

УДК 519.216.5

В. С. Спивак

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

Численное сравнение наиболее популярных быстрых процедур обнаружения разладки

Проводится исследование проблемы последовательного обнаружения момента изменения свойств случайного процесса, встречающейся в различных областях науки и техники. В статье проведен сравнительный анализ трех наиболее популярных процедур: Ширяева, Ширяева–Робертса, кумулятивных сумм (КУСУМ) для задачи с гауссовским наблюдением (сигнал на фоне белого шума). Для этого же наблюдения из интегральных уравнений Фредгольма 2 рода получены характеристики с помощью численного решения интегральных уравнений методом коллокаций. Исследование показало, что в данной постановке задачи наиболее популярная на практике процедура КУСУМ работает заметно хуже процедур Ширяева и Ширяева–Робертса.

Ключевые слова: обнаружение момента изменения, процедура Ширяева, процедура Ширяева–Робертса, процедура КУСУМ, гауссовское наблюдение, Монте-Карло, интегральное уравнение Фредгольма 2 рода, численное решение.

V. S. Spivak

Moscow Institute of Physics and Technology

Numerical comparison of popular quickest changepoint detection procedures

In this paper, we study the problem of sequential detection of the moment of change in the properties of a random process that occurs in various fields of science and technology. The article provides a comparative analysis of the three most popular procedures: Shiryaev, Shiryaev–Roberts, cumulative sums (CUSUM) for a problem with Gaussian observation (signal to white noise). In the same observation characteristics are obtained from Fredholm second kind integral equations by numerically solving the integral equations by the collocation method. The study shows that in this statement of the problem, the most popular in practice CUSUM procedure works noticeably worse than the Shiryaev and Shiryaev–Roberts procedures.

Key words: changepoint detection, Shiryaev procedure, Shiryaev–Roberts procedure, CUSUM procedure, Gaussian observation, Monte Carlo, Fredholm second kind integral equation, numerical solution.

1. Введение

В данной работе рассматривается задача последовательного обнаружения момента изменения свойств случайного процесса (разладки). До изменения, в нормальном режиме, наблюдается процесс $\{X_n\}$, соответствующий распределению P_∞ . В неизвестный момент времени ν ($\nu \in Z_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$) происходит изменение, после которого наблюдаемый процесс $\{X_n\}$ соответствует распределению P_0 . В последовательной настройке, пока наблюдения соответствуют ожидаемому, необходимо их продолжать. Как только происходит изменение состояния, обнаружить изменение желательно как можно быстрее.

© Спивак В. С., 2020

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», 2020

В большом количестве практических приложений необходимо быстро обнаруживать изменение. Любая политика обнаружения может привести к ложному срабатыванию, то есть определению алгоритмом, что произошло изменение, хотя на самом деле его (изменения) не было. Желание обнаруживать изменение быстрее приводит к увеличению частоты ложных срабатываний. С другой стороны, желание уменьшить количество ложных срабатываний приводит к большой задержке в обнаружении. Пример решения задачи о разладке представлен ниже: на рис. 1.

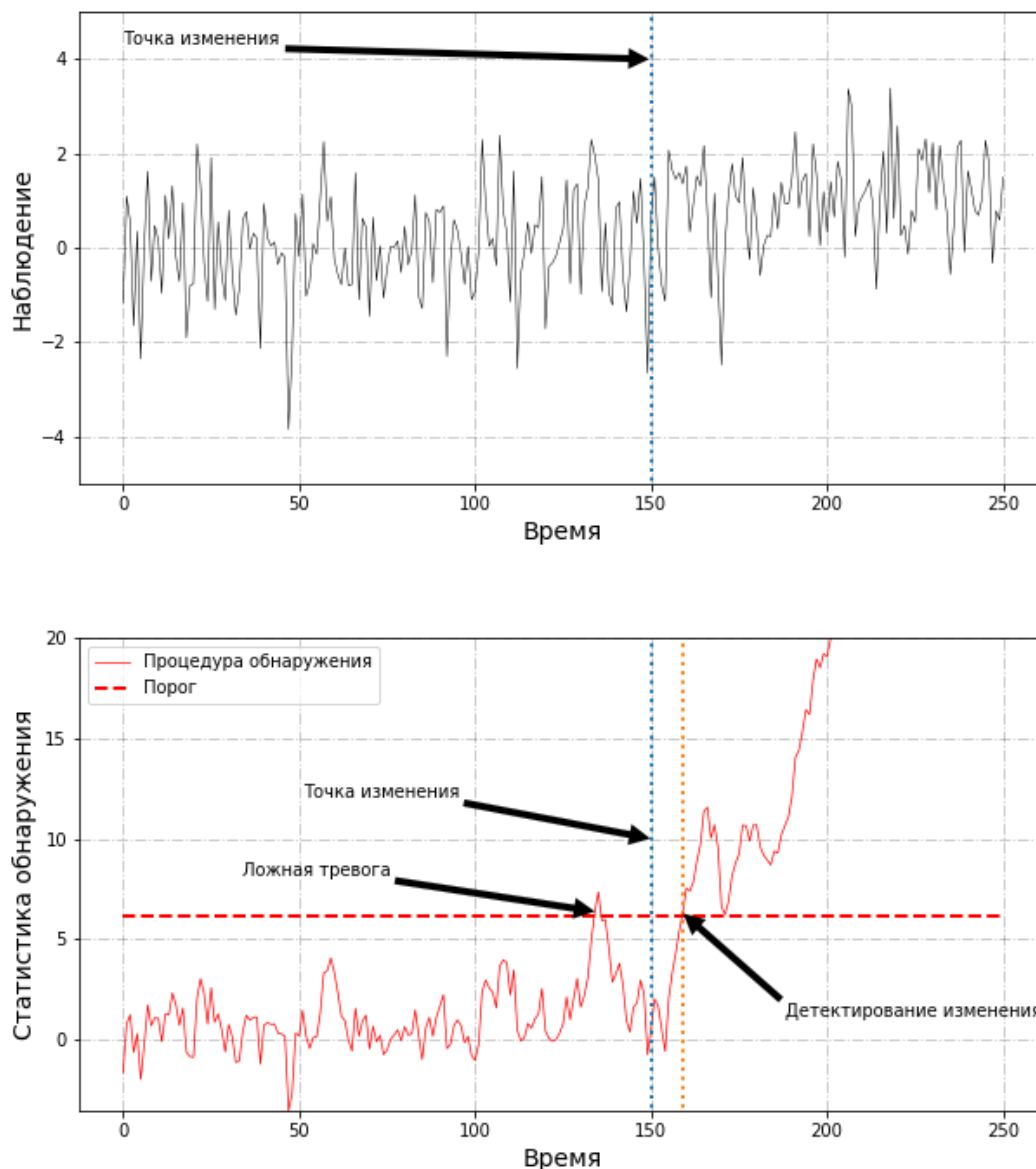


Рис. 1. Пример задачи о разладке

В данной статье мы предоставляем численное сравнение популярных процедур обнаружения: Ширяева, Ширяева–Робертса и КУСУМ в байесовской постановке задачи (момент изменения — случайная величина). Также численно решены интегральные уравнения, позволяющие найти интересные характеристики и сравнить их с аналогичными, полученными методом Монте-Карло.

2. Модель

Пусть $p_j(\mathbf{X}^n)$, $j = \infty, 0$ — плотность распределения P_j^n , где $\mathbf{X}^n = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка размера n . Для фиксированного $\nu \in Z_+$, вероятностная мера P_ν имеет плотность $p_\nu(\mathbf{X}^n) = p(\mathbf{X}^n|\nu)$, которая является произведением плотностей до и после изменения:

$$\begin{aligned} p_\nu(\mathbf{X}^n) &= p_\infty(\mathbf{X}^\nu) \cdot p_0(\mathbf{X}_{\nu+1}^n|\mathbf{X}^\nu) = \\ &= \prod_{i=1}^{\nu} p_\infty(X_i|\mathbf{X}^{i-1}) \cdot \prod_{i=\nu+1}^n p_0(X_i|\mathbf{X}^{i-1}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{X}_m^n = (X_m, \dots, X_n)$ и $p_j(X_n|\mathbf{X}^{n-1})$ — условная плотность X_n , если задано \mathbf{X}^{n-1} . В дальнейшем будем считать, что ν — порядковый номер последнего наблюдения перед изменением.

В частном случае, когда наблюдения являются независимыми и одинаково распределенными случайными величинами с плотностями $f_\infty(x)$ — в нормальном состоянии (до изменения) и $f_0(x)$ — при аномалии (после изменения). В этом случае в (1) $p_\infty(X_i|\mathbf{X}^{i-1}) = f_\infty(X_i)$, а $p_0(X_i|\mathbf{X}^{i-1}) = f_0(X_i)$.

В данной задаче мы заинтересованы в байесовской постановке, когда момент изменения — случайная величина, независимая от наблюдений, с априорным распределением вероятности $\pi_k = P(\nu = k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В симуляции будем считать, что априорное распределение является геометрическим:

$$P(\nu < 0) = q \text{ и } P(\nu = k) = (1 - q)\rho(1 - \rho)^k \text{ для } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

где $0 \leq q < 1$, $0 < \rho < 1$.

Любая процедура обнаружения момента изменения представляет собой время остановки для наблюдаемого процесса $\{X_n\}$ T , являющееся случайной величиной, зависящей от \mathbf{X}^n . Когда $T \leq \nu$, говорят, что произошла ложная тревога. Хорошая процедура обнаружения гарантирует при отсутствии ложной тревоги маленькую задержку в обнаружении $T - \nu$ (уровень ложной тревоги низкий).

Пусть P_k и E_k — вероятность и соответствующее ей ожидание момента изменения $\nu = k \in Z_+$. В дальнейшем, P^π обозначим вероятность, определенную как $P^\pi(\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k P_k(\mathcal{A})$, и E^π обозначает ожидание по отношению к P^π .

В байесовской постановке рассматриваются риск, связанный с задержкой обнаружения, измеряется средней задержкой обнаружения:

$$\text{ADD}(T) = E^\pi[T - \nu|T > \nu] = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k E_k[T - k|T > k] P_\infty(T > k)}{1 - \text{PFA}(T)}, \quad (3)$$

и риск, связанный с ложной тревогой, определяется взвешенной вероятностью ложной тревоги (PFA):

$$\text{PFA}(T) = P^\pi(T \leq \nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \pi_k P_\infty(T \leq k). \quad (4)$$

Для $0 < \alpha < 1$ обозначим $\mathcal{C}_\alpha = \{T : \text{PFA}(T) \leq \alpha\}$ класс процедур обнаружения, для которых взвешенная вероятность ложной тревоги не превосходит α . В байесовской постановке цель — найти оптимальную процедуру, которая минимизирует среднюю задержку обнаружения в классе \mathcal{C}_α , то есть найти $T_{\text{opt}} \in \mathcal{C}_\alpha$ такое, что

$$E^\pi[T_{\text{opt}} - \nu|T_{\text{opt}} > \nu] = \inf_{T \in \mathcal{C}_\alpha} E^\pi[T - \nu|T > \nu].$$

3. Процедуры обнаружения

Пусть « $H_k : \nu = k$ » и « $H_\infty : \nu = \infty$ » — гипотезы, что изменение происходит в момент $0 \leq k < \infty$ и что изменение никогда не происходит соответственно. Следовательно, отношение правдоподобия между этими гипотезами, где наблюдение $\mathbf{X}^n = (X_1, \dots, X_n)$:

$$LR_{k,n} = \prod_{i=k+1}^n \frac{p_0(X_i|\mathbf{X}^{i-1})}{p_\infty(X_i|\mathbf{X}^{i-1})}, \quad k < n.$$

Обозначив $\mathcal{L}_i = p_0(X_i|\mathbf{X}^{i-1})/p_\infty(X_i|\mathbf{X}^{i-1})$, получаем взвешенное отношение правдоподобия:

$$\Lambda_n = \frac{1}{P(\nu \geq n)} \left(q \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_i + \sum_{k=0}^{n-1} \pi_k \prod_{i=k+1}^n \mathcal{L}_i \right), \quad (5)$$

где $\prod_{i=j}^s \mathcal{L}_i = 1$ или $s < j$. Пусть $\Lambda_0 = q/(1-q)$.

Процедура Ширяева

В нашей модели статистика $\Lambda_n^\rho = \Lambda_n/\rho$ получается следующей из (5):

$$\Lambda_n^\rho = \frac{q}{(1-q)\rho} \prod_{i=1}^n \left(\frac{\mathcal{L}_i}{1-\rho} \right) + \sum_{k=1}^n \prod_{i=k}^n \left(\frac{\mathcal{L}_i}{1-\rho} \right). \quad (6)$$

Время остановки процедуры Ширяева

$$T_A = \inf\{n \geq 1 : \Lambda_n^\rho \geq A\}, \quad A > 0, \quad (7)$$

где A называется *порогом*.

Далее мы будем предполагать, что \mathcal{L}_i не зависит от точки изменения k , что всегда верно для случая независимых и одинаково распределенных наблюдений и часто для марковских и скрытых марковских моделей. Из (6) видно, что статистика Λ_n^ρ удовлетворяет рекурсии

$$\Lambda_n^\rho = (1 + \Lambda_{n-1}^\rho) \frac{\mathcal{L}_n}{1-\rho}, \quad n \geq 1, \quad \Lambda_0^\rho = q/[(1-q)\rho]. \quad (8)$$

Согласно лемме 7.2.1 [1],

$$\text{PFA}(T_A) \leq 1/(1+A) \quad \text{для каждого } A > q/(1-q), \quad (9)$$

следовательно, из (9) получаем выражение для порога

$$A = A_\alpha = \frac{1-\alpha}{\alpha\rho}, \quad (10)$$

что гарантирует $T_A \in \mathcal{C}_\alpha$.

Процедура Ширяева–Робертса

Для $r \geq 0$, ($r = \frac{q}{\rho}$) определим статистику Ширяева–Робертса R_n^r :

$$R_n^r = r \prod_{i=1}^n \mathcal{L}_i + \sum_{k=1}^n \prod_{i=k}^n \mathcal{L}_i. \quad (11)$$

Аналогично, как было получено рекурсивное выражение для статистики для процедуры Ширяева, получаем из (11) рекурсивное выражение для статистики Ширяева–Робертса:

$$R_n^r = (1 + R_{n-1}^r) \mathcal{L}_n, \quad n \geq 1, \quad R_0^r = r. \quad (12)$$

Время остановки процедуры Ширяева–Робертса:

$$\tilde{T}_B = \inf\{n \geq 1 : R_n^r \geq B\}, \quad B > 0, \quad (13)$$

где B — порог.

Согласно субмартингальному неравенству Дуба [2], получаем

$$\text{PFA}(\tilde{T}_B) \leq \frac{(1-q)(1-\rho)(1+r\rho)}{\rho B}, \quad (14)$$

отсюда (14) выражение для порога

$$B = B_\alpha = \frac{(1-q)(1-\rho)(1+r\rho)}{\rho\alpha}. \quad (15)$$

Процедура КУСУМ

Статистика КУСУМ определена как

$$V_n = \max_{0 \leq k < n} \prod_{i=k}^n \mathcal{L}_i, \quad n \geq 1.$$

Так как \mathcal{L}_i не зависит от точки изменения k , то получаем рекурсивное выражение для статистики КУСУМ

$$V_n = \max\{1, V_{n-1}\} \mathcal{L}_n, \quad n \geq 1, \quad V_0 = 1. \quad (16)$$

Время остановки процедуры

$$\hat{T}_C = \inf\{n \geq 1 : V_n \geq C\}, \quad C > 0, \quad (17)$$

где C — порог, и $C = B$.

4. Симуляция Монте-Карло для модели гауссовского наблюдения

В данной работе, для получения характеристик средней задержки и частоты ложных срабатываний, производятся симуляции Монте-Карло. Момент изменения ν получается из геометрического распределения (2).

Наблюдение X_n соответствует гауссову распределению с $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ до точки изменения и с $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$ после

$$X_n = \theta \mathbb{1}_{\{n > \nu\}} + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad (18)$$

Используя генератор случайных чисел, мы получаем наблюдения для каждого прогона Монте-Карло $X_n^{(i)}$, $n \geq 1$ ($i = 1, \dots, N$, N — номер прогона Монте-Карло) согласно (18). Отношение правдоподобия, используемое в (8), (12), (16) в данном случае:

$$\mathcal{L}_n = \exp \left\{ \frac{\theta}{\sigma^2} X_n - \frac{\theta^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Отношение сигнал–шум определяется как $I = \theta^2/2\sigma^2$.

Для каждой симуляции Монте-Карло из (7), (13), (17) считается время остановки $T_A^{(i)}$, $\tilde{T}_B^{(i)}$, и $\hat{T}_C^{(i)}$ для 3 различных процедур: Ширяева, Ширяева–Робертса и КУСУМ, соответственно. Для каждого прогона ложная тревога, то есть $T_A^{(i)} < \nu_i$, используется для подсчета вероятности ложной тревоги (из (4))

$$\begin{aligned} \widehat{\text{PFA}}(T_A) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{T_A^{(i)} < \nu_i\}}, \\ \widehat{\text{PFA}}(\tilde{T}_B) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{\tilde{T}_B^{(i)} < \nu_i\}}, \\ \widehat{\text{PFA}}(\hat{T}_C) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{\hat{T}_C^{(i)} < \nu_i\}}. \end{aligned}$$

После чего делается оценка Монте-Карло средней задержки обнаружения (из (3))

$$\widehat{\text{ADD}}(T_A) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_A^{(i)} - \nu_i) \mathbb{1}_{\{T_A^{(i)} \geq \nu_i\}} \frac{1}{1 - \widehat{\text{PFA}}(T_A)},$$

$$\widehat{\text{ADD}}(\tilde{T}_B) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{T}_B^{(i)} - \nu_i) \mathbb{1}_{\{\tilde{T}_B^{(i)} \geq \nu_i\}} \frac{1}{1 - \widehat{\text{PFA}}(\tilde{T}_B)},$$

$$\widehat{\text{ADD}}(\hat{T}_C) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{T}_C^{(i)} - \nu_i) \mathbb{1}_{\{\hat{T}_C^{(i)} \geq \nu_i\}} \frac{1}{1 - \widehat{\text{PFA}}(\hat{T}_C)}.$$

Число прогонов Монте-Карло $N = \frac{1}{\Delta\alpha}$, где Δ — это точность, а α — ограничение для частоты возникновения ложных тревог.

Ниже, на рис. 2 показан принцип работы процедур обнаружения для соответствующего наблюдения в логарифмическом масштабе.

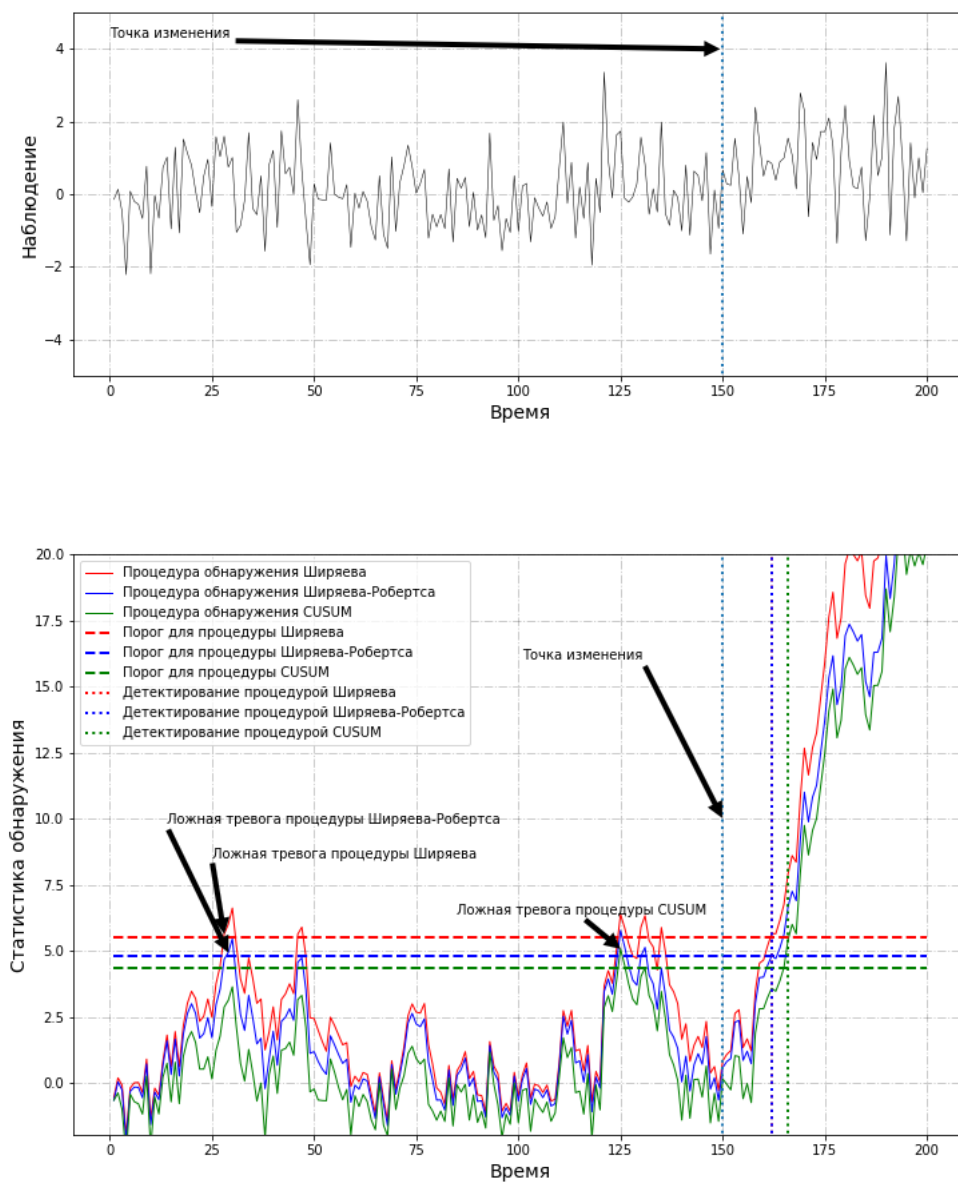


Рис. 2. Пример задачи о разладке

5. Определение характеристик процедур обнаружения гауссовского наблюдения

5.1. Получение интегральных соотношений

Основными характеристиками процедур обнаружения в байесовской постановке являются средняя задержка обнаружения (ADD) и вероятность ложной тревоги (PFA). Существуют способы определения обеих величин для различных процедур, в первую очередь, как функций порога. Ниже приведены численные методы для решения интегральных уравнений, полученных для перечисленных выше характеристик.

Ранее упомянутые определения времени останова удовлетворяют общему определению:

$$\tau_A^r = \inf\{n \geq 1 : R_n^r \geq A\}, \quad A > 0,$$

$$R_n^r = \Phi(R_{n-1}^r) \mathcal{L}_n, \quad n \geq 1, \quad R_0^r = r \geq 0,$$

$\Phi(R)$ — положительная функция. В частности из (7), (13), (17), для процедур Ширяева, Ширяева–Робертса и CUSUM $\Phi(R) = (1 + R)/(1 - \rho)$, $\Phi(R) = 1 + R$, $\Phi(R) = \max\{1, R\}$ соответственно.

Тартаковским и Мустакидисом были получены интегральные уравнения для интересующих нас характеристик [3].

Для $k \geq 0$ пусть $\delta_k(r) = E_k[(\tau_A^r - k)^+]$ и $\rho_k(r) = P_\infty(\tau_A^r > k)$. Тогда вероятность ложной тревоги есть

$$\text{PFA}(\tau_A^r) = (1 - q)(1 - \rho) \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho)^k p_k(r). \quad (19)$$

Аналогично для числителя $N(\tau_A^r)$ и знаменателя $D(\tau_A^r)$ для средней задержки обнаружения ($\text{ADD}(\tau_A^r)$):

$$N(\tau_A^r) = q\delta_0(r) + (1 - q)\rho \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho)^k \delta_k(r); \quad (20)$$

$$D(\tau_A^r) = q + (1 - q)\rho \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho)^k \rho_k(r). \quad (21)$$

Необходимо найти оценки для рядов

$$\psi_\rho(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho)^k \delta_k(r),$$

$$\chi_\rho(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho)^k \rho_k(r),$$

а также для средней длины пробега до обнаружения δ_0 . Используя Марковские свойства статистики, Тартаковский и Мустакидис получили следующие интегральные уравнения:

$$\delta_0(r) = 1 + \int_0^A \delta_0(x) \frac{\partial F_0\left(\frac{x}{\Phi(r)}\right)}{\partial x} dx, \quad (22)$$

$$\psi_\rho(r) = \delta_0(r) + (1 - \rho) \int_0^A \psi_\rho(x) \frac{\partial F_\infty\left(\frac{x}{\Phi(r)}\right)}{\partial x} dx, \quad (23)$$

$$\chi_\rho(r) = 1 + (1 - \rho) \int_0^A \chi_\rho(x) \frac{\partial F_\infty\left(\frac{x}{\Phi(r)}\right)}{\partial x} dx. \quad (24)$$

Используя решения уравнений (22), (23), (24), легко найти интересующие нас характеристики, подставив в (19) (20) и (21):

$$\text{PFA}(\tau_A^r) = (1 - q)(1 - \rho\chi_\rho(r)), \quad (25)$$

$$\text{ADD}(\tau_A^r) = \frac{q\delta_0(r) + (1 - q)\rho\psi_\rho(r)}{q + (1 - q)\rho\chi_\rho(r)}. \quad (26)$$

Численные решения интегральных уравнений

Полученные в предыдущем разделе уравнения (22), (23), (24) являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода. Так как большинство ядер, встречающихся в последовательном анализе, являются плохими, невозможно получить аналитическое решение. Однако существует много численных методов решений, один из которых метод коллокаций [4], который был применён Полунченко к решению некоторых задач [5]. Численные методы позволяют решить эти уравнения с достаточно хорошей точностью.

Уравнения (22), (23), (24) заменяются на линейные

$$\vec{\delta}_N = \vec{1} + K_0\vec{\delta}_N, \quad (27)$$

$$\vec{\psi}_N = \vec{\delta}_N + (1 - \rho)K_\infty\vec{\psi}_N, \quad (28)$$

$$\vec{\chi}_N = \vec{1} + (1 - \rho)K_\infty\vec{\chi}_N, \quad (29)$$

где ядро $K_d, d = 0, \infty$ — матрица размера N на N , каждый элемент которой

$$K_{i,j} = P\left(\mathcal{L} < \frac{x_j}{\Phi(r_i)}\right) - P\left(\mathcal{L} < \frac{x_{j-1}}{\Phi(r_i)}\right), i, j = 1, 2, \dots, N,$$

где P — это функция распределения нормального распределения. Согласно методу коллокаций используется разбиение $x_j = jA/N$, а $r_i = (x_i + x_{i-1})/2, i, j = 1, 2, \dots, N$.

Решив линейные уравнения (27), (28), (29), можно найти интересующие значения функций δ_N, ψ_N, χ_N , нужных нам для отыскания интересующих нас характеристик:

$$\delta_N(r) = \sum_{j=1}^N \delta_{j,N} \cdot \xi_j(r), \quad (30)$$

$$\xi_j(r) = \begin{cases} 1, & r \in [y_{j-1}; y_j] \\ 0, & \end{cases} \quad (31)$$

Аналогично (30) и (31) находим ψ_N и χ_N . После по формулам (25) и (26) находим вероятность ложной тревоги (PFA) и среднюю задержку обнаружения (ADD).

В таблицах с результатами средняя задержка обнаружения и вероятность ложной тревоги, полученные численным решением интегральных уравнений, обозначены как ADD_{num} и PFA_{num} .

5.2. Результаты компьютерного моделирования

Параметры симуляций.

- 1) Среднее после разладки $\theta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.
- 2) Параметры геометрического распределения: $q = 0; \rho = 0.5; 0.1; 0.01$.
- 3) Ограничивающая PFA $\alpha = 10^{-1}; 10^{-2}$.
- 4) Порог в процедуре Ширяева задается как $A = (1 - \alpha)/\alpha$, в процедуре Ширяева–Робертса и CUSUM — $B = (1 - \rho)/(\rho\alpha)$.

Таблицы с результатами

Процедура Ширяева				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	2.49	2.48	0.0494	0.0495
0.8	2.67	2.68	0.0560	0.0548
0.6	2.85	2.86	0.0592	0.0601
0.4	2.99	3.00	0.0657	0.0660
0.2	3.08	3.10	0.0716	0.0698
Процедура Ширяева–Робертса				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	2.62	2.58	0.050	0.049
0.8	2.85	2.78	0.057	0.056
0.6	3.06	3.02	0.062	0.059
0.4	3.22	3.14	0.067	0.066
0.2	3.24	3.16	0.069	0.070
Процедура КУСУМ				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	2.99	2.97	0.048	0.049
0.8	3.37	3.29	0.057	0.056
0.6	3.97	3.93	0.060	0.060
0.4	4.66	4.60	0.066	0.067
0.2	5.94	5.83	0.069	0.070

Таблица 8.1. $\rho = 0.5$ и $\alpha = 0.1$

Процедура Ширяева				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	4.31	4.29	0.00502	0.00505
0.8	4.81	4.79	0.00554	0.00561
0.6	5.31	5.30	0.00619	0.00621
0.4	5.75	5.74	0.00655	0.00683
0.2	6.03	6.03	0.00725	0.00736
Процедура Ширяева–Робертса				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	4.82	4.72	0.00475	0.00489
0.8	5.44	5.38	0.00547	0.00536
0.6	6.30	6.13	0.00612	0.00601
0.4	6.65	6.53	0.00644	0.00635
0.2	6.85	6.76	0.00704	0.00694
Процедура КУСУМ				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	5.41	5.38	0.00486	0.00485
0.8	6.56	6.59	0.00535	0.00524
0.6	8.12	8.24	0.00594	0.00594
0.4	10.68	10.82	0.00645	0.00641
0.2	14.41	14.78	0.00725	0.00716

Таблица 8.2. $\rho = 0.5$ и $\alpha = 0.01$

Процедура Ширяева				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	5.58	5.57	0.0602	0.0599
0.8	6.91	6.92	0.0696	0.0663
0.6	8.78	8.80	0.0735	0.0739
0.4	11.32	11.34	0.0781	0.0824
0.2	14.12	14.19	0.0920	0.0912
Процедура Ширяева–Робертса				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	5.61	5.60	0.0596	0.0593
0.8	6.84	6.84	0.0713	0.0700
0.6	8.95	8.85	0.0740	0.0750
0.4	11.91	11.80	0.0802	0.0793
0.2	14.99	14.91	0.0875	0.0884
Процедура КУСУМ				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	5.83	5.85	0.0599	0.0594
0.8	7.39	7.30	0.0688	0.0702
0.6	9.84	9.85	0.0755	0.0741
0.4	14.12	14.16	0.0798	0.0789
0.2	21.82	21.93	0.0865	0.0877

Таблица 8.3. $\rho = 0.1$ и $\alpha = 0.1$

Процедура Ширяева				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	9.32	9.32	0.00602	0.00581
0.8	12.18	12.20	0.00650	0.00645
0.6	16.47	16.52	0.00722	0.00723
0.4	23.07	22.99	0.00805	0.00813
0.2	31.03	31.08	0.00919	0.00908
Процедура Ширяева–Робертса				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	9.46	9.50	0.00567	0.00529
0.8	12.72	12.56	0.00628	0.00608
0.6	17.45	17.51	0.00642	0.00649
0.4	25.16	25.19	0.00788	0.00765
0.2	35.45	35.15	0.00901	0.00904
Процедура КУСУМ				
θ	ADD	ADD _{num}	PFA	PFA _{num}
1.0	9.69	9.85	0.00562	0.00533
0.8	13.10	13.07	0.00616	0.00626
0.6	18.82	18.83	0.00661	0.00635
0.4	29.34	29.05	0.00792	0.00779
0.2	52.91	52.95	0.00857	0.00856

Таблица 8.4. $\rho = 0.1$ и $\alpha = 0.01$

Процедура Ширяева				
θ	ADD_{MC}	ADD_{NUM}	PFA_{MC}	PFA_{NUM}
1.0	11.41	11.41	0.0589	0.0590
0.8	15.32	15.36	0.0671	0.0653
0.6	21.34	20.44	0.0733	0.0728
0.4	36.62	36.80	0.0829	0.0811
0.2	80.13	79.93	0.0901	0.0902
Процедура Ширяева–Робертса				
θ	ADD_{MC}	ADD_{NUM}	PFA_{MC}	PFA_{NUM}
1.0	11.45	11.35	0.0596	0.0605
0.8	14.21	14.23	0.0689	0.0680
0.6	21.25	21.22	0.0751	0.0760
0.4	36.54	36.66	0.0797	0.0796
0.2	77.98	77.90	0.0891	0.0887
Процедура КУСУМ				
θ	ADD_{MC}	ADD_{NUM}	PFA_{MC}	PFA_{NUM}
1.0	11.69	11.68	0.0567	0.0555
0.8	15.47	15.51	0.0669	0.0678
0.6	21.80	21.88	0.0742	0.0743
0.4	38.07	38.15	0.0805	0.0795
0.2	87.64	86.00	0.0881	0.0890

Таблица 8.5. $\rho = 0.01$ и $\alpha = 0.1$

6. Заключение

Было проведено сравнение нескольких правил обнаружения, которые имеют оптимальные или близкие к оптимальным свойства при различных критериях качества. Полученные характеристики представлены в табл. 8.1, табл. 8.2, табл. 8.3, табл. 8.4, табл. 8.5. Критерием качества для сравнения служила средняя задержка обнаружения при заданной средней вероятности ложной тревоги, когда правило обнаружения типа Ширяева является оптимальным при условии полностью известного априорного распределения момента разладки, что не является реальным предположением для большинства практических приложений. Было показано, что другая предложенная процедура обнаружения, не использующая априорное распределение, имеет почти такие же характеристики, как и строго оптимальная процедура Ширяева. Также было выявлено, что наиболее популярная процедура КУСУМ, которая почти всегда используется на практике, весьма сильно проигрывает и часто имеет весьма низкие характеристики. Результаты исследования очень полезны для большинства приложений, относящихся к задачам обнаружения случайно появляющихся сигналов от объектов в радиолокационных, сонарных и оптических системах, атак в компьютерных сетях, резких изменений в финансовых структурах, отказов оборудования.

Благодарю Тартаковского А.Г. за постановку задачи, помощь и советы, без которых эта работа не была бы выполнена. Работа выполнена в рамках совместного гранта РФФИ и Германии: Эффективные методы обнаружения аномалий в больших системах. RSF-DFG.

Литература

1. *Tartakovsky A.G., Nikiforov I.V., Basseville M.* Sequential Analysis Hypothesis Testing and Change-point Detection. Ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Boca Raton-London-New York: Chapman and Hall/CRC Press, 2014.

2. *Tartakovsky A.G.* On asymptotic optimality in sequential changepoint detection: Non-idd case // *IEEE Transactions on Information Theory*. 2017. V. 63, N 6. P. 3433–3450.
3. *Tartakovsky A.G., Moustakides G.V.* State-of-the-Art in Bayesian Changepoint Detection // *Sequential Analysis*. 2010. V. 29, N 2. P. 125–145.
4. *Petrovskii I.G.* Lectures on the Theory of Integral Equations. Graylock Press. Baltimore. MD, 1996.
5. *Polunchenko A.S.* Quickest change detection with applications to distributed Multi-Sensor Systems. Dissertation. 2009
6. *Blanding W.R., Willet P.K., Bar-Shalom Y.* Multisensor track management for targets with fluctuating SNR // *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*. 2009. V. 45, N 4. P. 1275–1292.

References

1. *Tartakovsky A.G., Nikiforov I.V., Basseville M.* Sequential Analysis Hypothesis Testing and Changepoint Detection. Ser. Monographs on Statistics and Applied Probability. Boca Raton-London-New York: Chapman and Hall/CRC Press, 2014.
2. *Tartakovsky A.G.* On asymptotic optimality in sequential changepoint detection: Non-idd case. *IEEE Transactions on Information Theory*. 2017. V. 63, N 6. P. 3433–3450.
3. *Tartakovsky A.G., Moustakides G.V.* State-of-the-Art in Bayesian Changepoint Detection. *Sequential Analysis*. 2010. V. 29, N 2. P. 125–145.
4. *Petrovskii I.G.* Lectures on the Theory of Integral Equations. Graylock Press. Baltimore. MD, 1996.
5. *Polunchenko A.S.* Quickest change detection with applications to distributed Multi-Sensor Systems. Dissertation. 2009
6. *Blanding W.R., Willet P.K., Bar-Shalom Y.* Multisensor track management for targets with fluctuating SNR. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*. 2009. V. 45, N 4. P. 1275–1292.

Поступила в редакцию 30.01.2020