БИЛЕТ 1

1. Когда к квадратному трехчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наименьшее значение увеличилось на 1, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 3. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $2x^2$?

Ответ. Увеличится на $\dfrac{3}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение, его старший коэффициент положителен, а само минимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a+1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c$. Если из $f(x)$ вычесть x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a-1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-4}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+1,\\ -\frac{b^2}{4a-4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+4}=1,\\ \frac{b^2}{4a-4}-\frac{b^2}{4a}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a(a+1)}=1,\\ \frac{b^2}{4a(a-1)}=3.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{a-1}{a+1}=\frac{1}{3}$, откуда $a=2$. Тогда $b^2=24$, а минимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{24}{8}+c=-3+c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить $2x^2$, то выйдет функция $(a+2)x^2+bx+c$, минимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+8}+c=-\frac{24}{16}+c=-\frac{3}{2}+c$, что на $\frac{3}{2}$ больше минимума исходной функции.

2. Решите неравенство $x^{\log_3 x}-2\leqslant\left(\sqrt[3]{3}\right)^{\log^2_{\sqrt{3}}x}-2\cdot x^{\log_3\sqrt[3]{x}}$.

Ответ. $x\in\left(0;3^{-\sqrt{\log_3 2}}\right]\cup\{1\}\cup\left[3^{\sqrt{\log_3 2}};+\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $3^{\log_3^2 x}-2-3^{\frac{4}{3}\log_3^2 x}+2\cdot3^{\frac{1}{3}\log_3^2 x}\leqslant 0$. Сгруппировав первый член с третьим, а второй – с четвёртым, раскладываем левую часть неравенства на множители:

$$\left(3^{\log_3^2 x}-2\right)\left(1-3^{\frac{1}{3}\log_3^2 x}\right)\leqslant 0.$$

Далее возможны два случая.

а) $\begin{cases}3^{\log_3^2 x}-2\geqslant 0,\\ 1-3^{\frac{1}{3}\log_3^2 x}\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3^2 x\geqslant\log_3 2,\\ \log_3^2 x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x\geqslant\sqrt{\log_3 2},\\ \log_3 x\leqslant-\sqrt{\log_3 2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 3^{\sqrt{\log_3 2}},\\ x\leqslant 3^{-\sqrt{\log_3 2}};\end{array}\right.$

б) $\begin{cases}3^{\log_3^2 x}-2\leqslant 0,\\ 1-3^{\frac{1}{3}\log_3^2 x}\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3^2 x\leqslant\log_3 2,\\ \log_3^2 x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\log_3 x=0\Leftrightarrow x=1.$

Объединяя результаты, получаем $x\in\left(0;3^{-\sqrt{\log_3 2}}\right]\cup\{1\}\cup\left[3^{\sqrt{\log_3 2}};+\infty\right)$.

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha=\arccos\left(-\dfrac{2}{5}\right)$, а числа $3+\sin x$, $3+\sin y$, $3+\sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

Ответ. $-\dfrac{1}{10}$.

Решение. Поскольку числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию с разностью α, то $x=y-\alpha$, $z=y+\alpha$. Используем характеристическое свойство геометрической прогрессии (квадрат любого её члена равен произведение двух соседних) и получаем уравнение

$$(3+\sin(y-\alpha))(3+\sin(y+\alpha))=(3+\sin y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(\sin(y-\alpha)+\sin(y+\alpha))+\sin(y-\alpha)\sin(y+\alpha)=6\sin y+\sin^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\sin y\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\cos2\alpha-\tfrac{1}{2}\cos2y=6\sin y+\sin^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\sin y(\cos\alpha-1)+\cos^2\alpha-\cos^2 y=\sin^2 y\Leftrightarrow 6\sin y(\cos\alpha-1)+(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)=0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $\cos\alpha=1$, либо $\sin y=-\frac{\cos\alpha+1}{6}$. Первый случай невозможен, так как тогда $\alpha=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, следовательно, $\sin x=\sin y=\sin z$ и геометрическая прогрессия оказывается постоянной. Значит, осуществляется второй случай. Так как $\cos\alpha=-\frac{2}{5}$, то $\sin y=-\frac{1}{10}$.

4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 4 и 9.

а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны AB.

Ответ. а) 5; б) $R = \dfrac{32}{7}$; $AB = \dfrac{16}{\sqrt{7}}$.

Решение. Положим $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle BAC = 2\gamma$. По обобщённой теореме синусов находим, что $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin 2\gamma$. Отметим, что $\gamma < 90^\circ$ (иначе сумма углов треугольника больше 180°).

По теореме об угле между касательной и хордой, угол между касательной и AB равен γ, а угол между касательной и BC равен 2γ. Следовательно, расстояние d_A от точки A до касательной равно $AB\sin\gamma = 2R\sin^2\gamma$. Аналогично, расстояние d_C от точки C до касательной равно $BC\sin 2\gamma = 2R\sin^2 2\gamma$.

Значит, $\frac{9}{4} = \frac{d_C}{d_A} = 4\cos^2\gamma$, откуда $\cos^2\gamma = \frac{9}{16}$. Тогда $\sin^2\gamma = \frac{7}{16}$, $R = \frac{d_A}{2\sin^2\gamma} = \frac{32}{7}$.

Следовательно, $AB = 2R\sin\gamma = \frac{16}{\sqrt{7}}$.

Расстояние от точки A до прямой BC равно

$$AB \cdot \sin\angle ABC = AB\sin 3\gamma = AB\left(3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma\right) = 5.$$

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(60; 45)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 2070.

Решение. Проведём через данную точку $(60; 45)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 60$ и $y = 45$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда “нижняя” вершина квадрата может быть расположена 45 способами: $(60;\ 0), (60;\ 1), \ldots, (60;\ 44)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 60$ и $y = 45$ разделяют плоскость. Рассмотрим “левую нижнюю” вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $15 \leqslant x \leqslant 59$, $0 \leqslant y \leqslant 44$. Получаем 45^2 способов.

Общее количество способов равно $45^2 + 45 = 46 \cdot 45 = 2070$.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a + y\sin a - 2 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y - b^2 + 4b + 6 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

Ответ. $b \in \left(-\infty;\ 4 - \sqrt{10}\right] \cup \left[\sqrt{10};\ +\infty\right)$.

Решение. Рассмотрим неравенство данной системы. При любом значении параметра a расстояние от начала координат до прямой $x\cos a + y\sin a - 2 = 0$ равно 2, а точка $(0;\ 0)$ удовлетворяет этому неравенству. Значит, неравенство задаёт полуплоскость, содержащую точку $(0;\ 0)$, границей которой является прямая, касающаяся окружности $x^2 + y^2 = 4$.

Уравнение данной системы можно преобразовать к виду $(x+3)^2+(y-1)^2 = (b-2)^2$. Оно задаёт окружность $\Omega(b)$ с центром $(-3;\ 1)$ радиуса $|b-2|$ (или точку $(-3;\ 1)$ при $b = 2$).

Для того, чтобы система имела решение при любом значении параметра a, требуется, чтобы окружность $\Omega(b)$ пересекала любую из полуплоскостей, определяемых неравенством системы. Пусть r_0 – радиус той окружности $\Omega(b)$, которая касается окружности $x^2 + y^2 = 4$ внешним образом. Тогда сформулированному условию удовлетворяют все значения радиуса из промежутка $[r_0; +\infty)$.

Для окружностей, касающихся внешним образом, сумма радиусов равна расстоянию между центрами. Отсюда получаем, что $r_0 = \sqrt{10} - 2$, поэтому $|b-2| \geqslant \sqrt{10} - 2 \Leftrightarrow b \in \left(-\infty;\ 4 - \sqrt{10}\right] \cup \left[\sqrt{10};\ +\infty\right)$.

7. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ – правильный треугольник ABC. Объём пирамиды равен $\dfrac{25}{\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D, равна 3. Точка M – середина ребра CD. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB.

б) Найдите все возможные значения длины ребра CD, если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

Ответ. а) $\angle = \arccos\left(\pm\dfrac{4}{5}\right)$; б) $CD = \dfrac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}}$ или $CD = 3\sqrt{13}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой радиуса вписанной сферы $r = \frac{3V}{S}$, где V – объём, а S – площадь поверхности пирамиды. Объёмы пирамид $ABCM$ и $ABDM$ равны (грань ABM общая, а вершины C и D равноудалены от плоскости ABM); кроме того $S_{ACM} = S_{ADM}$ и $S_{BCM} = S_{BDM}$ (медиана делит площадь треугольника пополам). Значит, равенство сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, эквивалентно условию $S_{ABC} = S_{ABD}$ или равенству высот, проведённых к стороне AB в треугольниках ABC и ABD.

Пусть H и K – проекции точки D на плоскость ABC и прямую AB соответственно. Объём пирамиды равен $\frac{25}{\sqrt{3}}$, а её высота равна 3. Значит, площадь основания пирамиды равна $\frac{25}{\sqrt{3}}$. Тогда сторона основания $AB = \frac{10}{\sqrt{3}}$, а высота треугольника ABC равна 5. Значит, DK также равно 5. Из прямоугольного треугольника DHK находим $KH = \sqrt{DK^2 - DH^2} = 4$, т.е. точка H находится на расстоянии 4 от прямой AB (H лежит на одной из двух прямых, параллельных AB, на расстоянии 4 от неё).

Тем самым, угол между гранями при ребре AB равен $\arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$.

б) При дополнительном условии H лежит на луче CB, при этом $\frac{BH}{BC} = \frac{4}{5}$, откуда $CH = \frac{1}{5}BC = \frac{2}{\sqrt{3}}$ или $CH = \frac{9}{5}BC = 6\sqrt{3}$. Из треугольника CDH получаем, что $CD = \sqrt{CH^2 + HD^2}$. Следовательно, $CD = \frac{\sqrt{31}}{\sqrt{3}}$ или $CD = 3\sqrt{13}$.

БИЛЕТ 2

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили x^2, его наибольшее значение увеличилось на $\dfrac{27}{2}$, а когда из него вычли $4x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если из него вычесть $2x^2$?

Ответ. Уменьшится на $\dfrac{27}{4}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наибольшее значение, его старший коэффициент отрицателен, а само максимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a+1)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c$. Если из $f(x)$ вычесть $4x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a-4)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-16}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+\frac{27}{2},\\ -\frac{b^2}{4a-16}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+4}=\frac{27}{2},\\ \frac{b^2}{4a-16}-\frac{b^2}{4a}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a(a+1)}=\frac{27}{2},\\ \frac{b^2}{a(a-4)}=9.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{a-4}{4(a+1)}=\frac{3}{2}$, откуда $a=-2$. Тогда $b^2=108$, а максимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{108}{-8}+c=\frac{27}{2}+c$. Если из квадратного трёхчлена $f(x)$ вычесть $2x^2$, то выйдет функция $(a-2)x^2+bx+c$, максимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a-8}+c=-\frac{108}{-16}+c=\frac{27}{4}+c$, что на $\frac{27}{4}$ меньше максимума исходной функции.

2. Решите неравенство $\left(\sqrt[10]{125}\right)^{\log^2_{\sqrt{5}}x}+3\geqslant x^{\log_5 x}+3\left(\sqrt[5]{x}\right)^{\log_5 x}$.

Ответ. $x\in\left(0;5^{-\sqrt{\log_5 3}}\right]\cup\{1\}\cup\left[5^{\sqrt{\log_5 3}};+\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $5^{\frac{6}{5}\log^2_5 x}+3-5^{\log^2_5 x}-3\cdot 5^{\frac{1}{5}\log^2_5 x}\geqslant 0$. Сгруппировав первый член с третьим, а второй – с четвёртым, раскладываем левую часть неравенства на множители:

$$\left(5^{\log^2_5 x}-3\right)\left(5^{\frac{1}{5}\log^2_5 x}-1\right)\geqslant 0.$$

Далее возможны два случая.

а) $\begin{cases}5^{\log^2_5 x}-3\geqslant 0,\\ 5^{\frac{1}{5}\log^2_5 x}-1\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log^2_5 x\geqslant\log_5 3,\\ \log^2_5 x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_5 x\geqslant\sqrt{\log_5 3},\\ \log_5 x\leqslant-\sqrt{\log_5 3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 5^{\sqrt{\log_5 3}},\\ x\leqslant 5^{-\sqrt{\log_5 3}};\end{array}\right.$

б) $\begin{cases}5^{\log^2_5 x}-3\leqslant 0,\\ 5^{\frac{1}{5}\log^2_5 x}-1\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log^2_5 x\leqslant\log_5 3,\\ \log^2_5 x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\log_5 x=0\Leftrightarrow x=1.$

Объединяя результаты, получаем $x\in\left(0;5^{-\sqrt{\log_5 3}}\right]\cup\{1\}\cup\left[5^{\sqrt{\log_5 3}};+\infty\right)$.

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha=\arccos\dfrac{1}{9}$, а числа $5+\cos x$, $5+\cos y$, $5+\cos z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\cos y$.

Ответ. $-\dfrac{1}{9}$.

Решение. Поскольку числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию с разностью α, то $x=y-\alpha$, $z=y+\alpha$. Используем характеристическое свойство геометрической прогрессии (квадрат любого её члена равен произведение двух соседних) и получаем уравнение

$$(5+\cos(y-\alpha))(5+\cos(y+\alpha))=(5+\cos y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 5(\cos(y-\alpha)+\cos(y+\alpha))+\cos(y-\alpha)\cos(y+\alpha)=10\cos y+\cos^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10\cos y\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\cos 2\alpha+\tfrac{1}{2}\cos 2y=10\cos y+\cos^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 10\cos y(\cos\alpha-1)+\cos^2\alpha+\cos^2 y-1=\cos^2 y\Leftrightarrow 10\cos y(\cos\alpha-1)+(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)=0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $\cos\alpha=1$, либо $\cos y=-\frac{\cos\alpha+1}{10}$. Первый случай невозможен, так как тогда $\alpha=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, следовательно, $\cos x=\cos y=\cos z$ и геометрическая прогрессия оказывается постоянной. Значит, осуществляется второй случай. Так как $\cos\alpha=\frac{1}{9}$, то $\cos y=-\frac{1}{9}$.

4. В треугольнике ABC сторона AB равна $\sqrt{11}$, а угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной относятся как $9:25$.

а) Найдите отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой ℓ и радиус окружности Ω.

Ответ. а) $9:16$, б) $d_C = \dfrac{275}{54}$, $R=3$.

Решение. Положим $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle BAC = 2\gamma$. По обобщённой теореме синусов находим, что $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin 2\gamma$. Отметим, что $\gamma < 90^\circ$ (иначе сумма углов треугольника больше 180°).

По теореме об угле между касательной и хордой, угол между касательной и AB равен γ, а угол между касательной и BC равен 2γ. Следовательно, расстояние d_A от точки A до касательной равно $AB\sin\gamma = 2R\sin^2\gamma$. Аналогично, расстояние d_C от точки C до касательной равно $BC\sin 2\gamma = 2R\sin^2 2\gamma$.

Значит, $\frac{25}{9} = \frac{d_C}{d_A} = 4\cos^2\gamma$, откуда $\cos^2\gamma = \frac{25}{36}$. Тогда $\sin^2\gamma = \frac{11}{36}$, $R = \frac{AB}{\sin 2\gamma} = 3$. Тогда $d_A = \frac{11}{6}$, $d_C = \frac{275}{54}$.

Расстояние от точки A до прямой BC равно

$$AB\cdot\sin\angle ABC = AB\sin 3\gamma = AB\left(3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma\right) = \frac{88}{27}.$$

Отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC равно $\frac{11}{6} : \frac{88}{27} = \frac{9}{16}$.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(55;40)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 1560.

Решение. Проведём через данную точку $(55;40)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x=55$ и $y=40$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда “нижняя” вершина квадрата может быть расположена 39 способами: $(55;\ 1), (55;\ 1), \ldots, (55;\ 39)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x=55$ и $y=40$ разделяют плоскость. Рассмотрим “левую нижнюю” вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались натуральными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $16 \leqslant x \leqslant 54$, $1 \leqslant y \leqslant 39$. Получаем 39^2 способов.

Общее количество способов равно $39^2 + 39 = 39\cdot 40 = 1560$.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a + y\sin a + 4 \leqslant 0, \\ x^2+y^2+10x+2y-b^2-8b+10=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

Ответ. $b \in \left(-\infty;\ -8-\sqrt{26}\,\right] \cup \left[\sqrt{26};\ +\infty\right)$.

Решение. Рассмотрим неравенство данной системы. При любом значении параметра a расстояние от начала координат до прямой $x\cos a + y\sin a + 4 = 0$ равно 3, а точка $(0;\ 0)$ не удовлетворяет этому неравенству. Значит, неравенство задаёт полуплоскость, не содержащую точку $(0;\ 0)$, границей которой является прямая, касающаяся окружности $x^2+y^2=16$.

Уравнение данной системы можно преобразовать к виду $(x+5)^2+(y+1)^2 = (b+4)^2$. Оно задаёт окружность $\Omega(b)$ с центром $(-5;\ -1)$ радиуса $|b+4|$ (или точку $(-5;\ -1)$ при $b=-4$).

Для того, чтобы система имела решение при любом значении параметра a, требуется, чтобы окружность $\Omega(b)$ пересекала любую из полуплоскостей, определяемых неравенством системы. Пусть r_0 – радиус той окружности $\Omega(b)$, которая касается окружности $x^2+y^2=16$ внутренним образом (т.е. окружность $x^2+y^2=16$ находится внутри окружности $\Omega(b)$). Тогда сформулированному условию удовлетворяют все значения радиуса из промежутка $[r_0; +\infty)$.

Для окружностей, касающихся внутренним образом, разность радиусов равна расстоянию между центрами. Отсюда получаем, что $r_0 = \sqrt{26}+4$, поэтому $|b+4| \geqslant \sqrt{26}+4 \Leftrightarrow b \in \left(-\infty;\ -8-\sqrt{26}\,\right] \cup \left[\sqrt{26};\ +\infty\right)$.

7. Основание треугольной пирамиды $ABCD$ – правильный треугольник ABC. Объём пирамиды равен $\dfrac{100}{3\sqrt{3}}$, а её высота, проведённая из вершины D, равна 4. Точка M – середина ребра CD. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре AB.

б) Найдите все возможные значения длины ребра CD, если дополнительно известно, что грани BCD и ABC взаимно перпендикулярны.

Ответ. а) $\angle = \arccos\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)$; б) $CD = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ или $CD = \dfrac{4\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой радиуса вписанной сферы $r = \frac{3V}{S}$, где V – объём, а S – площадь поверхности пирамиды. Объёмы пирамид $ABCM$ и $ABDM$ равны (грань ABM общая, а вершины C и D равноудалены от плоскости ABM); кроме того $S_{ACM} = S_{ADM}$ и $S_{BCM} = S_{BDM}$ (медиана делит площадь треугольника пополам). Значит, равенство сфер, вписанных в пирамиды $ABCM$ и $ABDM$, эквивалентно условию $S_{ABC} = S_{ABD}$ или равенству высот, проведённых к стороне AB в треугольниках ABC и ABD.

Пусть H и K – проекции точки D на плоскость ABC и прямую AB соответственно. Объём пирамиды равен $\frac{100}{\sqrt{3}}$, а её высота равна 4. Значит, площадь основания пирамиды равна $\frac{25}{\sqrt{3}}$. Тогда сторона основания $AB = \frac{10}{\sqrt{3}}$, а высота треугольника ABC равна 5. Значит, DK также равно 5. Из прямоугольного треугольника DHK находим $KH = \sqrt{DK^2 - DH^2} = 3$, т.е. точка H находится на расстоянии 3 от прямой AB (H лежит на одной из двух прямых, параллельных AB, на расстоянии 3 от неё).

Тем самым, угол между гранями при ребре AB равен $\arccos\left(\pm\frac{3}{5}\right)$.

б) При дополнительном условии H лежит на луче CB, при этом $\frac{BH}{BC} = \frac{3}{5}$, откуда $CH = \frac{2}{5}BC = \frac{4}{\sqrt{3}}$ или $CH = \frac{8}{5}BC = \frac{16}{\sqrt{3}}$. Из треугольника CDH получаем, что $CD = \sqrt{CH^2 + HD^2}$. Следовательно, $CD = \frac{8}{\sqrt{3}}$ или $CD = \frac{4\sqrt{19}}{\sqrt{3}}$.

БИЛЕТ 3

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $3x^2$, его наименьшее значение увеличилось на 9, а когда из него вычли x^2, его наименьшее значение уменьшилось на 9. А как изменится наименьшее значение $f(x)$, если к нему прибавить x^2?

Ответ. Увеличится на $\dfrac{9}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наименьшее значение, его старший коэффициент положителен, а само минимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить $3x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a+3)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+12}+c$. Если из $f(x)$ вычесть x^2, то получаем квадратный трёхчлен $(a-1)x^2+bx+c$, для которого минимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-4}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+12}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+9,\\ -\frac{b^2}{4a-4}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+12}=9,\\ \frac{b^2}{4a-4}-\frac{b^2}{4a}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3b^2}{4a(a+3)}=9,\\ \frac{b^2}{4a(a-1)}=9.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{3(a-1)}{a+3}=1$, откуда $a=3$. Тогда $b^2=216$, а минимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{216}{12}+c=-18+c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить x^2, то выйдет функция $(a+1)x^2+bx+c$, минимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+4}+c=-\frac{216}{16}+c=-\frac{27}{2}+c$, что на $\frac{9}{2}$ больше минимума исходной функции.

2. Решите неравенство $x^{\log_{13}x}+7\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\log_{13}x}\leqslant 7+\left(\sqrt[3]{13}\right)^{\log^2_{\sqrt{13}}x}$.

Ответ. $x\in\left(0;13^{-\sqrt{\log_{13}7}}\right]\cup\{1\}\cup\left[13^{\sqrt{\log_{13}7}};+\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $13^{\log^2_{13}x}+7\cdot 13^{\frac13\log^2_{13}x}-7-13^{\frac43\log^2_{13}x}\leqslant 0$. Сгруппировав первый член с четвёртым, а второй – с третьим, раскладываем левую часть неравенства на множители:

$$\left(13^{\log^2_{13}x}-7\right)\left(1-13^{\frac13\log^2_{13}x}\right)\leqslant 0.$$

Далее возможны два случая.

а) $\begin{cases}13^{\log^2_{13}x}-7\geqslant 0,\\ 1-13^{\frac13\log^2_{13}x}\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log^2_{13}x\geqslant\log_{13}7,\\ \log^2_{13}x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_{13}x\geqslant\sqrt{\log_{13}7},\\ \log_{13}x\leqslant-\sqrt{\log_{13}7}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant 13^{\sqrt{\log_{13}7}},\\ x\leqslant 13^{-\sqrt{\log_{13}7}};\end{array}\right.$

б) $\begin{cases}13^{\log^2_{13}x}-7\leqslant 0,\\ 1-13^{\frac13\log^2_{13}x}\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log^2_{13}x\leqslant\log_{13}7,\\ \log^2_{13}x\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\log_{13}x=0\Leftrightarrow x=1.$

Объединяя результаты, получаем $x\in\left(0;13^{-\sqrt{\log_{13}7}}\right]\cup\{1\}\cup\left[13^{\sqrt{\log_{13}7}};+\infty\right)$.

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha=\arccos\left(-\dfrac15\right)$, а числа $2+\sin x$, $2+\sin y$, $2+\sin z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\sin y$.

Ответ. $-\dfrac15$.

Решение. Поскольку числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию с разностью α, то $x=y-\alpha$, $z=y+\alpha$. Используем характеристическое свойство геометрической прогрессии (квадрат любого её члена равен произведение двух соседних) и получаем уравнение

$$(2+\sin(y-\alpha))(2+\sin(y+\alpha))=(2+\sin y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(\sin(y-\alpha)+\sin(y+\alpha))+\sin(y-\alpha)\sin(y+\alpha)=4\sin y+\sin^2y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sin y\cos\alpha+\tfrac12\cos2\alpha-\tfrac12\cos2y=4\sin y+\sin^2y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\sin y(\cos\alpha-1)+\cos^2\alpha-\cos^2y=\sin^2y\Leftrightarrow 4\sin y(\cos\alpha-1)+(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)=0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $\cos\alpha=1$, либо $\sin y=-\frac{\cos\alpha+1}{4}$. Первый случай невозможен, так как тогда $\alpha=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, следовательно, $\sin x=\sin y=\sin z$ и геометрическая прогрессия оказывается постоянной. Значит, осуществляется второй случай. Так как $\cos\alpha=-\frac15$, то $\sin y=-\frac15$.

4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Расстояния от точек A и C до этой касательной равны соответственно 5 и 12.

а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC.

б) Найдите радиус окружности Ω и длину стороны BC.

Ответ. а) 7; б) $R = \dfrac{25}{4}$; $BC = 5\sqrt{6}$.

Решение. Положим $\angle ACB = \gamma$, тогда $\angle BAC = 2\gamma$. По обобщённой теореме синусов находим, что $AB = 2R\sin\gamma$, $BC = 2R\sin 2\gamma$. Отметим, что $\gamma < 90^\circ$ (иначе сумма углов треугольника больше 180°).

По теореме об угле между касательной и хордой, угол между касательной и AB равен γ, а угол между касательной и BC равен 2γ. Следовательно, расстояние d_A от точки A до касательной равно $AB\sin\gamma = 2R\sin^2\gamma$. Аналогично, расстояние d_C от точки C до касательной равно $BC\sin 2\gamma = 2R\sin^2 2\gamma$.

Значит, $\frac{12}{5} = \frac{d_C}{d_A} = 4\cos^2\gamma$, откуда $\cos^2\gamma = \frac{3}{5}$. Тогда $\sin^2\gamma = \frac{2}{5}$, $R = \frac{d_A}{2\sin^2\gamma} = \frac{25}{4}$.

Следовательно, $AB = 2R\sin\gamma = \frac{16}{\sqrt{7}}$, $BC = 4R\sin\gamma\cos\gamma = 5\sqrt{6}$.

Расстояние от точки A до прямой BC равно

$$AB \cdot \sin\angle ABC = AB\sin 3\gamma = AB\left(3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma\right) = 7.$$

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют целые неотрицательные координаты, а центр находится в точке $(25; 60)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 650.

Решение. Проведём через данную точку $(25; 60)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x = 25$ и $y = 60$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда "левая" вершина квадрата может быть расположена 25 способами: $(0; 60), (1; 60), \ldots, (24; 60)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x = 25$ и $y = 60$ разделяют плоскость. Рассмотрим "левую нижнюю" вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались неотрицательными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $0 \leqslant x \leqslant 24$, $35 \leqslant y \leqslant 59$. Получаем 25^2 способов.

Общее количество способов равно $25^2 + 25 = 26 \cdot 25 = 650$.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a - y\sin a - 3 \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y - b^2 - 6b + 8 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

Ответ. $b \in \left(-\infty; -\sqrt{17}\right] \cup \left[\sqrt{17} - 6; +\infty\right)$.

Решение. Рассмотрим неравенство данной системы. При любом значении параметра a расстояние от начала координат до прямой $x\cos a - y\sin a - 3 = 0$ равно 3, а точка $(0; 0)$ удовлетворяет этому неравенству. Значит, неравенство задаёт полуплоскость, содержащую точку $(0; 0)$, границей которой является прямая, касающаяся окружности $x^2 + y^2 = 9$.

Уравнение данной системы можно преобразовать к виду $(x-4)^2 + (y+1)^2 = (b+3)^2$. Оно задаёт окружность $\Omega(b)$ с центром $(4; -1)$ радиуса $|b+3|$ (или точку $(4; -1)$ при $b = -3$).

Для того, чтобы система имела решение при любом значении параметра a, требуется, чтобы окружность $\Omega(b)$ пересекала любую из полуплоскостей, определяемых неравенством системы. Пусть r_0 – радиус той окружности $\Omega(b)$, которая касается окружности $x^2 + y^2 = 9$ внешним образом. Тогда сформулированному условию удовлетворяют все значения радиуса из промежутка $[r_0; +\infty)$.

Для окружностей, касающихся внешним образом, сумма радиусов равна расстоянию между центрами. Отсюда получаем, что $r_0 = \sqrt{17} - 3$, поэтому $|b+3| \geqslant \sqrt{17} - 3 \Leftrightarrow b \in \left(-\infty; -\sqrt{17}\right] \cup \left[\sqrt{17} - 6; +\infty\right)$.

7. Основание треугольной пирамиды $KLMN$ объёма 75 – правильный треугольник KLM со стороной 10. Точка T – середина ребра MN. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре KL.

б) Найдите все возможные значения длины ребра MN, если дополнительно известно, что грани KLM и LMN перпендикулярны.

Ответ. а) $\angle = \arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$; б) $MN = \sqrt{31}$ или $MN = 3\sqrt{39}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой радиуса вписанной сферы $r = \frac{3V}{S}$, где V – объём, а S – площадь поверхности пирамиды. Объёмы пирамид $KLMT$ и $KLNT$ равны (грань KLT общая, а вершины M и N равноудалены от плоскости KLT); кроме того $S_{KMT} = S_{KNT}$ и $S_{LMT} = S_{LNT}$ (медиана делит площадь треугольника пополам). Значит, равенство сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, эквивалентно условию $S_{KLM} = S_{KLN}$ или равенству высот, проведённых к стороне KL в треугольниках KLM и KLN.

Пусть H и Q – проекции точки N на плоскость KLM и прямую KL соответственно. Объём пирамиды равен 75, а площадь её основания равна $\frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$. Значит, высота пирамиды равна $3\sqrt{3}$. Высота треугольника KLM равна $5\sqrt{3}$. Следовательно, NQ также равно $5\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника NQH находим $QH = \sqrt{QN^2 - NH^2} = 4\sqrt{3}$, т.е. точка H находится на расстоянии $4\sqrt{3}$ от прямой KL (H лежит на одной из двух прямых, параллельных KL, на расстоянии $4\sqrt{3}$ от неё).

Тем самым, угол между гранями при ребре KL равен $\arccos\left(\pm\frac{4}{5}\right)$.

б) При дополнительном условии H лежит на луче ML, при этом $\frac{LH}{LM} = \frac{4}{5}$, откуда $MH = \frac{1}{5}LM = 2$ или $MH = \frac{9}{5}LM = 18$. Из треугольника MNH получаем, что $MN = \sqrt{MH^2 + HN^2}$. Следовательно, $MN = \sqrt{31}$ или $MN = 3\sqrt{39}$.

БИЛЕТ 4

1. Когда к квадратному трёхчлену $f(x)$ прибавили $2x^2$, его наибольшее значение увеличилось на 10, а когда из него вычли $5x^2$, его наибольшее значение уменьшилось на $\frac{15}{2}$. А как изменится наибольшее значение $f(x)$, если к нему прибавить $3x^2$?

Ответ. Увеличится на $\frac{45}{2}$.

Решение. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Поскольку квадратный трёхчлен принимает наибольшее значение, его старший коэффициент отрицателен, а само максимальное значение достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$. Это значение равно $f(x_0)=a\cdot\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{2a}+c=-\frac{b^2}{4a}+c$.

Если к $f(x)$ прибавить $2x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a+2)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a+8}+c$. Если из $f(x)$ вычесть $5x^2$, то получаем квадратный трёхчлен $(a-5)x^2+bx+c$, для которого максимальное значение равно $-\frac{b^2}{4a-20}+c$. Отсюда следуют уравнения

$$\begin{cases}-\frac{b^2}{4a+8}+c=-\frac{b^2}{4a}+c+10,\\ -\frac{b^2}{4a-20}+c=-\frac{b^2}{4a}+c-\frac{15}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{4a+8}=10,\\ \frac{b^2}{4a-20}-\frac{b^2}{4a}=\frac{15}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{2b^2}{4a(a+2)}=10,\\ \frac{5b^2}{4a(a-5)}=\frac{15}{2}.\end{cases}$$

Разделив у последней системы одно уравнение на второе, получаем $\frac{2(a-5)}{5(a+2)}=\frac{20}{15}$, откуда $a=-5$. Тогда $b^2=300$, а максимальное значение $f(x)$ равно $-\frac{300}{-20}+c=15+c$. Если к квадратному трёхчлену $f(x)$ добавить $3x^2$, то выйдет функция $(a+3)x^2+bx+c$, максимальное значение которой равно $-\frac{b^2}{4a+12}+c=-\frac{300}{-8}+c=\frac{75}{2}+c$, что на $\frac{45}{2}$ больше максимума исходной функции.

2. Решите неравенство $\left(\sqrt[7]{4}\right)^{\log^2_{\sqrt{2}}x}+6\geqslant x^{\log_2 x}+6\left(\sqrt[7]{x}\right)^{\log_2 x}$.

Ответ. $x\in\left(0;2^{-\sqrt{\log_2 6}}\right]\cup\{1\}\cup\left[2^{\sqrt{\log_2 6}};+\infty\right)$.

Решение. Перепишем неравенство в виде $2^{\frac{8}{7}\log_2^2 x}+6-2^{\log_2^2 x}-6\cdot2^{\frac{1}{7}\log_2^2 x}\geqslant0$. Сгруппировав первый член с третьим, а второй – с четвёртым, раскладываем левую часть неравенства на множители:

$$\left(2^{\log_2^2 x}-6\right)\left(2^{\frac{1}{7}\log_2^2 x}-1\right)\geqslant0.$$

Далее возможны два случая.

а) $\begin{cases}2^{\log_2^2 x}-6\geqslant0,\\ 2^{\frac{1}{7}\log_2^2 x}-1\geqslant0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2^2 x\geqslant\log_2 6,\\ \log_2^2 x\geqslant0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x\geqslant\sqrt{\log_2 6},\\ \log_2 x\leqslant-\sqrt{\log_2 6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geqslant2^{\sqrt{\log_2 6}},\\ x\leqslant2^{-\sqrt{\log_2 6}};\end{array}\right.$

б) $\begin{cases}2^{\log_2^2 x}-6\leqslant0,\\ 2^{\frac{1}{7}\log_2^2 x}-1\leqslant0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2^2 x\leqslant\log_2 6,\\ \log_2^2 x\leqslant0\end{cases}\Leftrightarrow\log_2 x=0\Leftrightarrow x=1.$

Объединяя результаты, получаем $x\in\left(0;2^{-\sqrt{\log_2 6}}\right]\cup\{1\}\cup\left[2^{\sqrt{\log_2 6}};+\infty\right)$.

3. Известно, что числа x, y, z образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию с разностью $\alpha=\arccos\frac{5}{9}$, а числа $1+\cos x$, $1+\cos y$, $1+\cos z$ образуют в указанном порядке непостоянную геометрическую прогрессию. Найдите $\cos y$.

Ответ. $-\frac{7}{9}$.

Решение. Поскольку числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию с разностью α, то $x=y-\alpha$, $z=y+\alpha$. Используем характеристическое свойство геометрической прогрессии (квадрат любого её члена равен произведение двух соседних) и получаем уравнение

$$(1+\cos(y-\alpha))(1+\cos(y+\alpha))=(1+\cos y)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\cos(y-\alpha)+\cos(y+\alpha)+\cos(y-\alpha)\cos(y+\alpha)=2\cos y+\cos^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow2\cos y\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\cos2\alpha+\tfrac{1}{2}\cos2y=2\cos y+\cos^2 y\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow2\cos y(\cos\alpha-1)+\cos^2\alpha+\cos^2 y-1=\cos^2 y\Leftrightarrow2\cos y(\cos\alpha-1)+(\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1)=0.$$

Из последнего уравнения следует, что либо $\cos\alpha=1$, либо $\cos y=-\frac{\cos\alpha+1}{2}$. Первый случай невозможен, так как тогда $\alpha=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, следовательно, $\cos x=\cos y=\cos z$ и геометрическая прогрессия оказывается постоянной. Значит, осуществляется второй случай. Так как $\cos\alpha=\frac{5}{9}$, то $\cos y=-\frac{7}{9}$.

4. В треугольнике ABC угол при вершине A в два раза больше угла при вершине C. Через вершину B проведена касательная ℓ к окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Радиус окружности Ω равен $5\sqrt{2}$, а расстояния от точек A и C до касательной ℓ относятся как $2:5$.

а) Найдите отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC.

б) Найдите расстояние от точки C до прямой ℓ и длину стороны AB.

Ответ. а) $2:3$; б) $AB=5\sqrt{3}$, $d_C=\dfrac{75}{4\sqrt{2}}$.

Решение. Положим $\angle ACB=\gamma$, тогда $\angle BAC=2\gamma$. По обобщённой теореме синусов находим, что $AB=2R\sin\gamma$, $BC=2R\sin 2\gamma$. Отметим, что $\gamma<90^\circ$ (иначе сумма углов треугольника больше 180°).

По теореме об угле между касательной и хордой, угол между касательной и AB равен γ, а угол между касательной и BC равен 2γ. Следовательно, расстояние d_A от точки A до касательной равно $AB\sin\gamma=2R\sin^2\gamma$. Аналогично, расстояние d_C от точки C до касательной равно $BC\sin 2\gamma=2R\sin^2 2\gamma$.

Значит, $\frac{5}{2}=\frac{d_C}{d_A}=4\cos^2\gamma$, откуда $\cos^2\gamma=\frac{5}{8}$. Тогда $\sin^2\gamma=\frac{3}{8}$, $d_A=\frac{15}{2\sqrt{2}}$, $d_C=\frac{75}{4\sqrt{2}}$.

$AB=2R\sin\gamma=2\cdot 5\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=5\sqrt{3}$.

Расстояние от точки A до прямой BC равно

$$AB\cdot\sin\angle ABC=AB\sin 3\gamma=AB\left(3\sin\gamma-4\sin^3\gamma\right)=\frac{45}{4\sqrt{2}}.$$

Отношение расстояний от точки A до прямых ℓ и BC равно $\frac{15}{2\sqrt{2}}:\frac{45}{4\sqrt{2}}=\frac{2}{3}$.

5. На координатной плоскости рассматриваются квадраты, все вершины которых имеют натуральные координаты, а центр находится в точке $(35;65)$. Найдите количество таких квадратов.

Ответ. 1190.

Решение. Проведём через данную точку $(35;65)$ вертикальную и горизонтальную прямые ($x=35$ и $y=65$). Возможны два варианта.

а) Вершины квадрата лежат на этих прямых (а его диагонали параллельны осям координат). Тогда "левая" вершина квадрата может быть расположена 34 способами: $(1;\,65),(2;\,65),\ldots(34;\,65)$ (положение остальных вершин при этом определяется однозначно).

б) Вершины квадрата не лежат на указанных прямых. Это означает, что вершины лежат по одной в каждой из четырёх частей, на которые прямые $x=35$ и $y=65$ разделяют плоскость. Рассмотрим "левую нижнюю" вершину (её местоположение однозначно определяет остальные вершины). Для того, чтобы координаты всех вершин квадрата оказались натуральными, необходимо и достаточно, чтобы эта вершина попала в квадрат $1\leqslant x\leqslant 34$, $31\leqslant y\leqslant 64$. Получаем 34^2 способов.

Общее количество способов равно $34^2+34=34\cdot 35=1190$.

6. Найдите все значения параметра b такие, что система

$$\begin{cases} x\cos a+y\sin a+3\leqslant 0,\\ x^2+y^2+8x-4y-b^2+6b+11=0\end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a.

Ответ. $b\in\left(-\infty;\;-2\sqrt{5}\,\right]\cup\left[6+2\sqrt{5};\;+\infty\right)$.

Решение. Рассмотрим неравенство данной системы. При любом значении параметра a расстояние от начала координат до прямой $x\cos a+y\sin a+3=0$ равно 3, а точка $(0;\,0)$ не удовлетворяет этому неравенству. Значит, неравенство задаёт полуплоскость, не содержащую точку $(0;\,0)$, границей которой является прямая, касающаяся окружности $x^2+y^2=9$.

Уравнение данной системы можно преобразовать к виду $(x+4)^2+(y-2)^2=(b-3)^2$. Оно задаёт окружность $\Omega(b)$ с центром $(-4;\,2)$ радиуса $|b-3|$ (или точку $(-4;\,2)$ при $b=3$).

Для того, чтобы система имела решение при любом значении параметра a, требуется, чтобы окружность $\Omega(b)$ пересекала любую из полуплоскостей, определяемых неравенством системы. Пусть r_0 – радиус той окружности $\Omega(b)$, которая касается окружности $x^2+y^2=9$ внутренним образом (т.е. окружность $x^2+y^2=9$ находится внутри окружности $\Omega(b)$). Тогда сформулированному условию удовлетворяют все значения радиуса из промежутка $[r_0;+\infty)$.

Для окружностей, касающихся внутренним образом, разность радиусов равна расстоянию между центрами. Отсюда получаем, что $r_0=\sqrt{20}+3$, поэтому $|b-3|\geqslant\sqrt{20}+3\Leftrightarrow b\in\left(-\infty;\;-2\sqrt{5}\,\right]\cup\left[6+2\sqrt{5};\;+\infty\right)$.

7. Основание треугольной пирамиды $KLMN$ объёма 100 – правильный треугольник KLM со стороной 10. Точка T – середина ребра MN. Известно, что радиусы сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, равны между собой.

а) Найдите все возможные значения угла между гранями пирамиды при ребре KL.

б) Найдите все возможные значения длины ребра MN, если дополнительно известно, что грани KLM и LMN взаимно перпендикулярны.

Ответ. а) $\angle = \arccos\left(\pm\dfrac{3}{5}\right)$; б) $CD = 8$ или $CD = 4\sqrt{19}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой радиуса вписанной сферы $r = \frac{3V}{S}$, где V – объём, а S – площадь поверхности пирамиды. Объёмы пирамид $KLMT$ и $KLNT$ равны (грань KLT общая, а вершины M и N равноудалены от плоскости KLT); кроме того $S_{KMT} = S_{KNT}$ и $S_{LMT} = S_{LNT}$ (медиана делит площадь треугольника пополам). Значит, равенство сфер, вписанных в пирамиды $KLMT$ и $KLNT$, эквивалентно условию $S_{KLM} = S_{KLN}$ или равенству высот, проведённых к стороне KL в треугольниках KLM и KLN.

Пусть H и Q – проекции точки N на плоскость KLM и прямую KL соответственно. Объём пирамиды равен 100, а площадь её основания равна $\frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$. Значит, высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$. Высота треугольника KLM равна $5\sqrt{3}$. Следовательно, NQ также равно $5\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника NQH находим $QH = \sqrt{QN^2 - NH^2} = 3\sqrt{3}$, т.е. точка H находится на расстоянии $3\sqrt{3}$ от прямой KL (H лежит на одной из двух прямых, параллельных KL, на расстоянии $3\sqrt{3}$ от неё).

Тем самым, угол между гранями при ребре KL равен $\arccos\left(\pm\frac{3}{5}\right)$.

б) При дополнительном условии H лежит на луче ML, при этом $\frac{LH}{LM} = \frac{3}{5}$, откуда $MH = \frac{2}{5}LM = 4$ или $MH = \frac{8}{5}LM = 16$. Из треугольника MNH получаем, что $MN = \sqrt{MH^2 + HN^2}$. Следовательно, $MN = 8$ или $MN = 4\sqrt{19}$.