УДК 517.1, 517.2, 517.6

А. Н. Бурмистров, В. П. Ковалёв, Г. Б. Сизых

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Принцип максимума для решения уравнения эллиптического типа с неограниченными коэффициентами

Найдено достаточное условие применимости принципа максимума для решений линейных уравнений в частных производных эллиптического типа с неограниченными коэффициентами при первых производных. Такие уравнения обычно возникают при исследовании осесиметричных процессов в цилиндрической системе координат.

Ключевые слова: принцип максимума, цилиндрическая система координат, осесимметричность.

1. Введение

Если максимум и минимум значений некоторой величины достигаются на границе рассматриваемой области, то говорят, что такая величина подчиняется принципу максимума. Решения простейших уравнений в частных производных эллиптического типа, как правило, подчиняются принципу максимума [1–4]. Принцип максимума той или иной величины используется при качественном анализе процесса и для априорных оценок. Поэтому в прикладной математике периодически будут появляться задачи поиска параметров процесса, подчиняющихся принципу максимума, и доказательства соответствующих утверждений. Но в некоторых случаях не удается применить ни общеизвестные [1–4] теоремы, ни приёмы их доказательства. В качестве примера можно привести задачу об установившемся осесимметричном течении вязкой несжимаемой жидкости. Для исследования осесимметричных течений обычно вводят цилиндрическую систему координат r, φ, z с началом в точке O так, чтобы течение оказалось осесимметричным относительно оси Oz. В таких координатах уравнение Навье — Стокса для окружной компоненты скорости жидкости V_φ имеет вид [5, с. 563]:

$$V_z\frac{\partial}{\partial z}V_\varphi + V_r\frac{\partial}{\partial r}V_\varphi + \frac{V_\varphi V_r}{r} = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}V_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}V_\varphi - \frac{V_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V_\varphi\right),$$

где V_r и V_φ — радиальная и осевая компоненты скорости соответственно, $\nu > 0$ — кинематический коэффициент вязкости. Если выразить окружную компоненту скорости V_φ через окружную циркуляцию скорости $\gamma = 2\pi r V_\varphi$, то последнее уравнение принимает вид

$$\left(V_r + \frac{\nu}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}\gamma + V_z\frac{\partial}{\partial z}\gamma = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}\gamma + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\gamma\right). \quad (1)$$

Поскольку ограниченность V_r и V_z является естественным свойством ламинарного течения, величина $\left(V_r + \frac{\nu}{r}\right)$ не ограничена в окрестности точек, лежащих на оси Oz. При этом условии общеизвестные [1–4] теоремы и приёмы их доказательства для уравнения (1) «работают» только для областей, границы которых не имеют точек на оси Oz.

Заметим, что ситуация «типична» для осесимметричных процессов, описываемых уравнениями эллиптического типа. И это несмотря на то, что исследуемые параметры являются непрерывными. Действительно, лапласиан в цилиндрической системе координат для осесимметричных процессов всегда включает в себя слагаемое, аналогичное слагаемому $\frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\gamma$ в уравнении (1). Поэтому как раз при исследовании процессов с непрерывными физическими параметрами коэффициент при $\frac{\partial}{\partial r}$ будет неограничен.

Работа [1] опубликована более полувека назад. Несмотря на преклонный возраст, эта книга по-прежнему представляет собой содержательный обзор теории эллиптических уравнений с частными производными. В этой работе принцип максимума доказан только при условии ограниченности коэффициентов при первых производных.

В доступной литературе отсутствует формулировка и доказательство принципа максимума для случая неограниченных коэффициентов при первых производных. Как показано выше, такая теорема востребована, по крайней мере, при изучении осесимметричных процессов. В данной работе предпринята попытка устранить указанный пробел. В осесимметричных процессах, как правило, коэффициент при производной в осевом направлении ограничен. В приведенном выше примере это коэффициент при $\frac{\partial}{\partial z}\gamma$. Этого оказывается достаточно для верности принципа максимума. Полученные в работе утверждения могут быть применены не только для уравнений, записанных в цилиндрической системе координат r, φ, z. Поэтому используются традиционные для математического анализа переменные x, y, z.

2. Вариант принципа максимума

Теорема 1. *Пусть функция $u(x,y) \in C^2(G) \bigcap C(\bar{G})$, где область $G \subset \mathbb{R}^2$ ограничена, а уравнение*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}u + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}u \tag{2}$$

выполнено во всех точках G. И пусть хотя бы одна из функций $a(x,y)$ или $b(x,y)$ ограничена на множестве точек области G. Тогда максимум функции $u(x,y)$ в замкнутой области $\bar{G}$ достигается на границе $\partial G = \bar{G} \backslash G$.

Замечание. Отметим, что в теореме не затрагиваются вопросы существования или единственности решения уравнения (2), а описывается свойство какого-либо решения $u(x,y)$, если последнее существует.

Доказательство. Пусть, для определённости, ограничена функция $b(x.y)$. Тогда для некоторого числа $B > 0$ в области G выполняется неравенство $|b(x,y)| \leq B$.

Доказательство проведём методом от противного. Функция $u(x,y)$ непрерывна на компактах $\bar{G}$ и ∂G. Поэтому существуют оба максимума: $M = \max_{\bar{G}}\{u(x,y)\}$ и $m = \max_{\partial G}\{u(x,y)\}$. Допустим, что выполняется неравенство $M > m$ и назовем это допущение *главным допущением.* Из него следует существование точки $(x_0, y_0) \in G$ такой, что $u(x_0, y_0) = M$.

Обозначим

$$L = \max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\} - \min_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\}$$

(L — габаритный размер замкнутой области $\bar{G}$ вдоль оси Oy) и

$$\Delta = \min\left\{\frac{1}{2B}, L\right\}.$$

Рассмотрим множество $G_\Delta = \bar{G} \bigcap \Pi$ – пересечение замкнутой области $\bar{G}$ и полосы шириной Δ

$$\Pi = \{(x,y) : -\infty < x < +\infty, y_0 \leq y \leq y_0 + \Delta\}.$$

Граничные точки этого множества могут лежать только на двух прямых линиях $y = y_0$, $y = y_0 + \Delta$ и на границе замкнутой области $\bar{G}$. Возможны два случая (рис. 1). Первый случай — $\max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\} \leq y_0 + \Delta$. Второй случай — $\max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\} > y_0 + \Delta$.

В первом случае рассмотрим на множестве G_Δ вспомогательную функцию

$$u_1(x,y) = u(x,y) + \frac{M-m}{2L^2}(y-y_0)^2.$$

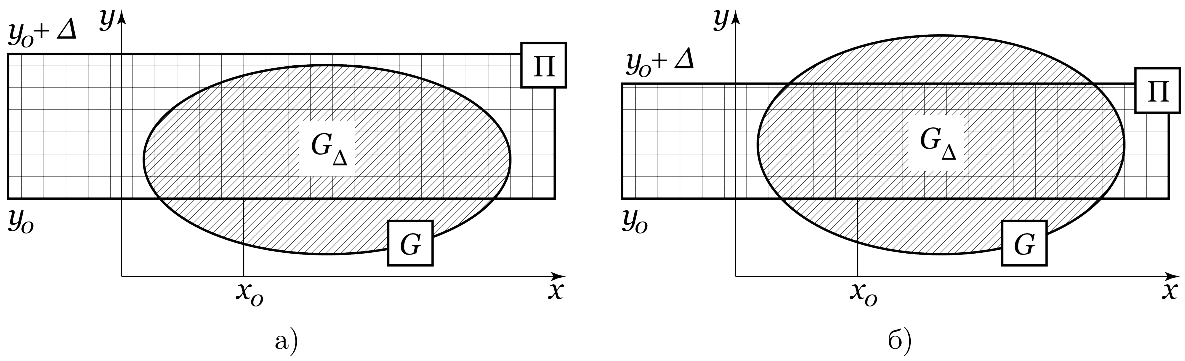

Рис. 1. а) $\max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\} \le y_0+\Delta$, б) $\max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\} > y_0+\Delta$

Возможна ситуация, при которой число $u_1(x_0,y_0)=M$ окажется максимальным значением функции u_1 на множестве G_Δ. Тогда в точке (x_0,y_0) будут выполнены условия

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1 \le 0, \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_1 \le 0, \frac{\partial}{\partial x}u_1 = 0, \frac{\partial}{\partial y}u_1 = 0. \tag{3}$$

Последние два условия будут выполнены, поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x}u_1(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}u(x_0,y_0) = 0,\ \frac{\partial}{\partial y}u_1(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}u(x_0,y_0) = 0.$$

Рассмотрим поведение функции $u_1(x,y)$ на разных частях границы множества G_Δ. В точках границы, лежащих на прямой $y=y_0$, выполняется равенство $u_1=u$, поэтому $u_1=u\le u(x_0,y_0)=M$. В силу условия $\max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\}\le y_0+\Delta$ все остальные точки границы G_Δ являются граничными точками замкнутой области $\bar{G}$. Поэтому в этих точках согласно основному допущению и неравенству $\frac{\Delta^2}{2L^2}\le 1$ имеем

$$u_1 = u + \frac{M-m}{2L^2}(y-y_0)^2 \le m + \frac{M-m}{2L^2}\Delta^2 \le m+M-m = M.$$

Таким образом, вспомогательная функция u_1 подобрана так, что во всех точках границы множества G_Δ величина u_1 не превосходит числа M. Поэтому в ситуации, когда значение u_1 в точке (x_0,y_0) не является максимумом функции u_1 на множестве G_Δ, максимум u_1 будет достигаться во внутренней точке множества G_Δ. В такой точке условия (3) также будут выполнены. Поэтому в обеих ситуациях существует точка $(x_0^*,y_0^*)\in G_\Delta\bigcap G$, в которой выполнены условия (3).

Подставив выражение $u=u_1-\frac{M-m}{2L^2}(y-y_0)^2$ в уравнение (2), получим уравнение для вспомогательной функции u_1:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_1 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_1 = a(x,y)\frac{\partial}{\partial x}u_1 + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}u_1 - b(x,y)\frac{M-m}{L^2}(y-y_0) + \frac{M-m}{L^2}.$$

В точке (x_0^*,y_0^*) из этого уравнения, с учетом условий (3), получим неравенство

$$\frac{M-m}{L^2}\left(-b(x,y)(y_0^*-y_0)+1\right)\le 0,$$

или

$$1 \le (y_0^*-y_0)\,b(x,y). \tag{4}$$

Однако значение Δ выбрано так, что выполняется неравенство $|(y_0^*-y_0)\,b(x,y)| \le \Delta\cdot B \le \frac{1}{2}$, которое противоречит неравенству (4). Полученное противоречие показывает, что в рамках главного допущения случай $\max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\}\le y_0+\Delta$ невозможен.

Рассмотрим теперь второй случай, т.е. случай $\max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\} > y_0+\Delta$. Докажем сначала, что существует точка $(x_1, y_0+\Delta) \in \bar{G}$, в которой функция u принимает значение M. Допустим, что это не так, т.е. выполняется неравенство $M > m_{y_0+\Delta}$, где $m_{y_0+\Delta} = \max_{\bar{G}\bigcap\{y=y_0+\Delta\}}\{u\}$ (максимум существует, т.к. функция $u(x,y)$ непрерывна на компакте $\bar{G}\bigcap\{y=y_0+\Delta\}$).

Обозначим

$$m_1 = \max\{m, m_{y_0+\Delta}\}.$$

Рассуждая, как и в случае $\max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\} \le y_0+\Delta$, приходим к выводу, что существует точка $(x_0^*, y_0^*) \in G_\Delta \bigcap G$, в которой выполнены условия (3) для вспомогательной функции $u_1 = u + \frac{M-m_1}{2L^2}(y-y_0)^2$. Как и выше, учёт того, что функция $u = u_1 - \frac{M-m_1}{2L^2}(y-y_0)^2$ удовлетворяет уравнению (2), приводит к неравенству (4). А это вновь противоречит выбору Δ. Полученное противоречие доказывает, что в случае $\max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\} > y_0+\Delta$ существует точка $(x_1, y_0+\Delta) \in \bar{G}$ такая, что выполняется равенство $u(x_1, y_0+\Delta) = M$.

Повторим проведенное доказательство, взяв вместо точки (x_0, y_0) точку $(x_1, y_0+\Delta)$. В результате получим, что существует точка $(x_2, y_0+2\Delta) \in \bar{G}$, в которой выполнено равенство $u(x_2, y_0+2\Delta) = M$. И так далее. Через некоторое количество шагов k окажется, что существует точка $(x_k, y_0+k\Delta) \in \bar{G}$ такая, что $u(x_k, y_0+k\Delta) = M$, и при этом будет выполнено неравенство $\max_{(x,y)\in\bar{G}}\{y\} \le y_0+k\Delta+\Delta$. Выше этот случай назван *первым случаем* (рис. 1) и разобран в начале доказательства. Показано, что этот случай невозможен в рамках главного допущения. Таким образом, главное допущение приводит к противоречию. Теорема 1 доказана.

Следствие 1.1. *В условиях теоремы функция $u(x,y)$ достигает своего наименьшего в замкнутой области $\bar{G}$ значения на границе ∂G.*

Доказательство. Как обычно [1–4], доказательство сводится к рассмотрению функции $w(x,y) = -u(x,y)$.

Следствие 1.2. *Пусть функция $u(x,y)$ непрерывна на замыкании $\bar{G}$ ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$, а уравнение*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u = \tilde{a}(x,y,u)\frac{\partial}{\partial x}u + \tilde{b}(x,y,u)\frac{\partial}{\partial y}u$$

выполнено во всех точках G. Пусть хотя бы одна из функций $\tilde{a}(x,y,u(x,y))$ или $\tilde{b}(x,y,u(x,y))$ ограничена на множестве точек области G. Тогда минимум и максимум функции $u(x,y)$ в замкнутой области $\bar{G}$ достигаются на границе ∂G.

Доказательство. Так как рассматривается некоторое фиксированное решение $u(x,y)$ уравнения, то условия доказанной выше теоремы 1 будут выполнены, если в качестве $a(x,y)$ и $b(x,y)$ взять $\tilde{a}(x,y,u(x,y))$ и $\tilde{b}(x,y,u(x,y))$, соответственно. В этом случае теорема 1 и следствие 1.1 обосновывают верность следствия 1.2.

Для практического использования *следствия 1.2* заметим, что если, например, функция $\tilde{a}(x,y,z)$ является непрерывной функцией своих аргументов на $\bar{G} \times [-\infty, +\infty]$, то из условия непрерывности $u(x,y)$ на $\bar{G}$, следует ограниченность $\tilde{a}(x,y,u(x,y))$ на G.

3. Пример применения

Во введении было сказано, что общеизвестные [1–4] теоремы и приёмы их доказательства для уравнения (1) «работают» только для областей, границы которых не имеют точек на оси Oz. Для применения теоремы 1 учтем, что внутренние точки любой области G, лежащей в радиально-осевой полуплоскости, не лежат на оси Oz. Поэтому коэффициенты уравнения (1) определены во всех точках области G. Коэффициент при $\frac{\partial}{\partial z}\gamma$, а именно, V_z ограничен в любой ограниченной области в силу предположения о ламинарности течения. Поэтому выполнены все условия теоремы 1 и допускается, чтобы граничные точки G лежали на оси Oz. В результате получается *принцип максимума произведения окружной* *скорости на радиус: пусть осесимметричное ламинарное течение несжимаемой жидкости с ненулевой вязкостью установилось в отсутствие внешних массовых сил и пусть $\bar{G}$ – произвольная ограниченная замкнутая область, лежащая в радиально-осевой полуплоскости $r \geq 0$; тогда минимум и максимум произведения окружной скорости на радиус достигаются на границе области $\bar{G}$.*

4. Многомерный случай

Доказательство теоремы 1 и её следствий, проведенное выше для двухмерного случая, легко может быть повторено в многомерном случае. Как и в двухмерном случае, в доказательстве потребуется, чтобы коэффициент при частной производной по одной из координат был ограничен. Представляется излишним приводить такое доказательство и давать громоздкую формулировку для случая произвольной размерности. Ограничимся формулировкой соответствующей теоремы (аналога следствия 1.2) в пространстве размерности три.

Теорема 2. *Пусть функция $u\,(x, y, z)$ непрерывна на замыкании $\bar{G}$ ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^3$, а уравнение*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u =$$

$$= \tilde{a}\,(x, y, z, u(x, y, z))\,\frac{\partial}{\partial x}u + \tilde{b}\,(x, y, z, u(x, y, z))\,\frac{\partial}{\partial y}u + \tilde{c}\,(x, y, z, u(x, y, z))\,\frac{\partial}{\partial z}u \qquad (5)$$

выполнено во всех точках G. Пусть хотя бы одна из функций $\tilde{a}\,(x, y, z, u)$, $\tilde{b}\,(x, y, z, u)$ или $\tilde{c}\,(x, y, z, u)$ ограничена на множестве точек области $\bar{G}$. Тогда минимум и максимум функции $u\,(x, y, z)$ в замкнутой области $\bar{G}$ достигаются на границе ∂G.

5. Заключение

В работе исследованы линейные относительно частных производных уравнения эллиптического типа с неограниченными коэффициентами при первых производных. На примере двухмерного уравнения доказана теорема о достаточном условии того, чтобы решение подчинялось принципу максимума. Это условие ограниченности хотя бы одного из коэффициентов при первых производных. Из этого, в частности, следует «практическое» правило: решение будет подчиняться принципу максимума, если есть возможность развернуть прямоугольную систему координат так, чтобы хотя бы один из коэффициентов при первых производных в уравнении (5) оказался ограниченным в рассматриваемой области.

Результат может быть использован при качественном анализе физико-химических и биологических процессов, а также для априорных и для неинвазивных оценок.

Литература

1. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. — М.: Издательство иностранной литературы, 1957. — 256 с.

2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 735 с.

3. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1982. — 336 с.

4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 520 с.

5. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.

Bibliography

1. *Miranda K.* Partial differential equations of elliptical type. — M.: Foreing Literature Publishing House, 1957. — 256 p. — (in Russian).
2. *Tikhonov A. N., Samarsky A. A.* Equations of mathematical physics. — M.: Nauka, 1972. — 735 p. — (in Russian).
3. *Bitsadze A. V.* Equations of mathematical physics. — M.: Nauka, 1982. — 336 p. — (in Russian).
4. *Vladimirov V. S.* Equations of mathematical physics. — M.: Nauka, 1976. — 520 p. — (in Russian).
5. *Loytsyansky L. G.* Equations of mathematical physics. — M.: Drofa, 2003. — 840 p. — (in Russian).

Поступила в редакцию 08.12.2014.