неравенстве левая часть равна $(1+c)b-(n+c)$, что при $n > b$ не превосходит $c(b-1)$. Поскольку $n+c < b-1$, правая часть больше, чем $(b-1)\sqrt{\frac{(n-b)(n+c)}{n-2}}$, причем выражение под корнем больше 1. Получаем, что $f_3(z)$ возрастает на $\Delta_{b,n+c}$.

Теперь покажем, что $f_3\left(1-\frac{b}{n+c}\right) < 0$. Заметим, что $f_3\left(1-\frac{b}{n+c}\right) = -P(b,n,c)/(c+n)^3$, где $P(b,n,c) = (5b-6)n^3 + (18b-18c+21bc-3b^2c-12b^2)n^2 + (3b^3c+7b^3-9b^2c^2-39b^2c-18b^2+ +27bc^2+36bc-18c^2)n + b^3c^3 + 9b^3c^2 + 18b^3c + 6b^3 - 6b^2c^3 - 27b^2c^2 - 18b^2c + 11bc^3 + 18bc^2 - 6c^3$.

Покажем, что $P(b,n,c)$ положителен. Поскольку $5 \leqslant b \leqslant n/3$, рассматривая первые два слагаемых, получаем, что $(5b-6)n^3 + (18b-18c+21bc-3b^2c-12b^2)n^2 \geqslant (5b-6)n^2\cdot 3b + (18b- -18c+21bc-3b^2c-12b^2)n^2 = G(b,c)n^2$, где $G(b,c) = 3(1-c)b^2 + 21cb - 18c$. Величина $G(b,c)$ как многочлен от b имеет точку минимума $b = -7c/(2(1-c))$, следовательно, возрастает при $b \geqslant 5$. Кроме того, $G(5,c) = 12c + 75$, следовательно, первые два слагаемых в $P(b,n,c)$ положительны.

Далее, при $b \geqslant 7$ коэффициент перед n в $P(b,n,c)$ не меньше, чем $(-9c^2 - 18c + 31)b^2 + 171c^2 + 252c$, что положительно при $c \in [0,1]$. Аналогично, свободный коэффициент не меньше $b^2c^3 + 36b^2c^2 + 108b^2c + 42b^2 + 71c^3 + 126c^2$, что также положительно при $c \in [0,1]$.

Рассмотрим случай $b = 5$, $P(5,n,c) = 19n^3 + (12c-210)n^2 + (-108c^2 - 420c + 425)n + 24c^3 + + 540c^2 + 1800c + 750 \geqslant (12c+75)n^2 + (-108c^2 - 420c + 425)n + 24c^3 + +540c^2 + 1800c + 750 \geqslant 75n^2 - 103n + 750 > 0$, поскольку $n \geqslant 3b = 15$ и $c \in [0,1]$. Полученный квадратный трехчлен не имеет корней. Рассмотрим случай $b = 6$, $P(5,n,c) = 24n^3 - 324n^2 + +(-180c^2 - 540c + 864)n + 60c^3 + 1080c^2 + 3240c + 1296 \geqslant 108n^2 + (-180c^2 - 540c + 864)n + 60c^3 + + 1080c^2 + 3240c + 1296 \geqslant 108n^2 + 144n + 1296 > 0$, поскольку $n \geqslant 3b = 18$ и $c \in [0,1]$. Полученный квадратный трехчлен также не имеет корней.

Поскольку f_3 возрастает на $\Delta_{b,n}$ и отрицательна в $1 - b/(n+c)$, $f_4'(z)$ положительна Δ_b. Более того, производная $(1-z)^{b-5}z^{n-b-4}$ по z также положительна на Δ_b. Таким образом, $\partial^4 g/\partial z^4$ возрастает на Δ_b, и это влечет утверждение 3. □

3. Доказательства теорем

3.1. Доказательство теоремы 3

Проинтегрируем функции g_ℓ по отрезку $\Delta_{b,n+c}$:

$$\int\limits_{1-\frac{b+1}{n+c}}^{1-\frac{b}{n+c}} g_\ell(z)dz = \int\limits_{1-\frac{b+1}{n+c}}^{1-\frac{b}{n+c}} \frac{1}{\ell!}\left(z-1+\frac{b+1}{n+c}\right)^\ell \left[\frac{\partial^\ell g}{\partial z^\ell}\left(1-\frac{b+1}{n+c}\right)\right]dz =$$

$$= \frac{1}{(\ell+1)!}\left(z-1+\frac{b+1}{n+c}\right)^{\ell+1}\Bigg|_{1-\frac{b+1}{n+c}}^{1-\frac{b}{n+c}} \left[\frac{\partial^\ell g}{\partial z^\ell}\left(1-\frac{b+1}{n+c}\right)\right]dz =$$

$$= \frac{1}{(\ell+1)!(n+c)^{\ell+1}}\frac{\partial^\ell g}{\partial z^\ell}\left(1-\frac{b+1}{n+c}\right).$$

Таким образом по утверждению 3 получаем

$$g_{b,n,c} \leqslant g^+_{b,n,c} := \sum_{\ell=0}^{3} \frac{1}{(\ell+1)!(n+c)^{\ell+1}} \frac{\partial^\ell g}{\partial z^\ell} \left(1 - \frac{b+1}{n+c}\right) + \frac{1}{120(n+c)^5} \frac{\partial^4 g}{\partial z^4} \left(1 - \frac{b}{n+c}\right).$$

Согласно утверждению 1 для доказательства $p_{b+1,n,c} > p_{b,n,c}$ достаточно показать, что

$$\left(\frac{b+1}{n+c}\right)^b \left(1 - \frac{b+1}{n+c}\right)^{n-b} - bg^+_{b,n,c} > 0.$$

Левая часть этого неравенства равна

$$\left(\frac{b+1}{n+c}\right)^b \left(1 - \frac{b+1}{n+c}\right)^{n-b} - bg^+_{b,n,c} =$$

$$= \frac{1}{24(n+c)^7} \left(\frac{b+1}{n+c}\right)^{b-4} \left(1 - \frac{b+1}{n+c}\right)^{n-b-3} L_{b,n} - \frac{b}{120(n+c)^5} \frac{\partial^4 g}{\partial z^4} \left(1 - \frac{b}{n+c}\right),$$

где $L_{b,n} = -24(b+1)^4(b-c-n+1)^3 - b\big(-24(b+1)^3(b-c-n+1)^3 - 12(b+1)^2(b-c-n+1)^2(b-c-2n+bc+1) - 4(b+1)(b^3c^2 + 4b^3c + b^3n + 2b^3 - b^2c^3 - b^2c^2n - 6b^2c^2 - 11b^2cn + 2b^2c - 2b^2n^2 - 7b^2n + 6b^2 + 3bc^3 + 9bc^2n - bc^2 + 7bcn^2 + 6bcn - 8bc + bn^3 + 10bn^2 - 17bn + 6b - 2c^3 - 8c^2n + 6c^2 - 11cn^2 + 17cn - 6c - 5n^3 + 12n^2 - 9n + 2) - b^3c^3 - 9b^3c^2 - 3b^3cn - 18b^3c - 7b^3n - 6b^3 + 6b^2c^3 + 12b^2c^2n + 18b^2c^2 + 3b^2cn^2 + 51b^2cn - 18b^2c + 15b^2n^2 + 15b^2n - 18b^2 - 11bc^3 - 36bc^2n + 9bc^2 - 36bcn^2 + 3bcn + 18bc - 8bn^3 - 24bn^2 + 51bn - 18b + 6c^3 + 24c^2n - 18c^2 + 33cn^2 - 51cn + 18c + 16n^3 - 39n^2 + 29n - 6\big) = 12b^6c - 12b^6 - 20b^5c^2 - 24b^5cn + 100b^5c + 28b^5n - 76b^5 + 9b^4c^3 + 20b^4c^2n - 119b^4c^2 + 12b^4cn^2 - 161b^4cn + 330b^4c - 20b^4n^2 + 151b^4n - 202b^4 + 38b^3c^3 + 92b^3c^2n - 298b^3c^2 + 61b^3cn^2 - 431b^3cn + 546b^3c + 4b^3n^3 - 91b^3n^2 + 321b^3n - 294b^3 + 75b^2c^3 + 184b^2c^2n - 337b^2c^2 + 128b^2cn^2 - 511b^2cn + 514b^2c + 16b^2n^3 - 140b^2n^2 + 373b^2n - 250b^2 + 46bc^3 + 112bc^2n - 210bc^2 + 79bcn^2 - 361bcn + 282bc + 12bn^3 - 141bn^2 + 247bn - 118b + 24c^3 + 72c^2n - 72c^2 + 72cn^2 - 144cn + 72c + 24n^3 - 72n^2 + 72n - 24$,

Достаточно показать, что

$$L_{b,n} > \frac{b(n+c)^2(\partial^4 g/\partial z^4)\left(1 - \frac{b}{n+c}\right)}{5\left(\frac{b+1}{n+c}\right)^{b-4}\left(1 - \frac{b+1}{n+c}\right)^{n-b-3}} = \frac{b}{5(b+1)(n+c-b-1)} R_{b,n},$$

где $R_{b,n} = b^4c^4 + 16b^4c^3 + 6b^4c^2n + 72b^4c^2 + 40b^4cn + 96b^4c + 3b^4n^2 + 46b^4n + 24b^4 - 10b^3c^4 - 20b^3c^3n - 80b^3c^3 - 6b^3c^2n^2 - 198b^3c^2n - 72b^3c^2 - 84b^3cn^2 - 352b^3cn + 192b^3c - 6b^3n^3 - 140b^3n^2 - 8b^3n + 96b^3 + 35b^2c^4 + 120b^2c^3n + 80b^2c^3 + 132b^2c^2n^2 + 366b^2c^2n - 216b^2c^2 + 44b^2cn^3 + 492b^2cn^2 - 432b^2cn + 3b^2n^4 + 146b^2n^3 - 6b^2n^2 - 300b^2n + 144b^2 - 50bc^4 - 220bc^3n + 80bc^3 - 354bc^2n^2 + 198bc^2n + 72bc^2 - 240bcn^3 + 84bcn^2 + 352bcn - 192bc - 52bn^4 - 74bn^3 + 420bn^2 - 392bn + 96b + 24c^4 + 120c^3n - 96c^3 + 228c^2n^2 - 372c^2n + 144c^2 + 196cn^3 - 492cn^2 + 392cn - 96c + 65n^4 - 226n^3 + 283n^2 - 146n + 24.$

Это неравенство справедливо тогда и только тогда, когда положителен многочлен $F(n,b,c) = 5(b+1)(n+c-b-1)L_{b,n} - bR_{b,n} = (44b^5 + 245b^4 + 530b^3 + 655b^2 + 326b + 120)c^4 + (n(145b^5 + 815b^4 + 1825b^3 + 2305b^2 + 1150b + 480) - 1784b - 3770b^2 - 4425b^3 - 2805b^4 - 991b^5 - 145b^6 - 480)c^3 + (3396b - n(320b^6 + 2286b^5 + 6787b^4 + 11111b^3 + 9693b^2 + 4843b + 1440) + 8053b^2 + 11426b^3 + 9712b^4 + 4858b^5 + 1355b^6 + 160b^7 + n^2(160b^5 + 931b^4 + 2193b^3 + 2869b^2 + 1447b + 720) + 720)c^2 + (n(180b^7 + 1745b^6 + 6890b^5 + 14762b^4 + 18272b^3 + 13613b^2 + 6218b + 1440) - 2744b - 7398b^2 - 12000b^3 - 12352b^4 - 8016b^5 - 3150b^6 - 680b^7 - 60b^8 + n^3(60b^5 + 385b^4 + 1001b^3 + 1415b^2 + 739b + 480) - n^2(180b^6 + 1450b^5 + 4741b^4 + 8337b^3 + 7639b^2 + 4213b + 1440) - 480)c + 806b + (20b^4 + 97b^3 + 192b^2 + 115b + 120)n^4 - n(200b^7 + 1475b^6 + 4691b^5 + 8302b^4 + 8990b^3 + 6143b^2 + 2519b + 480) + 2454b^2 + 4416b^3 + 5104b^4 + 3846b^5 + 1830b^6 + 500b^7 + 60b^8 - n^3(120b^5 + 669b^4 + 1541b^3 + 1651b^2 + 1139b + 480) + n^2(240b^6 + 1547b^5 + 4210b^4 + 6036b^3 + 5150b^2 + 2737b + 720) + 120.$

Рассмотрим его вторую производную $\frac{\partial^2 F(n,b,c)}{\partial c^2} = (528b^5+2808b^4+7680b^3+3240b^2+10512b-1728)c^2+(n(870b^5+4866b^4+12150b^3+7230b^2+18660b-3456)-4944b-33180b^2-20790b^3-17790b^4-5946b^5-870b^6-2880)c+7080b-n(640b^6+4572b^5+13778b^4+18814b^3+28182b^2+4094b+2880)+13082b^2+26884b^3+18128b^4+9716b^5+2710b^6+320b^7+(320b^5+1862b^4+4602b^3+3506b^2+8078b-1728)n^2+1440$ как многочлен от c при фиксированных n, b. При $b \geqslant 1$ коэффициент перед c^2 положителен. По условию утверждения $n \geqslant 3b+2$, тем самым коэффициент перед c больше, чем $1740b^6+8652b^5+18660b^4+900b^3+22800b^2-15312b-2880$, что положительно при $b \geqslant 1$. Получаем, что вершина соответствующей параболы находится при отрицательном c, следовательно, при $c \in (0,1)$ вторая производная возрастает.

Исследуем на ее значение при $c = 0$ и $b \geqslant 3$. Получаем $\frac{\partial^2 F(n,b,0)}{\partial c^2} = (320b^5+1862b^4+4602b^3+3506b^2+8078b-1728)n^2+(-640b^6-4572b^5-13778b^4-18814b^3-28182b^2-4094b-2880)n+320b^7+2710b^6+9716b^5+18128b^4+26884b^3+13082b^2+7080b+1440$. Рассмотрим это выражение как многочлен от n при фиксированном b. Очевидно, что при $b \geqslant 3$ свободный коэффициент и коэффициент перед n^2 положительны. По условию утверждения $n \geqslant 3b+2$, тем самым с помощью неравенства $n^2 > 3bn$ и положительности коэффициента перед n^2 получаем: $\frac{\partial^2 F(n,b,0)}{\partial c^2} > (320b^6+1014b^5+28b^4-8296b^3-3948b^2-9278b-2880)n+320b^7+2710b^6+9716b^5+18128b^4+26884b^3+13082b^2+7080b+1440$. При $b \geqslant 3$ с помощью неравенства $b^k \geqslant 3^3b^{k-3}, k > 3$ получаем, что коэффициент перед n не меньше, чем $344b^3+23430b^2-8522b-2880 > 0$.

Теперь рассмотрим случай $b = 1$, при котором $\frac{\partial^2 F(n,1,0)}{\partial c^2} = 16640n^2-72960n+79360$. Корни этого многочлена равны $n = 2$ и $n = 31/13$. Поскольку $n \geqslant 3b+2 = 5$, то многочлен положителен. В случае $b = 2$ получаем, что $\frac{\partial^2 F(n,2,0)}{\partial c^2} = 105300n^2-682020n+1098360$. Корни этого многочлена равны $n = 3$ и $n = 226/65$. Поскольку $n \geqslant 3b+2 = 8$, то многочлен положителен. Тем самым доказана положительность второй производной $\frac{\partial^2 F(n,b,c)}{\partial c^2}$ при всех n, b, c, удовлетворяющих условию $n \geqslant 3b+2$.

Рассмотрим первую производную при $c = 0$. Получаем: $\frac{\partial F(n,b,0)}{\partial c} = (60b^5+385b^4+1013b^3+951b^2+2247b-576)n^3+(-180b^6-1450b^5-4753b^4-7413b^3-11227b^2-1537b-1440)n^2+(180b^7+1745b^6+6890b^5+14298b^4+21160b^3+10797b^2+6610b+1440)n-60b^8-680b^7-3150b^6-8016b^5-13120b^4-10944b^3-7590b^2-2840b-480$. Видим, что коэффициенты перед n^3 и n положительны. Пусть $n \geqslant 3b+5$, тогда заменяя n^3 и n на $n^2(3b+5)$ и $3b+5$ соответственно, получаем: $\frac{\partial F(n,b,0)}{\partial c} \geqslant (5b^5+211b^4+505b^3+269b^2+7970b-4320)n^2+480b^8+5455b^7+26245b^6+69328b^5+121850b^4+127247b^3+66225b^2+34530b+6720 > 0$ при $b \geqslant 1$.

Отдельно разбирая случаи $3b+2 \leqslant n < 3b+5$, получаем, что во всех случаях первая производная положительна. Действительно, $\frac{\partial F(3b+2,b,0)}{\partial c} = 480b^8+3340b^7+10414b^6+13824b^5+21516b^4+33684b^3+14918b^2-11488b-7968$, $\frac{\partial F(3b+3,b,0)}{\partial c} = 480b^8+4060b^7+15654b^6+30762b^5+46148b^4+73128b^3+63990b^2-4430b-24672$, $\frac{\partial F(3b+4,b,0)}{\partial c} = 480b^8+4780b^7+21614b^6+52810b^5+86438b^4+133098b^3+148172b^2+29632b-54624$.

Величина $F(n,b,0)$ положительна согласно статье [2].

3.2. Доказательство теоремы 2

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для любого $z \in \left[1-\frac{b+1}{n+1}, 1-\frac{b}{n+1}\right]$ существует $d \in [0,1]$, для которого $g(z) = \sum_{\ell=0}^{3} g_\ell(z) + r(z,d)$, где

$$r(z,d) = \frac{1}{24}\left(z-1+\frac{b+1}{n+c}\right)^4 \frac{\partial^4 g}{\partial z^4}\left(1-\frac{b+d}{n+1}\right).$$

Учитывая полученную ранее формулу

$$\int\limits_{1-\frac{b+1}{n+1}}^{1-\frac{b}{n+1}} g_\ell(z)dz = \frac{1}{(\ell+1)!(n+1)^{\ell+1}} \frac{\partial^\ell g}{\partial z^\ell}\left(1-\frac{b+1}{n+1}\right),$$

а также аналогично получаемую

$$\int\limits_{1-\frac{b+1}{n+1}}^{1-\frac{b}{n+1}} r(z,d)dz = \frac{1}{120(n+1)^5} \frac{\partial^4 g}{\partial z^4}\left(1-\frac{b+d}{n+1}\right)$$

согласно утверждению 1 для доказательства $p_{b+1,n,c} > p_{b,n,c}$ достаточно показать, что

$$\left(\frac{b+1}{n+1}\right)^b \left(1-\frac{b+1}{n+1}\right)^{n-b} - b\int_{1-\frac{b+1}{n+1}}^{1-\frac{b}{n+1}} g(z)dz > 0,$$

Расписывая выражение в левой части неравенства, получаем

$$\left(\frac{b+1}{n+1}\right)^b \left(1-\frac{b+1}{n+1}\right)^{n-b} - b\int_{1-\frac{b+1}{n+1}}^{1-\frac{b}{n+1}} g(z)dz =$$

$$= \frac{(b+1)^{b-4}(n-b)^{n-b-3}}{24(n+1)^n} L(n,b,d) - \frac{b}{120(n+1)^5}\frac{\partial^4 g}{\partial z^4}\left(1-\frac{b+d}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{(b+1)^{b-4}(n-b)^{n-b-3}}{24(n+1)^n} L(n,b,d) - \frac{(b+d)^{b-5}(n+1-b-d)^{n-b-4}}{120(n+1)^n} R(n,b,d),$$

где $L(n,b,d) = 4b^5n+4b^5-8b^4n^2+10b^4n+18b^4+4b^3n^3-30b^3n^2-18b^3n-8b^3+16b^2n^3-12b^2n^2+ +46b^2n+2b^2+12bn^3-62bn^2-2bn+24n^3$ и $R(n,b,d) = b(3b^4n^2+92b^4n+209b^4-40b^3dn^2+24b^3dn+ +544b^3d-6b^3n^3-190b^3n^2-602b^3n-418b^3+6b^2d^2n^3-222b^2d^2n+504b^2d^2+60b^2dn^3+ +24b^2dn^2-852b^2dn-816b^2d+3b^2n^4+124b^2n^3+594b^2n^2+828b^2n+355b^2-8bd^3n^3+ +72bd^3n^2-208bd^3n+192bd^3-6bd^2n^4-6bd^2n^3+222bd^2n^2-282bd^2n-504bd^2-20bdn^4-76bdn^3+ +372bdn^2+892bdn+464bd-26bn^4-224bn^3-516bn^2-464bn-146b+d^4n^4-10d^4n^3+35d^4n^2- -50d^4n+24d^4+4d^3n^4-32d^3n^3+68d^3n^2+8d^3n-96d^3+12d^2n^4-60d^2n^3-12d^2n^2+204d^2n+ +144d^2+24dn^4-24dn^3-216dn^2-264dn-96d+24n^4+96n^3+144n^2+96n+24)$.

Рассмотрим отношение множителей перед полученными многочленами:

$$\frac{(b+d)^{b-5}(n+1-b-d)^{n-b-4}}{5(b+1)^{b-4}(n-b)^{n-b-3}} = \frac{1}{5(b+1)(n-b)}\left(\frac{b+d}{b+1}\right)^{b-5}\left(\frac{n-b+1-d}{n-b}\right)^{n-b-4}.$$

Поскольку $\ln(1+x) \leqslant x$ для любого $x > -1$ и $e^x < 1+2x$ для любого $x \in (0,1)$, получаем

$$\left(\frac{b+d}{b+1}\right)^{b-5}\left(\frac{n-b+1-d}{n-b}\right)^{n-b-4} =$$

$$= \exp\left[(b-5)\log\left(1-\frac{1-d}{b+1}\right) + (n-b-4)\log\left(1+\frac{1-d}{n-b}\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[-\frac{(b-5)(1-d)}{b+1} + \frac{(n-b-4)(1-d)}{n-b}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left[\frac{6(1-d)}{b+1}\right] < 1 + \frac{12(1-d)}{b+1} = \frac{b+13-12d}{b+1}.$$

Тем самым достаточно показать неотрицательность многочлена $P(n,b,d) = 5(b+1)^2(n-b)L(n,b,d) - (b+13-12d)R(n,b,d)$. Поскольку $b < n$, обозначим

$x = n/(b+1) \geqslant 1$. Сделав замену $n = (b+1)x$, будем исследовать на неотрицательность многочлен $F(b,x,d) = P((b+1)x,b,d)$ от независимых переменных $b \in \mathbb{N}, x \geqslant 1, d \in [0,1]$.

Выпишем данный многочлен, сгруппировав слагаемые по b: $F(b,x,d) = (20x^4 - 60x^3 + 60x^2 - 20x)b^9 + +(197x^4 - 524x^3 + 437x^2 - 90x - 20)b^8 + +(6d^2x^4 - 6d^2x^3 + 56dx^4 - 132dx^3 + 76dx^2 + 815x^4 - 1898x^3 + 1275x^2 - 62x - 130)b^7 + +(-d^4x^4 - 76d^3x^4 + 80d^3x^3 - 150d^2x^4 + 630d^2x^3 - 480d^2x^2 + 148dx^4 + 388dx^3 - -1632dx^2 + 1080dx + 2324x^4 - 5438x^3 + 4035x^2 - 526x - 369)b^6 + +(12d^5x^4 + 31d^4x^4 - 86d^4x^3 - 212d^3x^4 + 304d^3x^3 - 72d^3x^2 - 528d^2x^4 + +1152d^2x^3 - 894d^2x^2 + 510d^2x + 8dx^4 + 280dx^3 + 2952dx^2 - 5604dx + 1964d + 4374x^4 - 7430x^3 - -473x^2 + 6124x - 2319)b^5 + +(48d^5x^4 - 120d^5x^3 + 134d^4x^4 - 512d^4x^3 + 829d^4x^2 - 88d^3x^4 + 128d^3x^3 + +1516d^3x^2 - 2456d^3x - 492d^2x^4 + 108d^2x^3 + 1242d^2x^2 - 6546d^2x + 6024d^2 - 328dx^4 - 1344dx^3 + +292dx^2 + 13436dx - 11272d + 4901x^4 - 3720x^3 - 2692x^2 - 3872x + 5099)b^4 + +(72d^5x^4 - 360d^5x^3 + 420d^5x^2 + 206d^4x^4 - 1020d^4x^3 + 2019d^4x^2 - 2446d^4x + 248d^3x^4 - -640d^3x^3 + 2220d^3x^2 - 3144d^3x + 5856d^3 + 102d^2x^4 - 198d^2x^3 + 810d^2x^2 + 7110d^2x - 15840d^2 - -392dx^4 + 148dx^3 - 10644dx^2 + 3220dx + 14404d + 3171x^4 - 1814x^3 + 6120x^2 - 4574x - 4479)b^3 + +(48d^5x^4 - 360d^5x^3 + 840d^5x^2 - 600d^5x + 139d^4x^4 - 848d^4x^3 + 1551d^4x^2 - -1700d^4x + 2280d^4 + 292d^3x^4 - 848d^3x^3 - 396d^3x^2 + 1656d^3x - 8448d^3 + 354d^2x^4 + +702d^2x^3 - 3282d^2x^2 + 8346d^2x + 11976d^2 - 172dx^4 + 2716dx^3 - 1740dx^2 - 12316dx - 7688d + +1306x^4 - 3198x^3 + 3320x^2 + 4708x + 1874)b^2 + +(12d^5x^4 - 120d^5x^3 + 420d^5x^2 - 600d^5x + 288d^5 + +35d^4x^4 - 254d^4x^3 + 361d^4x^2 + 746d^4x - 1464d^4 + 92d^3x^4 - 304d^3x^3 - 1028d^3x^2 + 2344d^3x + +2976d^3 + 132d^2x^4 + 492d^2x^3 - 2436d^2x^2 - 5820d^2x - 3024d^2 - 24dx^4 + 1464dx^3 + 4536dx^2 + 4584dx + +1536d + 468x^4 - 1678x^3 - 1882x^2 - 1248x - 312)b + +120x^4$. Обозначим $F_k(x,d)$ — коэффициент в многочлене $F(b,x,d)$ перед b^k, тем самым $F(b,x,d) = \sum_{k=0}^{9} F_k(x,d)b^k$.

Покажем неотрицательность коэффициентов $F_k(x,d)$ или же их комбинаций.

1) Коэффициент $F_9(x,d)$ не зависит от d и как многочлен от x имеет корни $x = 0$ и $x = 1$ кратности 1 и 3 соответственно. Тем самым $F_9(x,d)$ неотрицателен.

2) Коэффициент $F_8(x,d)$ не зависит от d и как многочлен от x имеет корни $x = 1$ кратности 2 и $x = 65/197 \pm \sqrt{8165}/197$. Тем самым $F_8(x,d)$ неотрицателен.

3) Для анализа $F_7(x,d)$ возьмем его вторую производную $\partial^2 F_7/\partial x^2 = (72d^2 + 672d + 9780)x^2 + (-36d^2 - 792d - 11388)x + 152d + 2550$. Как многочлен от x она достигает минимума при $x = (36d^2 + 792d + 11388)/(144d^2 + 1344d + 19560) \leqslant 0.6245$. В силу того, что коэффициент перед x^2 положителен, $\partial^2 F_7/\partial x^2$ возрастает при $x \geqslant 1$, причем $\partial^2 F_7(1,d)/\partial x^2 = 36d^2 + 32d + 942 \geqslant 942$. Тем самым $\partial^2 F_7/\partial x^2$ положительна.

   Поскольку $\partial F_7(1,d)/\partial x = 6d^2 - 20d + 54 > 34$, то первая производная тоже положительна. Тем самым $F_7(x,d)$ возрастает по x и $F_7(1,d) = 0$, откуда следует неотрицательность $F_7(x,d)$.

4) Для анализа $F_6(x,d)$ возьмем его вторую производную $\partial^2 F_6/\partial x^2 = (-12d^4 - 912d^3 - 1800d^2 + 1776d + 27888)x^2 + (480d^3 + 3780d^2 + 2328d - 32628)x - -960d^2 - 3264d + 8070$. Как многочлен от x она достигает минимума при $x = (-480d^3 - 3780d^2 - 2328d + 32628)/(-24d^4 - 1824d^3 - 3600d^2 + 3552d + 55776) \leqslant 0.6483$. В силу того, что коэффициент перед x^2 положителен, $\partial^2 F_6/\partial x^2$ возрастает при $x \geqslant 1$, причем $\partial^2 F_6(1,d)/\partial x^2 = -12d^4 - 432d^3 + 1020d^2 + 840d + 3330 \geqslant 2886$. Тем самым $\partial^2 F_6/\partial x^2$ положительна.

   Поскольку $\partial F_6(1,d)/\partial x = -4d^4 - 64d^3 + 330d^2 - 428d + 526 > 30$, то первая производная тоже положительна. Тем самым $F_6(x,d)$ возрастает по x и $F_6(1,d) = -d^4 + 4d^3 - 16d + 26 \geqslant 9$, откуда следует неотрицательность $F_6(x,d)$.

5) Для анализа $F_5(x,d)$ возьмем его вторую производную $\partial^2 F_5/\partial x^2 = (144d^5 + 372d^4 - 2544d^3 - 6336d^2 + 96d + 52488)x^2 + (-516d^4 + 1824d^3 + 6912d^2 +$

$+1680d - 44580)x - 144d^3 - 1788d^2 + 5904d - 946$. Как многочлен от x она достигает минимума при $x = (516d^4 - 1824d^3 - 6912d^2 - 1680d + 44580)/(288d^5 + 744d^4 - 5088d^3 - 12672d^2 + 192d + 104976) \leqslant 0.5171$. В силу того, что коэффициент перед x^2 положителен, $\partial^2 F_5/\partial x^2$ возрастает при $x \geqslant 1$, причем $\partial^2 F_5(1,d)/\partial x^2 = 144d^5 - 144d^4 - 864d^3 - 1212d^2 + 7680d + 6962 \geqslant 4742$. Тем самым $\partial^2 F_5/\partial x^2$ положительна.

Поскольку $\partial F_5(1,d)/\partial x = 48d^5 - 134d^4 - 80d^3 + 66d^2 + 1172d + 384 > 170$, то первая производная тоже положительна. Тем самым $F_5(x,d)$ возрастает по x и $F_5(1,d) = 12d^5 - 55d^4 + 20d^3 + 240d^2 - 400d + 276$. Производная последнего многочлена по d имеет корень $x = 2$ кратности 2 и корни $x = -(1 \pm \sqrt{61})/6$, следовательно, отрицательна при $d \in [0,1]$, а $F_5(1,d)$ убывает на этом отрезке. Поскольку $F_5(1,1) = 93$, получаем неотрицательность $F_5(x,d)$.

6) Коэффициент $F_4(x,d)$ может принимать отрицательные значения. Покажем, что при $b \geqslant 4$ неотрицательна сумма $F_6(x,d)b^2 + F_4(x,d)$. Ранее было показано, что $F_6(x,d)$ неотрицателен, тем самым достаточно показать неотрицательность $G(x,d) = 16F_6(x,d) + F_4(x,d) = 48d^5x^4 - 120d^5x^3 + 118d^4x^4 - 512d^4x^3 + 829d^4x^2 - 1304d^3x^4 + 1408d^3x^3 + 1516d^3x^2 - 2456d^3x - 2892d^2x^4 + 10188d^2x^3 - 6438d^2x^2 - 6546d^2x + 6024d^2 + 2040dx^4 + 4864dx^3 - 25820dx^2 + 30716dx - 11272d + 42085x^4 - 90728x^3 + 61868x^2 - 12288x - 805$.

Возьмем его вторую производную $\partial^2 G/\partial x^2 = (720d^5 + 1980d^4 - 3600d^3 - 12240d^2 - 3840d + 111300)x^2 + (-720d^5 - 3588d^4 + 2592d^3 + 7560d^2 - 6384d - 66900)x + 1658d^4 + 2888d^3 + 696d^2 + 6488d - 6330$. Как многочлен от x она достигает минимума при $x = (720d^5 + 3588d^4 - 2592d^3 - 7560d^2 + 6384d + 66900)/(1440d^5 + 3960d^4 - 7200d^3 - 24480d^2 - 7680d + 222600) \leqslant 0.4234$. В силу того, что коэффициент перед x^2 положителен, $\partial^2 G/\partial x^2$ возрастает при $x \geqslant 1$, причем $\partial^2 G(1,d)/\partial x^2 = 50d^4 + 1880d^3 - 3984d^2 - 3736d + 38070 \geqslant 30350$. Тем самым $\partial^2 G/\partial x^2$ положительна.

Первая производная $\partial G(1,d)/\partial x = -120d^5 + 524d^4 + 528d^3 - 5640d^2 + 9848d - 428$. Этот многочлен имеет один корень на отрезке $[0.0445, 0.0447]$, а также по одному корню на отрезках $[-4,-3]$ и $[3,4]$. В силу отрицательности старшего коэффициента у первой производной, получаем, что она возрастает, как минимум, при $d \geqslant 0.0447$ и любых x. Кроме того, многочлен $G(1,d) = -72d^5 + 435d^4 - 836d^3 + 336d^2 + 528d + 132$ имеет единственный корень $d > 2$, а значит, положителен при $0.0447 \leqslant d \leqslant 1$.

Осталось рассмотреть случай $d < 0.0447$. Исследуем многочлен $G(x,d)$ на всех отрезках $[0, 0.002], [0.002, 0.004], ..., [0.042, 0.044], [0.044, 0.0447]$. Пусть $d \in [l, r]$, тогда $G(x,d)$ можно оценить снизу многочленом 4-й степени от x, если в каждом положительном мономе заменить d на l, а в каждом отрицательном — на r. В ходе исследований установлено, что для каждого отрезка коэффициент перед x^4 у таких многочленов положителен, а наибольший вещественный корень не превосходит 0.982. Тем самым доказано, что многочлен $G(x,d)$ положителен.

7) Коэффициент $F_3(x,d)$ также может принимать отрицательные значения. Покажем, что при $b \geqslant 4$ неотрицательна сумма $F_5(x,d)b^2 + F_3(x,d)$. Ранее было показано, что $F_5(x,d)$ неотрицателен, тем самым достаточно показать неотрицательность $G(x,d) = 16F_5(x,d) + F_3(x,d) = 264d^5x^4 - 360d^5x^3 + 420d^5x^2 + 702d^4x^4 - 2396d^4x^3 + 2019d^4x^2 - 2446d^4x - 3144d^3x^4 + 4224d^3x^3 + 1068d^3x^2 - 3144d^3x + 5856d^3 - 8346d^2x^4 + 18234d^2x^3 - 13494d^2x^2 + 15270d^2x - 15840d^2 - 264dx^4 + 4628dx^3 + 36588dx^2 - 86444dx + 45828d + 73155x^4 - 120694x^3 - 1448x^2 + 93410x - 41583$.

Возьмем его вторую производную $\partial^2 G/\partial x^2 = (3168d^5 + 8424d^4 - 37728d^3 - 100152d^2 - 3168d + 877860)x^2 + (-2160d^5 - 14376d^4 + 25344d^3 + 109404d^2 + 27768d - 724164)x + 840d^5 +$

$+4038d^4+2136d^3-26988d^2+73176d-2896$. Как многочлен от x она достигает минимума при $x=(2160d^5+14376d^4-25344d^3-109404d^2-27768d+724164)/(6336d^5+16848d^4-75456d^3-200304d^2-6336d+1755720)\leqslant 0.5026$. В силу того, что коэффициент перед x^2 положителен, $\partial^2G/\partial x^2$ возрастает при $x\geqslant 1$, причем $\partial^2G(1,d)/\partial x^2=1848d^5-1914d^4-10248d^3-17736d^2+97776d+150800\geqslant 120902$. Тем самым $\partial^2G/\partial x^2$ положительна.

Получаем, что первая производная возрастает и $\partial G(1,d)/\partial x=816d^5-2788d^4-912d^3+9600d^2-440d+21052\geqslant 16912$. Таким образом, первая производная положительна. Покажем неотрицательность многочлена $G(1,d)=324d^5-2121d^4+4860d^3-4176d^2+336d+2840$. Его производная имеет корень $d=2$ кратности 2, а также корни $d=(167\pm\sqrt{24109})/270$, лежащие на отрезках $[1.1,1.2]$ и $[0.04,0.05]$. Таким образом, корень $d=(167-\sqrt{24109})/270$ является точкой локального максимума. Поскольку $G(1,0)=2840$ и $G(1,1)=2063$, получаем, что $G(x,d)$ положительна.

8) Для анализа $F_2(x,d)$ возьмем его вторую производную $\partial^2F_2/\partial x^2=(576d^5+1668d^4+3504d^3+4248d^2-2064d+15672)x^2+(-2160d^5-5088d^4-5088d^3+4212d^2+16296d-19188)x+1680d^5+3102d^4-792d^3-6564d^2-3480d+6640$. Как многочлен от x она достигает минимума при $x=(2160d^5+5088d^4+5088d^3-4212d^2-16296d+19188)/(1152d^5+3336d^4+7008d^3+8496d^2-4128d+31344)$. Покажем, что знаменатель точки минимума больше числителя. Их разность равна $-1008d^5-1752d^4+1920d^3+12708d^2+12168d+12156$. Этот многочлен имеет единственный корень $d>2$, тем самым он положителен при $d\in[0,1]$, а значит, точка минимума второй производной $x<1$. В силу того, что коэффициент перед x^2 положителен, $\partial^2F_2/\partial x^2$ возрастает при $x\geqslant 1$, причем $\partial^2F_2(1,d)/\partial x^2=96d^5-318d^4-2376d^3+1896d^2+10752d+3124\geqslant 430$. Тем самым $\partial^2F_2/\partial x^2$ положительна.

Первая производная $\partial F_2(1,d)/\partial x=192d^5-586d^4-512d^3+5304d^2-8336d+6978$ имеет единственный корень $d<-2$ и положительный старший коэффициент, тем самым она тоже положительна при $d\in[0,1]$. Получаем, что $F_2(x,d)$ возрастает по x и $F_2(1,d)=-72d^5+1422d^4-7744d^3+18096d^2-19200d+8010$. Этот многочлен имеет единственный корень $d>10$ и отрицательный старший коэффициент. Тем самым показано, что $F_2(x,d)$ положительна.

9) Коэффициент $F_1(x,d)$ может принимать отрицательные значения. Покажем, что при $b\geqslant 4$ неотрицательна сумма $F_2(x,d)b+F_1(x,d)$. Ранее было показано, что $F_2(x,d)$ неотрицателен, тем самым достаточно показать неотрицательность $G(x,d)=4F_2(x,d)+F_1(x,d)=204d^5x^4-1560d^5x^3+3780d^5x^2-3000d^5x+288d^5+591d^4x^4-3646d^4x^3+6565d^4x^2-6054d^4x+7656d^4+1260d^3x^4-3696d^3x^3-2612d^3x^2+8968d^3x-30816d^3+1548d^2x^4+3300d^2x^3-15564d^2x^2+27564d^2x+44880d^2-712dx^4+12328dx^3-2424dx^2-44680dx-29216d+5692x^4-14470x^3+11398x^2+17584x+7184$.

Возьмем его вторую производную $\partial^2G/\partial x^2=(2448d^5+7092d^4+15120d^3+18576d^2-8544d+68304)x^2+(-9360d^5-21876d^4-22176d^3+19800d^2+73968d-86820)x+7560d^5+13130d^4-5224d^3-31128d^2-4848d+22796$. Как многочлен от x она достигает минимума при $x=(9360d^5+21876d^4+22176d^3-19800d^2-73968d+86820)/(4896d^5+14184d^4+30240d^3+37152d^2-17088d+136608)$. Покажем, что знаменатель точки минимума больше числителя. Их разность равна $-4464d^5-7692d^4+8064d^3+56952d^2+56880d+49788$. Этот многочлен имеет единственный корень при $d>2$, тем самым он положителен при $d\in[0,1]$, а значит, точка минимума $x<1$. В силу того, что коэффициент перед x^2 положителен, $\partial^2G/\partial x^2$ возрастает при $x\geqslant 1$, причем $\partial^2G(1,d)/\partial x^2=648d^5-1654d^4-12280d^3+7248d^2+60576d+4280$. Этот многочлен имеет два корня, больших 2, и один отрицательный корень. Тем самым $\partial^2F_2/\partial x^2$ положительна в силу положительности старшего коэффициента.

Первая производная $\partial G(1,d)/\partial x = 696d^5 - 1498d^4 - 2304d^3 + 12528d^2 - 15392d + 19738$ имеет единственный корень $d < -2$, тем самым она тоже положительна при $d \in [0,1]$ в силу положительности старшего коэффициента. Получаем, что $G(x,d)$ возрастает по x и $G(1,d) = -288d^5 + 5112d^4 - 26896d^3 + 61728d^2 - 64704d + 27388$. Этот многочлен имеет единственный корень $d > 10$. Тем самым показано, что $G(x,d)$ положительна.

10) Коэффициент $F_0(x,d) = 120x^4$ положителен при $x \geqslant 1$.

Ранее из рассмотрения исключены случаи $b \in \{1,2,3\}$. Рассмотрим их далее.

1) Для анализа $F(1,x,d)$ возьмем его вторую производную $\partial^2 F/\partial x^2 = (2304d^5 + 6528d^4 + 3072d^3 - 6912d^2 - 8448d + 212352)x^2 + (-5760d^5 - 16320d^4 - 7680d^3 + 17280d^2 + 21120d - 154560)x + 3360d^5 + 9520d^4 + 4480d^3 - 10080d^2 - 12320d + 20400$. Как многочлен от x она достигает минимума при $x = (5760d^5 + 16320d^4 + 7680d^3 - 17280d^2 - 21120d + 154560)/(4608d^5 + 13056d^4 + 6144d^3 - 13824d^2 - 16896d + 424704) \leqslant 0.4678$. В силу того, что коэффициент перед x^2 положителен, $\partial^2 F/\partial x^2$ возрастает при $x \geqslant 1$, причем $\partial^2 F(1,1,d)/\partial x^2 = -96d^5 - 272d^4 - 128d^3 + 288d^2 + 352d + 78192 \geqslant 77696$. Тем самым $\partial^2 F/\partial x^2$ положительна.

   Поскольку $\partial F(1,1,d)/\partial x = 48d^5 + 136d^4 + 64d^3 - 144d^2 - 176d + 14344 > 14024$, то первая производная тоже положительна. Тем самым $F(1,x,d)$ возрастает по x и $F(1,1,d) = 1920$, откуда следует неотрицательность $F(1,x,d)$.

2) Для анализа $F(2,x,d)$ возьмем его вторую производную $\partial^2 F/\partial x^2 = (23328d^5 + 64152d^4 - 116640d^3 - 373248d^2 + 93312d + 6765120)x^2 + (-38880d^5 - 138024d^4 + 46656d^3 + 482112d^2 + 62208d - 6502680)x + 15120d^5 + 72684d^4 + 72144d^3 - 101952d^2 - 157248d + 1128600$. Как многочлен от x она достигает минимума при $x = (38880d^5 + 138024d^4 - 46656d^3 - 482112d^2 - 62208d + 6502680)/(46656d^5 + 128304d^4 - 233280d^3 - 746496d^2 + 186624d + 13530240) \leqslant 0.5322$. В силу того, что коэффициент перед x^2 положителен, $\partial^2 F/\partial x^2$ возрастает при $x \geqslant 1$, причем $\partial^2 F(2,1,d)/\partial x^2 = -432d^5 - 1188d^4 + 2160d^3 + 6912d^2 - 1728d + 1391040 \geqslant 1387692$. Тем самым $\partial^2 F/\partial x^2$ положительна.

   Поскольку $\partial F(2,1,d)/\partial x = -144d^5 + 180d^4 + 3456d^3 + 4896d^2 - 4608d + 171180 > 166428$, то первая производная тоже положительна. Тем самым $F(2,x,d)$ возрастает по x и $F(2,1,d) = 16200$, откуда следует неотрицательность $F(2,x,d)$.

3) Для анализа $F(3,x,d)$ возьмем его вторую производную $\partial^2 F/\partial x^2 = (110592d^5 + 294912d^4 - 1253376d^3 - 3096576d^2 + 2322432d + 80658432)x^2 + (-138240d^5 - 589824d^4 + 700416d^3 + 4423680d^2 - 82944d - 89542656)x + 40320d^5 + 273408d^4 + 317184d^3 - 963072d^2 - 1143936d + 19269120$. Как многочлен от x она достигает минимума при $x = (138240d^5 + 589824d^4 - 700416d^3 - 4423680d^2 + 82944d + 89542656)/(221184d^5 + 589824d^4 - 2506752d^3 - 6193152d^2 + 4644864d + 161316864) \leqslant 0.5920$. В силу того, что коэффициент перед x^2 положителен, $\partial^2 F/\partial x^2$ возрастает при $x \geqslant 1$, причем $\partial^2 F(3,1,d)/\partial x^2 = 12672d^5 - 21504d^4 - 235776d^3 + 364032d^2 + 1095552d + 10384896 \geqslant 10127616$. Тем самым $\partial^2 F/\partial x^2$ положительна.

   Поскольку $\partial F(3,1,d)/\partial x = 864d^5 - 2304d^4 - 12288d^3 + 59904d^2 + 92448d + 970368 > 955776$, то первая производная тоже положительна. Тем самым $F(3,x,d)$ возрастает по x и $F(3,1,d) = 78720$, откуда следует неотрицательность $F(3,x,d)$.

3.3. Доказательство теоремы 4

Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для любого $z \in \left[1 - \frac{b+1}{n+c}, 1 - \frac{b}{n+c}\right]$ существует $d \in [0,1]$, для которого $g(z) = \sum_{\ell=0}^{3} g_\ell(z) + r(z,d)$, где

$$r(z,d) = \frac{1}{24}\left(z - 1 + \frac{b+1}{n+c}\right)^4 \frac{\partial^4 g}{\partial z^4}\left(1 - \frac{b+d}{n+c}\right).$$

Согласно утверждению 1 неравенство $p_{b+1,n,c} > p_{b,n,c}$ эквивалентно

$$\left(\frac{b+1}{n+c}\right)^b \left(1-\frac{b+1}{n+c}\right)^{n-b} - b\int_{1-\frac{b+1}{n+c}}^{1-\frac{b}{n+c}} g(z)dz > 0,$$

Выражение в левой части равно

$$\left(\frac{b+1}{n+c}\right)^b \left(1-\frac{b+1}{n+c}\right)^{n-b} - b\int_{1-\frac{b+1}{n+c}}^{1-\frac{b}{n+c}} g(z)dz = \frac{(b+1)^{b-5}(n+c-b-1)^{n-b-4}}{120(n+c)^n}P(n,b,c,d),$$

где $P(n,b,c,d) = (20b^4+97b^3+6b^2d^2+20b^2d+166b^2-bd^4-4bd^3-12bd^2-24bd+156b+120)n^4+$ $+(480c-1365b+839bc+96bd+1303b^2c+1013b^3c+385b^4c+60b^5c+84bd^2-8b^2d+36bd^3-48b^3d+$ $+10bd^4-1629b^2-1487b^3-669b^4-120b^5-18b^2d^2+4b^2d^3-6b^3d^2+24b^2cd^2+4b^2cd^3-$ $-72bcd-24bcd^2+84b^2cd-4bcd^3-12b^3cd-480)n^3+(-180b^6c+240b^6+160b^5c^2-1450b^5c+$ $+1547b^5+931b^4c^2+12b^4cd-4753b^4c+28b^4d+4182b^4-6b^3c^2d^2-36b^3c^2d+2235b^3c^2-$ $-24b^3cd^2-108b^3cd-8205b^3c+30b^3d^2+120b^3d+5886b^3+18b^2c^2d^2+108b^2c^2d+2743b^2c^2-$ $-36b^2cd^3-144b^2cd^2-192b^2cd-7267b^2c-36b^2d^3-96b^2d^2-288b^2d+5570b^2-12bc^2d^2-$ $-72bc^2d+1531bc^2+36bcd^3+168bcd^2+288bcd-4705bc-35bd^4-104bd^3-144bd^2+3020b+720c^2-$ $-1440c+720)n^2+(180b^7c-200b^7-320b^6c^2+1745b^6c-1475b^6+145b^5c^3-2286b^5c^2+$ $+6890b^5c-4691b^5+4b^4c^3d+811b^4c^3+36b^4c^2d-6823b^4c^2+24b^4cd+14738b^4c-88b^4d-8214b^4-$ $-24b^3c^3d+1849b^3c^3+42b^3c^2d^2+36b^3c^2d-11189b^3c^2+168b^3cd^2+552b^3cd+17552b^3c+$ $+12b^3d^2+288b^3d-9290b^3+44b^2c^3d+2261b^2c^3-126b^2c^2d^2-360b^2c^2d-9207b^2c^2+104b^2cd^3+$ $+120b^2cd^2-576b^2cd+13965b^2c+104b^2d^3+288b^2d^2-6535b^2-24bc^3d+1174bc^3+84bc^2d^2+$ $+288bc^2d-5215bc^2-104bcd^3-288bcd^2+6610bc+50bd^4+96bd^3-2665b+480c^3-1440c^2+1440c-$ $-480)n-60b^8c+60b^8+160b^7c^2-680b^7c+500b^7-145b^6c^3+1355b^6c^2-3150b^6c+1830b^6+$ $+44b^5c^4-991b^5c^3+4858b^5c^2-8016b^5c+3846b^5+245b^4c^4-16b^4c^3d-2789b^4c^3-144b^4c^2d+$ $+9856b^4c^2-288b^4cd-12064b^4c-96b^4d+5200b^4+530b^3c^4+96b^3c^3d-4521b^3c^3-72b^3c^2d^2+$ $+432b^3c^2d+11066b^3c^2-288b^3cd^2+288b^3cd-12000b^3c-144b^3d^2+4560b^3+655b^2c^4-$ $-176b^2c^3d-3594b^2c^3+216b^2c^2d^2-288b^2c^2d+8125b^2c^2-96b^2cd^3+288b^2cd^2-7590b^2c-$ $-96b^2d^3+2550b^2+326bc^4+96bc^3d-1880bc^3-144bc^2d^2+3540bc^2+96bcd^3-2840bc-24bd^4+$ $+830b+120c^4-480c^3+720c^2-480c+120$. Тем самым знак полученного выражения полностью определяется знаком многочлена $P(n,b,c,d)$.

Поскольку $b \in (\varepsilon n, n)$, то при $n \to +\infty$ многочлен $P(n,b,c,d)$ асимптотически эквивалентен $b^4n^4H(b/n)$, где $H(x) = 20+(60c-120)x+(-180c+240)x^2+(180c-200)x^3+$ $+(-60c+60)x^4$, то есть сумме слагаемых с максимальной суммарной степенью b и n. Многочлен $H(x)$ имеет корень $x = 1$ кратности 3 и корень $x = \frac{1}{3(1-c)}$. Тем самым асимптотически смена знака происходит при $b = \frac{n}{3(1-c)}$.

Литература

1. *Lord N.* Binomial averages when the mean is an integer // The Mathematical Gazette. 2018. V. 94. P. 331–332.
2. *Dmitriev D., Zhukovskii M.* On monotonicity of Ramanujan function for binomial random variables. 2018. arXiv:1807.06527
3. *Choi K.P.* On the medians of Gamma distributions and an equation of Ramanujan // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 121. P. 245–251.
4. *Jogdeo K., Samuels S.M.* Monotone convergence of binomial probabilities and a generalization of Ramanujan's equation // Ann. Math. Statist. 1968. V. 39. P. 1191–1195.
5. *Feige U.* On Sums of Independent Random Variables with Unbounded Variance and Estimating the Average Degree in a Graph // SIAM J. Comput. 2006. V. 35. P. 964–984.
6. *He S.* [*et al.*]. Bounding Probability of Small Deviation: A Fourth Moment Approach // JSTOR. 2010. V. 35. P. 208–232.

References

1. *Lord N.* Binomial averages when the mean is an integer. The Mathematical Gazette. 2018. V. 94. P. 331–332.

2. *Dmitriev D., Zhukovskii M.* On monotonicity of Ramanujan function for binomial random variables. 2018. arXiv:1807.06527

3. *Choi K.P.* On the medians of Gamma distributions and an equation of Ramanujan. Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 121. P. 245–251.

4. *Jogdeo K., Samuels S.M.* Monotone convergence of binomial probabilities and a generalization of Ramanujan's equation. Ann. Math. Statist. 1968. V. 39. P. 1191–1195.

5. *Feige U.* On Sums of Independent Random Variables with Unbounded Variance and Estimating the Average Degree in a Graph. SIAM J. Comput. 2006. V. 35. P. 964–984.

6. *He S., et al.*, Bounding Probability of Small Deviation: A Fourth Moment Approach. JSTOR. 2010. V. 35. P. 208–232.

Поступила в редакцию 16.06.2020