ОТЗЫВ

на диссертацию Костиной Ольги Андреевны
"Раскраски и разбиения множеств на сферах",
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 (дискретная математика и математическая кибернетика)

Автор отзыва

ФИО: Гутерман Александр Эмилевич

Ученая степень: д. ф.-м. н.

Год присуждения ученой степени и научная специальность, по которой присуждена научная степень: 2009, 01.01.06

Ученое звание: доцент

Место работы (полное название организации в соответствии с Уставом, подразделение): Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», механико-математический факультет

Должность: профессор

Контактная информация: тел.: 8-495-939-16-11, эл. почта: guterman@list.ru

Диссертация О. А. Костиной посвящена проблемам комбинаторной геометрии. Начало данному разделу дискретной математики положили в первой половине XX века К. Борсук, П. Эрдеш, Х. Хадвигер и другие известные математики. Одной из важнейших задач комбинаторной геометрии является проблема Борсука, сформулированная в виде гипотезы К. Борсуком, который предположил, что всякое множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^d$ может быть разбито на $d+1$ часть меньшего диаметра. Данной проблемой в разное время занималось множество видных ученых (Кан, Калаи, Перкал, Шрамм и др.), и сейчас известно, что гипотеза неверна при $d \geqslant 64$. Примером другой не менее значимой задачи является проблема Нелсона–Эрдеша–Хадвигера о хроматическом числе пространства. Проблема заключается в отыскании минимального количества цветов, в которые можно покрасить точки пространства таким образом, чтобы любые две точки на расстоянии 1 были разных цветов. Над этим вопросом также работало значительное количество известных математиков (Эрдеш, Ларман, Роджерс, Франкл, Уилсон и др.) В диссертации рассматриваются обобщения данных задач.

Работа состоит из введения, трех глав и заключения. В первой главе изучается проблема оценки хроматического числа сферы — минимального количества цветов, в которые можно покрасить точки сферы таким образом, чтобы любые две точки на расстоянии 1 имели разный цвет. Данную проблему впервые сформулировал П. Эрдеш в 1981 году, а в 2010 году А. М. Райгородский показал, что хроматическое число сферы растет экспоненциально. Автор диссертации улучшает данный результат, в том числе при помощи более сложной модификации линейно-алгебраического метода с использованием $(-1, 0, 1)$-векторов и дополнительных результатов экстремальной комбинаторики (теорема Райгородского–Пономаренко).

Во второй главе рассматриваются хроматические числа сфер в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой l_q, где расстояние между векторами $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ определяется как $d_q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^q\right)^{1/q}$. В данной задаче автор приводит первые известные оценки для произвольного q. Оказывается, что линейно-алгебраический метод в данном случае дает значительно менее сильный результат по сравнению с евклидовым случаем $q = 2$.

Третья глава посвящена обобщению гипотезы Борсука на сфере. В работе 2015 года А. Б. Купавский и А. М. Райгородский показали, что для достаточно больших d любое подмножество сферы S_r^{d-1} диаметра 1 не может быть разбито на $d + 1$ часть меньшего диаметра. Определим величину $f_r(d)$, показывающую, на какое минимальное количество частей меньшего диаметра может быть разбито произвольное множество $A \subset S_r^{d-1}$. В работе Купавского и Райгородского было показано, что данная величина растет по меньшей мере субэкспоненциально при $d \to \infty$. Автор продолжает работу в данном направлении и, во-первых, устанавливает численное выражение оценки Купавского–Райгородского, во-вторых, показывает, что данные оценки могут быть улучшены за счет геометрических соображений (понижение размерности контрпримера) и применения более сложных комбинаторных методов (линейно-алгебраический метод для $(-1, 0, 1)$-векторов).

Работа хорошо структурирована и написана хорошим языком. Хотелось бы также отметить богатую историю и актуальность исследуемых задач. Полученные результаты являются новыми, носят теоретический характер и могут быть полезны для специалистов в области дискретной математики. Автором продемонстрировано умение пользоваться основными методами комбинаторной геометрии и теории графов на высоком уровне. Работа прошла апробацию на ряде конференций и семинаров. Основные результаты работы представлены в 4 статьях, опубликованных в рецензируемых журналах (все они входят в перечень ВАК).

Диссертация является научно-квалификационной работой, результаты которой вносят весомый вклад в комбинаторную геометрию. Она соответствует установленным Правительством Российской Федерации критериям, а ее автор Костина Ольга Андреевна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика.

11.10.2019

/А.Э. Гутерман/

Подпись профессора А.Э. Гутермана заверяю:
Отдел кадров Механико-математического факультета МГУ
специалист по кадрам
Караулова С.А.