Амелькин Н. И.

Элементы КАМ-теории

Движение любой механической системы описывается дифференциальными уравнениями. Если для соответствующей системы дифференциальных уравнений удается построить *общее решение* (такие системы называются интегрируемыми), то по этому решению определяются все свойства движений системы. Однако, примеры интегрируемых систем составляют только незначительную «горстку» из всего множества механических систем. В КАМ-теории исследуются свойства движений гамильтоновых систем, близких к интегрируемым.

1. **Интегрируемые гамильтоновы системы. Переменные действие–угол.**

Большинство методов интегрирования (точного и приближенного) уравнений движения гамильтоновых систем основаны на использовании канонических преобразований. Для задания канонических преобразований наиболее часто применяются два типа производящих функций. К первому типу относятся производящие функции $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$, задающие *свободные* канонические преобразования $\mathbf{q},\mathbf{p} \to \tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}}$ по формулам

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad \tilde{\mathbf{p}} = -\frac{\partial S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)}{\partial \tilde{\mathbf{q}}}; \quad \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \tilde{\mathbf{q}}^T}\right) \neq 0 \tag{1.1}$$

а ко второму типу – функции $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)$, которые задают каноническое преобразование формулами

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)}{\partial \tilde{\mathbf{p}}}; \quad \det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q} \partial \tilde{\mathbf{p}}^T}\right) \neq 0 \tag{1.2}$$

Необходимость использования второго из указанных типов производящих функций обусловлена тем, что не все преобразования являются свободными, например, тождественное преобразование таковым не является. В теории возмущений используются преобразования, близкие к тождественным. Если их задавать формулами (1), они будут близки к вырожденным, в то время как эти же преобразования, определяемые производящей функцией $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)$ по формулам (2), таких особенностей не имеют.

Система дифференциальных уравнений называется *интегрируемой в квадратурах*, если построение ее общего решения сводится к вычислению производных и интегралов от известных функций и к обращению функций.

Для гамильтоновой системы с n степенями свободы, заданной гамильтонианом $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$, достаточные условия интегрируемости даются теоремой Лиувилля [1-3]:

Если система имеет n *независимых первых интегралов*

$$f_k(\mathbf{q},\mathbf{p},t)=\alpha_k; \quad k=1,\ldots,n \tag{1.3}$$

в инволюции, т.е.

$$(f_k, f_j)=0; \quad k,j=1,\ldots,n \tag{1.4}$$

то она интегрируется в квадратурах.

При выполнении условий этой теоремы процедура построения общего решения состоит в следующем. В предположении, что первые интегралы (1.3) разрешимы относительно импульсов, т.е. представимы в виде

$$\mathbf{p}=\mathbf{F}(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t) \tag{1.3*}$$

полный интеграл $S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)$ уравнения Гамильтона-Якоби

$$H(\mathbf{q},\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}},t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{1.5}$$

определяется формулой [1]

$$\begin{gathered} S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)=\int_0^1[\mathbf{q}^T\mathbf{F}(\lambda\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)-tH^*(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},\lambda t)]d\lambda \\ H^*(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)=H(\mathbf{q},\mathbf{F}(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t),t) \end{gathered} \tag{1.6}$$

После вычисления функции $S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)$ общее решение в исходных переменных $\mathbf{q}=\mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$, $\mathbf{p}=\mathbf{p}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$ находится из системы уравнений

$$\mathbf{p}=\frac{\partial S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)}{\partial \mathbf{q}}, \quad \boldsymbol{\beta}=\frac{\partial S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \tag{1.7}$$

Здесь $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ – n- мерные векторы произвольных постоянных. Функцию $S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t)$ можно трактовать как производящую функцию унивалентного канонического преобразования $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \to (\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}})$, в результате которого гамильтониан $\tilde{H} = H + \partial S/\partial t$ в новых переменных $\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}}$ становится тождественно равным нулю. Новые переменные можно трактовать двояко:

1) $\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\alpha}$, $\tilde{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\beta}$; 2) $\tilde{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\alpha}$, $\tilde{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\beta}$

В случае 1) преобразование задается функцией $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{q}},t)$ по формулам (1), а в случае 2) – функцией $S(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}},t)$ по формулам (2).

Если гамильтонова система автономна, то гамильтониан системы является ее первым интегралом, т.е. $H(\mathbf{q},\mathbf{p}) = h = const$, и полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби представляется в виде

$$S(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha},t) = -h(\boldsymbol{\alpha})t + V(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha}) \tag{1.8}$$

Функция $V(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha})$ в этом случае называется *характеристической функцией* Гамильтона. Она представляет собой производящую функцию $V(\mathbf{q},\tilde{\mathbf{p}})$ канонического преобразования, приводящего гамильтониан в новых переменных к виду $\tilde{H}(\tilde{\mathbf{q}},\tilde{\mathbf{p}}) = \tilde{H}(\tilde{\mathbf{p}}) = h(\boldsymbol{\alpha}) = const$. Общее решение в исходных переменных находится из системы

$$\mathbf{p} = \frac{\partial V(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha})}{\partial \mathbf{q}}, \quad \tilde{\mathbf{q}} = \frac{\partial V(\mathbf{q},\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial h(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} t + \boldsymbol{\beta} \tag{1.9}$$

При этом сначала из второй группы уравнений находится $\mathbf{q}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$, а затем после подстановки в первую группу определяется $\mathbf{p}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},t)$. В новых переменных импульсы $\tilde{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\alpha}$ постоянны, а координаты $\tilde{\mathbf{q}}$ являются линейными функциями времени.

При движении *автономной* интегрируемой по Лиувиллю системы фазовые переменные принадлежат n- мерному многообразию $M_{\mathbf{f}}$, определяемому первыми интегралами $f_k(\mathbf{q},\mathbf{p}) = \alpha_k$; $k = 1,\dots,n$. Если это многообразие является компактным (представляет собой ограниченное замкнутое множество), то каждая связная компонента этого многообразия *диф-*

феоморфна n- мерному тору [4] (*два многообразия* M *и* N *называются диффеоморфными, если одно в другое переводится непрерывно дифференцируемым взаимно однозначным отображением* $M = f(N)$). Это означает, что многообразие можно записать в параметрической форме

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}(\alpha_1,...\alpha_n,\theta_1,...,\theta_n),\quad \mathbf{p}=\mathbf{p}(\alpha_1,...\alpha_n,\theta_1,...,\theta_n) \tag{1.10}$$

где зависимость от параметров $\theta_1,...,\theta_n$ является 2π- периодической по каждому θ_k, и существует такое гладкое отображение $(\mathbf{q},\mathbf{p})\to(\mathbf{x},\mathbf{y})$, что в переменных $\mathbf{x},\mathbf{y}$ уравнения (1.10) принимают вид уравнений n- мерного тора:

$$x_k = x_k(\alpha_1,...\alpha_n,\theta_k),\quad y_k = y_k(\alpha_1,...\alpha_n,\theta_k);\ \ k=1,...,n \tag{1.10*}$$

Удобным средством параметризации многообразия $M_{\mathbf{f}}$ в виде (1.10) и исследования интегрируемых, а также близких к интегрируемым, систем являются переменные **«действие-угол»** (I_k,φ_k) (I_k – действия, φ_k – углы). Эти переменные вводятся в предположении, что совместные уровни первых интегралов $f_k(\mathbf{q},\mathbf{p})=\alpha_k;\ k=1,...,n$ компактны, и удовлетворяют следующим свойствам:

1) (I_k,φ_k) – канонические переменные, т.е. $\dot{I}_k=-\partial H/\partial\varphi_k$, $\dot{\varphi}_k=\partial H/\partial I_k$.

2) $\tilde{H}=\tilde{H}(\mathbf{I})$, т.е. действия I_k – первые интегралы системы.

3) Исходные переменные $\mathbf{q},\mathbf{p}$ – 2π- периодические функции по каждому φ_k.

Процедуру введения переменных «действие-угол» продемонстрируем на примере гамильтоновой системы, допускающей разделение переменных, а именно, для случая, когда гамильтониан имеет вид

$$H=H(f_1(q_1,p_1),\ f_2(q_2,p_2),...,\ f_n(q_n,p_n))$$

В этом случае система имеет n первых интегралов

$$f_k(q_k,p_k)=\alpha_k;\ \ k=1,...,n \tag{1.11}$$

в инволюции, а уравнения движения разделяются на n независимых пар уравнений

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \varphi_k(q_k, p_k, \boldsymbol{\alpha}), \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = \psi_k(q_k, p_k, \boldsymbol{\alpha})$$

Если многообразие $M_{\mathbf{f}}$ компактно, то линии уровня каждого из первых интегралов $f_k(q_k, p_k) = \alpha_k$ представляют собой замкнутые кривые γ_k, а движение по каждой паре сопряженных переменных q_k, p_k представляет собой периодические колебания. Далее предполагается, уравнения (1.11) разрешимы относительно импульсов, т.е. представимы в виде

$$p_k = F_k(\alpha_k, q_k); \; k = 1, \ldots, n \tag{1.11*}$$

В переменных «действие-угол» каждая из указанных замкнутых кривых характеризуется некоторым постоянным значением «действия» I_k и угловой переменной φ_k, причем так, что зависимости $q_k(I_k, \varphi_k)$, $p_k(I_k, \varphi_k)$ являются 2π - периодическими по φ_k. Преобразование к этим переменным ищем в классе канонических преобразований, определяемых производящей функцией $V(\mathbf{q}, \mathbf{I})$ по формулам

$$p_k = \frac{\partial V(\mathbf{q}, \mathbf{I})}{\partial q_k}, \quad \varphi_k = \frac{\partial V(\mathbf{q}, \mathbf{I})}{\partial I_k} \tag{1.12}$$

За полный цикл колебаний в плоскости q_k, p_k приращение угла φ_k должно составлять 2π. Учитывая, что на каждой кривой γ_k «действия» I_k фиксированы, получим

$$\oint_{\gamma_k} d\varphi_k = \oint_{\gamma_k} \frac{\partial^2 V(\mathbf{q}, \mathbf{I})}{\partial q_k \partial I_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial I_k} \oint_{\gamma_k} \frac{\partial V(\mathbf{q}, \mathbf{I})}{\partial q_k} dq_k = \frac{\partial}{\partial I_k} \oint_{\gamma_k} p_k dq_k = 2\pi$$

Отсюда следует, что переменные «действия» можно ввести формулами

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k} p_k dq_k = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_k} F_k(q_k, \alpha_k) dq_k \tag{1.13}$$

т.е. I_k есть среднее значение $p_k dq_k$ за один полный цикл колебаний и представляет собой поделенную на 2π площадь области, ограниченной замкнутой кривой γ_k.

Вычислив интеграл (1.13), найдем зависимость постоянных α_k от I_k:

$$I_k = I_k(\alpha_k) \;\Rightarrow\; \alpha_k = \alpha_k(I_k) \tag{1.14}$$

Определив далее производящую функцию V формулой

$$V(\mathbf{q},\mathbf{I}) = \sum_{k=1}^{n} \int F_k[q_k, \alpha_k(I_k)]dq_k \tag{1.15}$$

получим каноническое преобразование $(\mathbf{q},\mathbf{p}) \to (\varphi,\mathbf{I})$ с требуемыми свойствами. Действительно, уравнения $p_k = \partial V / \partial q_k$ тождественно совпадают с уравнениями (11*), изменение переменной φ_k за один полный цикл колебаний по каждой паре сопряженных переменных q_k, p_k равно 2π, а гамильтониан системы приводится к виду

$$\tilde{H} = \tilde{H}(\mathbf{I}) = H[\alpha_1(I_1), \alpha_2(I_2), ..., \alpha_n(I_n)] \tag{1.16}$$

Из уравнений Гамильтона получаем

$$I_k = const, \; \varphi_k = \omega_k t + \varphi_{k0}$$

т.е. переменные I_k постоянны, а угловые переменные φ_k – линейные функции времени. Коэффициенты

$$\omega_k = \partial H[\alpha_1(I_1), \alpha_2(I_2), ..., \alpha_n(I_n)] / \partial I_k ; \; k = 1, ..., n \tag{1.17}$$

зависят только от значений переменных «действие» и называются *частотами* периодического движения на k-ом цикле.

В рассмотренном случае многообразие, определяемое первыми интегралами (1.11), описывается уравнениями n-мерного тора следующим образом: $x_k = I_k \sin \varphi_k$, $y_k = I_k \cos \varphi_k$; $k = 1, ..., n$. Отметим, что переменные x_k, y_k каноническими не являются.

Таким образом, фазовое пространство автономной интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системы в случае компактного многообразия уровня первых интегралов расслоено n- мерными *инвариантными* торами (*инвариантным множеством динамической системы называется множество, в котором фазовая траектория, стартующая из любой точки этого множества, остается бесконечно долго*). Каждый такой тор характеризуется своим значением вектора действий $\mathbf{I}$ и вектора частот $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})$. Каждая траектория в фазовом пространстве, начавшись на некотором торе, в дальнейшем сойти с него не может (в этом случае говорят, что траектория представляет собой обмотку тора). Если существует такой не равный нулю целочисленный n - мерный вектор $\mathbf{k}\in Z^n$, что

$$\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega}=k_1\omega_1+k_2\omega_2+...+k_n\omega_n=0 \tag{1.18}$$

то тор называется *резонансным*, а движения на этом торе являются периодическими. Если же равенство (1.18) не выполняется ни при каких ненулевых значениях $\mathbf{k}\in Z^n$, то тор называется нерезонасным, а движение называется условно периодическим (квазипериодическим). В этом случае каждая траектория всюду плотно обматывает тор.

В качестве конкретного примера приведем процедуру введения переменных действие угол для гармонического осциллятора с частотой Ω. Имеем

$$H=\frac{p^2}{2}+\frac{\Omega^2q^2}{2}=h \qquad \Rightarrow \quad p=\pm\sqrt{2h-\Omega^2q^2}$$

Используя замену $q=\sqrt{\dfrac{2h}{\Omega^2}}\sin x$, получим

$$I=\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_h}pdq=\frac{1}{2\pi}\frac{2h}{\Omega}\int_0^{2\pi}\cos^2 xdx=\frac{h}{\Omega} \qquad \Rightarrow h=I\Omega$$

Согласно (15) производящая функция преобразования имеет вид

$$V=\pm\int\sqrt{2I\Omega-\Omega^2q^2}dq$$

Для угловой переменной получаем выражение

$$\varphi=\frac{\partial V}{\partial I}=\pm\int\frac{\Omega dq}{\sqrt{2I\Omega-\Omega^2q^2}}=\pm\int\frac{dq}{\sqrt{2I/\Omega-q^2}}=\arcsin\sqrt{\frac{\Omega}{2I}}q$$

Отсюда следуют формулы преобразования к переменным действие–угол:

$$q=\sqrt{\frac{2I}{\Omega}}\sin\varphi, \qquad p=\sqrt{2I\Omega}\cos\varphi$$

Гамильтониан осциллятора в переменных действие–угол принимает вид $\tilde{H}=I\Omega$, а из уравнений Гамильтона следует

$I = const, \quad \varphi = \Omega t + \varphi_0$

В исходных переменных q, p многообразие, определяемое первым интегралом осциллятора, представляет собой эллипс, в переменных действие–угол I, φ – прямую линию, а в переменных $x = I\sin\varphi$, $y = I\cos\varphi$ – окружность (одномерный тор).

Примеры введения переменных действие–угол для других систем (для маятника, для задачи двух тел и др.) приведены в [3].

2. Теория возмущений. Проблема малых знаменателей.

Рассматривается гамильтонова система, близкая к точно интегрируемой по Лиувиллю, гамильтониан которой записывается в виде

$$H(\mathbf{I},\varphi,\varepsilon) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I},\varphi) + \varepsilon^2 H_2(\mathbf{I},\varphi) + \ldots \tag{2.1}$$

Здесь ε - малый параметр, $\mathbf{I},\varphi$ – переменные действие–угол для невозмущенной системы с гамильтонианом $H_0(\mathbf{I})$. Возмущениями называются слагаемые в (2.1), исчезающие вместе с ε. Предполагается, что эти слагаемые 2π - периодические по всем угловым переменным φ_j.

Ставится задача найти такую каноническую замену переменных $(\mathbf{I},\varphi) \to (\mathbf{J},\boldsymbol{\psi})$, чтобы в новых переменных гамильтониан не зависел от $\boldsymbol{\psi}$, т.е. имел вид

$$\tilde{H} = \tilde{H}(\mathbf{J},\varepsilon) = \tilde{H}_0(\mathbf{J}) + \varepsilon \tilde{H}_1(\mathbf{J}) + \varepsilon^2 \tilde{H}_2(\mathbf{J}) + \ldots \tag{2.2}$$

Тогда в новых переменных система будет интегрируемой, а закон движения в исходных переменных можно получить, обратив найденное каноническое преобразование.

Производящую функцию искомого преобразования $V(\varphi,\mathbf{J},\varepsilon)$ ищем в виде ряда

$$V(\varphi,\mathbf{J},\varepsilon) = \varphi^T \mathbf{J} + \varepsilon V_1(\varphi,\mathbf{J}) + \varepsilon^2 V_2(\varphi,\mathbf{J}) + \ldots \tag{2.3}$$

Первое слагаемое в этом выражении $V_0=\varphi^T\mathbf{J}$ есть производящая функция тождественного преобразования, так что преобразование, определяемое функцией (2.3), будет близким к тождественному.

Искомое преобразование неявно определяется формулами

$$\mathbf{I}=\frac{\partial V}{\partial\varphi}=J+\varepsilon\frac{\partial V_1(\varphi,\mathbf{J})}{\partial\varphi}+\ldots, \qquad \boldsymbol{\psi}=\frac{\partial V}{\partial\mathbf{J}}=\varphi+\varepsilon\frac{\partial V_1(\varphi,\mathbf{J})}{\partial\mathbf{J}}+\ldots \tag{2.4}$$

а функция $V(\varphi,\mathbf{J},\varepsilon)$ удовлетворяет уравнению

$$H\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi},\varphi,\varepsilon\right)=\tilde{H}(\mathbf{J},\varepsilon) \tag{2.5}$$

Раскладывая в ряды и приравнивая в левой и правой частях (2.5) члены одинакового порядка по ε, получим

$$H_0(\mathbf{J})=\tilde{H}_0(\mathbf{J})$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial\mathbf{J}^T}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}+H_1(\mathbf{J},\varphi)=\tilde{H}_1(\mathbf{J}) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial\mathbf{J}^T}\frac{\partial V_2}{\partial\varphi}+\frac{1}{2}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi^T}\frac{\partial^2 H_0}{\partial\mathbf{J}\partial\mathbf{J}^T}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}+\frac{\partial H_1}{\partial\mathbf{J}^T}\frac{\partial V_1}{\partial\varphi}+H_2(\mathbf{J},\varphi)=\tilde{H}_2(\mathbf{J})$$

$$\ldots$$

Из системы (2.6) можно последовательно найти все слагаемые V_k производящей функции V. Опишем процедуру определения функции V_1. Учитывая периодичность H_1 по угловым переменным φ_k с периодом 2π, разложим эту функция в ряд Фурье

$$H_1(\mathbf{J},\varphi)=\sum_{\mathbf{k}\in Z^n}H_1^{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\varphi)$$

Здесь $\mathbf{k}$ – целочисленный вектор размерности n, точкой обозначено скалярное произведение. Решение для V_1 тоже будем искать в виде ряда Фурье

$$V_1(\mathbf{J},\varphi)=\sum_{\mathbf{k}\in Z^n}V_1^{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\varphi)$$

Подставляя эти выражения в (2.6), получим

$$\sum_{\mathbf{k}\in Z^n}(i\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}V_1^{\mathbf{k}}+H_1^{\mathbf{k}})\exp(i\mathbf{k}\cdot\varphi)=\tilde{H}_1(\mathbf{J})$$

Отсюда находим

$$H_1^0=\tilde{H}_1(\mathbf{J});\quad (\mathbf{k}=0) \tag{2.7}$$

$$V_1^{\mathbf{k}}=-\frac{H_1^{\mathbf{k}}}{i(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k})};\quad \mathbf{k}\neq\mathbf{0} \tag{2.8}$$

Из (2.7) следует, что $\tilde{H}_1(\mathbf{J})$ представляет собой среднее значение $H_1(\mathbf{J},\varphi)$ по всем угловым переменным $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$. В свою очередь, из (2.8) следует, что функция V_1 не определена на резонансных поверхностях (1.18). Это же касается и всех других слагаемых V_j, $j=2,\ldots$ функции V, поскольку они удовлетворяют аналогичным уравнениям

$$\boldsymbol{\omega}_0\cdot\frac{\partial V_j}{\partial\varphi}+F_j(\mathbf{J},\varphi)=\tilde{H}_j(\mathbf{J})$$

Оказывается, что в типичной ситуации резонансы (1.8) образуют в пространстве R^n (n-мерном пространстве частот $\boldsymbol{\omega}$) всюду плотное множество, откуда следует, что производящая функция $V(\mathbf{J},\varphi)$ не определена нигде в R^n. В этом и состоит *проблема малых знаменателей*. Наличие этой проблемы свидетельствует о том, что при типичном возмущении не существует канонического преобразования, приводящего гамильтониан системы к виду $\tilde{H}=\tilde{H}(\mathbf{J},\varepsilon)$, т.е. *об отсутствии глобальной интегрируемости возмущенной системы*.

Однако, отсутствие глобальной интегрируемости (интегрируемости при любых начальных условиях) не означает отсутствия локальной интегрируемости (частных случаев интегрируемости, соответствующих специальным начальным условиям). Резонансы (1.18) хотя и образуют в пространстве R^n всюду плотное множество, мера этого множества равна нулю [4]. Поэтому представляет интерес изучение вопроса о наличии интегрируемых движений возмущенной системы. Эти и другие смежные задачи о свойствах движений гамильтоновых систем, близких к интегрируемым, составляют предмет теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ-теории).

3. КАМ-теорема.

В формулировке основной теоремы КАМ-теории используются следующие определения *диофантовости* (сильной нерезонансности) и *невырожденности*:

Определение 3.1. *Вектор частот* $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I})$ *невозмущенной системы* $H_0(\mathbf{I})$ *называется диофантовым, если существуют постоянные* $c, \gamma > 0$, *такие, что*

$$\left|\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{k}\right| \geq \frac{c}{\left|\mathbf{k}\right|^{\gamma}} \quad \text{для всех ненулевых } \mathbf{k}\in Z^n \tag{3.1}$$

Определение 3.2. *Невозмущенная система* $H_0(\mathbf{I})$ *невырождена на торе* $T^n(\mathbf{I})$, *если*

$$\det\left(\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\mathbf{I}^T}\right) = \det\left(\frac{\partial^2 H_0(\mathbf{I})}{\partial\mathbf{I}\partial\mathbf{I}^T}\right) \neq 0 \tag{3.2}$$

Условие (3.2) означает, что для невозмущенной системы в окрестности инвариантного тора с вектором частот $\boldsymbol{\omega}^0(\mathbf{I}^0)$ существует инвариантный тор с любым, близким к $\boldsymbol{\omega}^0$, вектором частот $\boldsymbol{\omega}^0 + d\boldsymbol{\omega}$.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{I}^0$ *- вектор переменных действия, такой что*

1) *вектор частот* $\boldsymbol{\omega}^0(\mathbf{I}^0)$ *невозмущенной системы диофантов,*

2) *невозмущенная система* $H_0(\mathbf{I})$ *невырождена на торе* $T^n(\mathbf{I}^0)$,

3) *функция Гамильтона возмущенной системы* $H = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I},\varphi,\varepsilon)$ *аналитична.*

Тогда при достаточно малом значении ε *для возмущенной системы существует инвариантный тор, несущий квазипериодические движения с теми же частотами* $\boldsymbol{\omega}^0$, *что и тор* $T^n(\mathbf{I}^0)$ *невозмущенной системы.*

Иногда утверждение теоремы дается в такой формулировке: *инвариантный тор* $T^n(\mathbf{I}^0)$ *невозмущенной системы с диофантовыми частотами* $\boldsymbol{\omega}^0$ (3.1) *не исчезает при достаточно малом возмущении, а лишь слегка деформируется*.

Инвариантные торы возмущенной системы, несущие нерезонансные движения, обычно называют *КАМ-торами*.

Неавтономный вариант КАМ-теоремы. Здесь рассматривается возмущенная система с функцией Гамильтона

$$H = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \varphi, t, \varepsilon) \tag{3.3}$$

где $\mathbf{I}, \varphi$ – канонические переменные действие–угол для невозмущенной системы, а зависимость H_1 от времени t, как и от φ, является 2π - периодической. Неавтономные гамильтоновы системы, в которых зависимость гамильтониана от времени является периодической, называются системами с $n+1/2$ степенями свободы. Добавляя к уравнениям Гамильтона такой системы уравнение $\dot{t}=1$, получаем автономную систему из $(2n+1)$-го уравнения, в которой время t трактуется как дополнительная координата.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{I}^0$ - *вектор переменных действия, такой что*

1) *вектор частот* $\overline{\boldsymbol{\omega}}^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}^0(\mathbf{I}^0) \\ 1 \end{pmatrix}$ *диофантов,*

2) *невозмущенная система* $H_0(\mathbf{I})$ *невырождена на торе* $T^n(\mathbf{I}^0)$,

3) *функция Гамильтона возмущенной системы* (3.3) *аналитична.*

Тогда при достаточно малом значении ε *для возмущенной системы существует инвариантный тор, несущий квазипериодические движения с теми же частотами* $\overline{\boldsymbol{\omega}}^0$, *что и тор* $T^n(\mathbf{I}^0)$ *невозмущенной системы.*

Изоэнергетический вариант КАМ-теоремы. В этой теореме доказывается наличие инвариантных торов для возмущенной автономной системы на многообразиях с фиксированным уровнем энергии.

Теорема. Пусть инвариантный тор $T^n(\mathbf{I}^0)$ невозмущенной системы лежит на уровне энергии $H_0 = h$ и выполнены следующие условия:

(1) Частоты $\boldsymbol{\omega}^0(\mathbf{I}^0)$ *- диофантовы,*

(2) *невозмущенная система изоэнергетически невырождена на этом торе*, т.е.

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial\mathbf{I}^T} & \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega}^T & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 H_0(\mathbf{I})}{\partial\mathbf{I}\partial\mathbf{I}^T} & \dfrac{\partial H_0(\mathbf{I})}{\partial\mathbf{I}} \\ \dfrac{\partial H_0(\mathbf{I})}{\partial\mathbf{I}^T} & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{\mathbf{I}^0} \neq 0 \ , \tag{3.4}$$

(3) *функция* $H = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I},\varphi,\varepsilon)$ *аналитична.*

Тогда на уровне энергии $H = h$ *в возмущенной системе имеется инвариантный тор, близкий к исходному. Частоты на этом торе задаются вектором* $\boldsymbol{\omega} = \lambda\boldsymbol{\omega}^0(\mathbf{I}^0)$*, где* $\lambda = 1 + O(\varepsilon)$.

Условие (3.4) означает, что для близких друг к другу инвариантных торов невозмущенной системы, соответствующих одному и тому же уровню энергии, векторы частот разные, а именно, если векторы действий на торах отличаются на $d\mathbf{I}$, то разность между частотами определяется выражением $d\boldsymbol{\omega} = \mathbf{D}d\mathbf{I} + O(d\mathbf{I})^2$, где $\mathbf{D}$ – невырожденная матрица (здесь $d\mathbf{I}$ – $(n-1)$ - мерный вектор, удовлетворяющий уравнению $dH_0 = \dfrac{\partial H_0}{\partial\mathbf{I}^T} d\mathbf{I} = 0$, а $\mathbf{D}$ – матрица размера $(n-1)\times(n-1)$.

При малых значениях параметра ε КАМ-теорема гарантирует существование большого числа квазипериодических (интегрируемых) движений. Какие из инвариантных торов невозмущенной системы с диофантовыми частотами заведомо сохраняются и для возмущенной системы, зависит от величины возмущения. КАМ-теорема утверждает, что вероятностная мера Лебега инвариантных торов возмущенной системы отлична от нуля, причем эта мера растет с уменьшением ε и в пределе при $\varepsilon \to 0$

стремится к 1. Это означает, что вероятность того, что фазовая траектория принадлежит КАМ-тору в пределе малых возмущений близка к 1.

Присутствие инвариантных торов в фазовом пространстве слабо возмущенной системы означает, что для большинства начальных условий движение остается условно периодическим. Но с ростом возмущения число сохраняющихся инвариантных торов уменьшается, причем прежде всего «разрушаются» резонансные и близкие к резонансным торы. В фазовом пространстве возмущенной системы между инвариантными торами образуются «щели», в которых траектории системы уже не будут квазипериодическими (регулярными), а могут иметь хаотический характер. Если возмущение достаточно велико, то инвариантных торов может вообще не остаться и это может быть одной из причин возникновения в системе *глобального хаоса* [7] .

В гамильтоновой системе с двумя степенями свободы каждый КАМ-тор разделяет фазовое пространство на две несвязные части. Фазовые траектории не могут перейти из области на одной стороне тора в область на другой стороне, поскольку траектория, начавшись на инвариантном КАМ-торе, никогда его не покинет. Поэтому траектория, начавшаяся в щели между двумя инвариантными КАМ-торами возмущенной системы, остается «запертой» между этими торами, т.е. не выходит из этой щели, а переменные действия вечно остаются вблизи своих первоначальных значений.

Если же число степеней свободы возмущенной гамильтоновой системы $n>2$, то КАМ-торы уже не обладают подобным «изолирующим» свойством. В этом случае щели, отвечающие различным резонансам, соединяются друг с другом, и траектории могут демонстрировать «слалом» среди КАМ-торов и «диффундировать», в принципе, повсюду, т.е. нельзя гарантировать, что переменные действия вдоль таких траекторий будут оставаться близкими к своим начальным значениям с течением времени. Однако, в имеющихся примерах средняя скорость ухода переменных действие оценивается величиной порядка $\exp(-1/\sqrt{\varepsilon})$, т.е. «слалом» в окрестности инвариантных торов возмущенной системы является экспоненциально медленным. Так что и в системах с более чем двумя степенями свободы КАМ-торы, если они достаточно плотны (при малых ε), могут сохранять свою роль в качестве барьеров для диффузии в фазовом пространстве, т.е. существенное изменение переменных действия в таких случаях возможно только по истечении экстремально долгих интервалов времени.

Эффективным средством исследованиям динамики гамильтоновых систем с двумя степенями свободы является метод *сечений Пуанкаре*. Суть этого метода состоит в следующем. Пусть система задается гамильтонианом $H = H(p_1, p_2, q_1, q_2)$. Ограничимся исследованием траекторий, соответствующих фиксированному уровню энергии $H = C$, и выберем двумерную поверхность Σ, трансверсальную большинству этих траекторий. Эту поверхность можно задать, например, условием $q_2 = 0$. Тогда по значениям p_1, q_1 и C определяются и значения переменной p_2 на поверхности $q_2 = 0$. Далее, задав на выбранной поверхности начальную точку p_1^0, q_1^0 и интегрируя уравнения Гамильтона, находим значения p_1^k, q_1^k, соответствующие последовательным пересечениям траекторией поверхности Σ. Таким образом, исследование динамики системы дифференциальных уравнений четвертого порядка сводится к задаче исследования динамики двумерной дискретной системы, которая описывается отображением Пуанкаре $p_1^k, q_1^k \to p_1^{k+1}, q_1^{k+1}$ ($k = 0,1,2,\ldots$).

Если выбранная траектория лежит на КАМ-торе (который характеризуется иррациональным отношением частот ω_1/ω_2), то эта траектория всюду плотно покрывает этот тор и на поверхности сечения Σ это проявляется в том, что последовательность точек p_1^k, q_1^k будет ложиться на одномерную гладкую кривую, определяемую пересечением этого тора с поверхностью сечения (если процедуру вычисления сечения Пуанкаре продолжать достаточно долго, то точки p_1^k, q_1^k сливаются в сплошную гладкую кривую). Если же траектория возмущенной системы не лежит на КАМ-торе (фазовые траектории находятся в «щели» между соседними КАМ-торами), на поверхности сечения Σ точки p_1^k, q_1^k образуют «распыленное облако», которое не соединяется гладкой кривой, и которое может свидетельствовать о хаотическом поведении системы.

Таким образом, с помощью метода сечений Пуанкаре возможно выявить наличие у системы регулярных (интегрируемых квазипериодических движений) и нерегулярных (хаотических) движений.

Следует отметить, что практическая реализация метода сечений Пуанкаре в большинстве случаев требует численного интегрирования уравнений Гамильтона *на больших интервалах времени*. Накапливающиеся при этом неизбежные ошибки численного интегрирования могут приводить к несохранению инвариантов системы, и в таких случаях правильные выводы о свойствах системы на основе полученной (искаженной) картинки для сечения Пуанкаре сделать затруднительно. Для решения этой проблемы применяют специализированные методы численного интегрирования уравнений Гамильтона.

Отметим также, что до сих пор в литературе нет четкого общепринятого определения понятия «хаос в динамических системах». Чаще всего под этим понятием подразумевается совокупность признаков, среди которых помимо эргодических свойств системы (фазовая траектория «посещает» любую достаточно малую область многообразия фазового пространства, определяемого первыми интегралами) неотъемлемыми атрибутами хаоса являются *экспоненциальная неустойчивость и перемешивание*. Подробнее см. [5-8].

С примерами применения КАМ-теории к конкретным задачам можно ознакомиться в [4-8].

Литература:

1. *Амелькин Н.И.* Лагранжева и гамильтонова механика. – М.: МФТИ, 2014. – 112 с.
2. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. – М.: Физматлит, 2008. – 304 с.
3. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1990. – 416 с.
4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 432 с.
5. *Трещев Д.В.* Гамильтонова механика. – М.: МИАН, 2006. – 64 с.
6. *Лоскутов А.Ю.* Динамический хаос. Системы классической механики. // Успехи физических наук. 2007. Т. 177. №9. С. 989–1015.
7. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 331 с.
8. *Морбиделли А.* Современная небесная механика. Аспекты динамики солнечной системы. – М. - Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2014. – 432 с.