УДК 517.98

М. Х. Нуман Эльшейх[1], *В. Ж. Сакбаев*[2]

[1]Российский университет дружбы народов
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

Операторы Лапласа для уравнения Шредингера на графах

Рассматриваются операторы Лапласа на графах с конечным или счетным числом рёбер. В частности, получено описание самосопряженных расширений симметрического оператора Шредингера, изначально заданного на гладких финитных функциях, носитель которых не содержит точек ветвления графа. В работе получены результаты для графов с одной вершиной, графов с несколькими вершинами и графов с одной вершиной и со счетным множеством лучей.

1. Введение

Дифференциальные операторы на графах и других разветвленных многообразиях имеют применения к описанию ряда процессов в квантовой механике и биологии. Основы теории дифференциальных уравнений на графах изложены в монографии [3], в которой приведен ряд примеров физических задач, приводящих к исследованию дифференциальных операторов на графах. В работах [4,9,10] изучены спектральные свойства таких операторов и исследованы динамические свойства эволюции, определяемых уравнением Шредингера на графе. В работах [1, 6, 8, 11] исследуется множество самосопряженных расширений оператора Шредингера, заданного изначально на пространстве финитных гладких функций, не содержащих точек ветвления графа ([6, 8, 11]) или точек смены типа оператора (см. [1]). В статье [8] найдены аппроксимации формулами Фейнмана унитарных полугрупп, задаваемых некоторыми из самосопряженных расширений. В статье рассматриваются операторы Лапласа на графах с конечным или счетным числом рёбер. Работа является продолжением исследований [8], в которых изучался граф с конечным множеством рёбер.

Актуальность рассматриваемой задачи состоит в том, что в последнее время значительно усилился интерес к описанию динамики частиц на графах, дендритах и иных разветвленных многообразиях со стороны математической физики и квантовой механики. С математической точки зрения операция дифференцирования функции, однозначно определенная для функций, заданных на области или на гладком многообразии, нуждается в уточнении для функций, заданных на многообразиях, содержащих точки ветвления. Цель настоящего исследования – определить действие оператора Лапласа на функциях, заданных на многобразии с конечным множеством точек ветвления. Для этой цели мы зададим оператор Лапласа $\mathbf{L}_0$ на пространстве $C_{0,0}^{\infty}$ финитных и бесконечно дифференцируемых функций, носители которых не содержат точек ветвления. Оператором Лапласа $\mathbf{L}$ на графе будем называть самосопряженное расширение оператора $\mathbf{L}_0$. В настоящей работе дано описание множества всех операторов Лапласа на графе в терминах условий на множество предельных в точке ветвления значений функций из области определения оператора $\mathbf{L}$ и ее производной. В работе получены результаты для графов с одной вершиной (они представляют собой объединения n полупрямых с общей вершиной), графов с несколькими вершинами и графов с одной вершиной и со счетным множеством лучей.

2. Постановка задачи и обозначения

Изучаются операторы Шредингера на графе Γ, задающие процессы диффузии или квантовой динамики на графе как на разветвленном многообразии. Следуя принимаемой в [3] терминологии, графом Γ будем называть конечную или счетную совокупность гладких одномерных многообразий Γ_i (называемых рёбрами графа), каждое из которых диффеоморфно лучу $[0,+\infty)$ или отрезку $[0,1]$. Граничные точки рёбер будем называть вершинами графа. Каждая вершина графа является граничной точкой некоторого непустого множества рёбер графа. Предполагается, что на Γ задана борелевская мера, определяемая требованием, чтобы её сужение на каждое рёбро Γ_j совпадало со стандартной мерой Лебега, тогда $L_2(\Gamma) = \oplus L_2(\Gamma_j)$. Пусть $C^\infty_{0,0}(\Gamma)$ – векторное пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Γ с компактными носителями, не содержащими вершин графа, и $\mathbf{L}_0 = \oplus \mathbf{L}_0^j$ – линейный оператор, определяемый на линейном пространстве $D(\mathbf{L}_0) = C^\infty_0(\Gamma)$ с помощью равенства

$$\mathbf{L}u = \frac{1}{m}\Delta u + iB(x)\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial (B(x)u)}{\partial x} + C(x)u, \tag{2.1}$$

в котором функции m, B, C – вещественнозначные, ограниченные и непрерывные всюду за исключением вершин функции на Γ, функция m принимает на каждом рёбре Γ_j постоянное значение m_j, причем $m_j \geqslant m_0 > 0\ \forall\ j = 1,...,n$; $u \in C^\infty_0(\Gamma)$.

Исследуем свойства задачи Коши для уравнения Шредингера:

$$i\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathbf{L}u(x,t), \tag{2.2}$$

с начальным условием

$$u(x,+0) = u_0(x),\ x \in \Gamma. \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{L}$ – симметрический оператор в гильбертовом пространстве $H = L_2(\Gamma)$, являющийся расширением оператора $\mathbf{L}_0$, заданного на линейном многообразии $D(\mathbf{L}_0)$ с помощью равенства (2.1). Целью статьи является описание множества всех самосопряженных расширений оператора $\mathbf{L}_0$, которые могут выступать генераторами унитарных групп задачи Коши (2.2), (2.3) для уравнения Шредингера.

3. Граф с одной вершиной

Граф Γ с одной вершиной мы определяем как объединение n экземпляров полупрямых $\Gamma_j = [0,+\infty)$, $j = 0,...,n$, с общим началом Q, называемым вершиной графа. Предполагается, что на Γ задана борелевская мера, определяемая требованием, чтобы её сужение на каждую полупрямую Γ_j совпадало со стандартной мерой Лебега, тогда $L_2(\Gamma) = \oplus L_2(\Gamma_j)$. Пусть $C^\infty_{0,0}(\Gamma)$ – векторное пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Γ с компактными носителями, не содержащими точки Q, и $\mathbf{L}_0 = \oplus \mathbf{L}_0^j$ – линейный оператор, определяемый на $C^\infty_0(\Gamma)$ соотношением $\mathbf{L}_0 u = \{\oplus \mathbf{L}_0^j u_j\}$, $\mathbf{L}_0^j u_j = \frac{1}{m_j}\Delta_j u_j + iB_j(x)\frac{\partial u_j}{\partial x} + i\frac{\partial (B_j(x)u_j)}{\partial x} + C_j(x)u_j$. Здесь $\{u_j, j = 1,...,n\}$ – сужения функции u на полупрямые Γ_j. Предполагается, что при всех j числа $m_j > 0$ и функции $B_j(x)$, $C_j(x) \in C^1(\Gamma_j, R)$ и $b_j = B_j(0)$ обозначим в точке Q.

Оператор $\mathbf{L}_0$ с областью определения $D(\mathbf{L}_0) = C^\infty_{0,0}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$, плотно определен и симметричен. Областью определения $D(\mathbf{L}_0^*)$ сопряженного оператора $\mathbf{L}_0^*$ является линейное подпространство $D(\mathbf{L}_0^*) = \oplus_{j=1}^n W_2^2(\Gamma_j) := W_2^2(\Gamma) \subset H$. Сужения всякой функции $u \in W_2^2(\Gamma)$ на полупрямые Γ_j, $j = 1,...,n$ обладают граничными значениями в вершине, которые обозначим через $u_j(0)$, где символ $u(0)$ означает $u(0) = \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) & \dots & u_n(0)\end{pmatrix}^T \in \mathbb{C}^n$. Это тоже верно для первых производных этих сужений, для них используем аналогичные обозначения.

Теорема фон Неймана (см. [5,7]) предоставляет описание множества самосопряженных расширений симметрического оператора. В работе получено явное описание множества самосопряженных расширений оператора $\mathbf{L}_0$ в терминах условий на линейные подпространства в пространстве граничных значений $G = D(\mathbf{L}_0^*)/\overline{D(\mathbf{L}_0)} = \{(u(0), u'(0))\} = \mathbb{C}^{2n}$.

Теорема 1. *Пусть* $m = 1$, $B(x) = 0$ *и* $C(x) = 0$. *Оператор* $\mathbf{L}$ *с областью определения* $D(\mathbf{L}) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$ *самосопряжен тогда и только тогда, когда матрица* A *удовлетворяет равенству* $A = A^*$.

Доказательство. Если $u \in D(\mathbf{L})$ и $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$, то справедливо равенство

$$\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^* v\big)_H = \big(u(0), v'(0)\big)_{\mathbb{C}^n} - \big(u'(0), v(0)\big)_{\mathbb{C}^n}.$$

Следовательно, $\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^* v\big)_H = \big(u(0), v'(0) - A^* v(0)\big)_{\mathbb{C}^n}$.

Следы $u(0)$ принимают произвольные значения, поэтому равенство $v'(0) = A^* v(0)$ необходимо и достаточно для включения $v \in D(\mathbf{L}^*)$, что и доказывает теорему 1.

Следствие 1. *Если* M *и* Ξ – *диагональные матрицы и их матричные элементы заданы по формуле* $\big(\frac{1}{m_i}\delta_{ij}\big)_{n\times n}$, $\big(b_i \delta_{ij}\big)_{n\times n}$, $i, j = 1, ..., n$, *соответственно и* $C = (c_{ij})$, *где* $c_{ij} \in L_\infty(\Gamma)$, *то оператор* $\mathbf{L}$ *с областью определения* $D(\mathbf{L}) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$ *самосопряжен тогда и только тогда, когда матрицы* A, M *и* Ξ *удовлетворяют равенству* $A = M^{-1} A^* M - 2i\, M^{-1}\Xi$.

Теорема 1 описывает широкий класс самосопряженных расширений оператора $\mathbf{L}_0$, но не дает описания всей совокупности самосопряженных расширений. Такое описание делает следующая теорема.

Теорема 2. *Оператор* $\mathbf{L}$ *самосопряжен тогда и только тогда, когда его область определения* $D(\mathbf{L})$ *состоит из функций пространства* $W_2^2(\Gamma)$, *граничные значения которых удовлетворяют равенству* $Zu'(0) + Au(0) = 0$, *где ранг матрицы* $(Z|A)$ *равен* n *и матрица* ZA^* *является самосопряженной:* $ZA^* = AZ^*$.

Доказательство. Пусть $m = 1$, $B(x) = 0$ и $C(x) = 0$. Обозначим через $\left\{ \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}_{2n\times 1} = \Phi_{2n\times n} h_{n\times 1} \right\}$ множество решений системы линейных уравнений

$$Zu'(0) + Au(0) = 0, \tag{3.1}$$

где $\Phi_{2n\times n}$– фундаментальная матрица и $h_{n\times 1}$ – матрица независимых констант. Подставляя каждое из решений фундаментальной системы уравнения $Zu'(0) + Au(0) = 0$, задающие область определения, получим следующую связь фундаментальной матрицы с матрицей системы уравнений (3.1):

$$\Phi^T \begin{pmatrix} A^T \\ Z^T \end{pmatrix}_{2n\times n} = 0_{n\times n}. \tag{3.2}$$

Если $u \in D(\mathbf{L})$, область определения оператора $\mathbf{L}$ задана системой уравнений (3.1), то для любого $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$ справедливо равенство

$$\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^* v\big)_H = \left\langle h, \Phi^T \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \begin{pmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{v}'(0) \end{pmatrix}_{2n\times 1} \right\rangle.$$

Элемент $v \in D(\mathbf{L}^*)$ удовлетворяет условию

$$\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^* v\big)_H = 0. \tag{3.3}$$

Пусть $\overline{V} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{v}'_1 & \dots & \bar{v}'_n \end{pmatrix}_{2n\times n}$ – базис в линейном подпространстве $D(\mathbf{L}^*)/\overline{D(\mathbf{L}_0)}$, тогда каждый столбец матрицы $\overline{V}$ удовлетворяет (3.3) и, следовательно,

$$\Phi^T \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \overline{V}_{2n\times n} = 0_{n\times n}. \tag{3.4}$$

Из (3.2) и (3.4) следует, что в качестве матрицы V может быть выбрана следующая матрица:

$$V = \begin{pmatrix} -Z^* \\ A^* \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathbf{L}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда $D(\mathbf{L}) = D(\mathbf{L}^*)$, поэтому если V – матрица из столбцов базисных векторов в подпространстве $D(\mathbf{L}^*)/\overline{D(\mathbf{L}_0)}$, то $D(\mathbf{L}) = D(\mathbf{L}^*)$ тогда и только тогда, когда V является также и матрицей из столбцов базисных векторов в подпространстве $D(\mathbf{L})/\overline{D(\mathbf{L}_0)}$, то есть любой её столбец удовлетворяет системе уравнений (3.1). А это равносильно системе равенств $\begin{pmatrix} A & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Z^* \\ A^* \end{pmatrix} = 0$, что и доказывает теорему 2.

Теорема 3. *Оператор* $\mathbf{L}$ *самосопряжен тогда и только тогда, когда его область определения* $D(\mathbf{L})$ *состоит из функций пространства* $W_2^2(\Gamma)$, *граничные значения которых удовлетворяют равенству* $A_1u'(0) + A_0u(0) = 0$, *где ранг матрицы* $(A_1|A_0)$ *равен* n *и матрица* $A_0A_1^*$ *удовлетворяет равенству* $A_0M^{-1}A_1^* = A_1M^{-1}(A_0^* + 2i\,\Xi M^{-1}\,A_1^*)$.

Доказательство. Пусть $m \neq 0$, $B(x) \neq 0$ и $C(x) \neq 0$. Обозначим через $\left\{ \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}_{2n\times 1} = \Phi_{2n\times n}h_{n\times 1} \right\}$ множество решений системы линейных уравнений

$$A_1u'(0) + A_0u(0) = 0, \tag{3.5}$$

где $\Phi_{2n\times n}$ – фундаментальная матрица и $h_{n\times 1}$ – матрица независимых констант. Подставляя каждое из решений фундаментальной системы уравнения $A_1u'(0)+A_0u(0) = 0$, задающие область определения, получим следующую связь фундаментальной матрицы с матрицей системы уравнений (3.5):

$$\Phi^T \begin{pmatrix} A_0^T \\ A_1^T \end{pmatrix}_{2n\times n} = 0_{n\times n}. \tag{3.6}$$

Если $u \in D(\mathbf{L})$, область определения оператора $\mathbf{L}$ задана системой уравнений (3.5), то для любого $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$ справедливо равенство

$$\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^*v\big)_H = \left\langle h, \Phi^T \begin{pmatrix} -2i\Xi & M \\ -M & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \begin{pmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{v}'(0) \end{pmatrix}_{2n\times 1} \right\rangle.$$

Элемент $v \in D(\mathbf{L}^*)$ удовлетворяет условию

$$\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^*v\big)_H = 0. \tag{3.7}$$

Пусть $\overline{V} = \begin{pmatrix} \bar{v_1} & \dots & \bar{v_n} \\ \bar{v}_1' & \dots & \bar{v}_n' \end{pmatrix}_{2n\times n}$ – базис в линейном подпространстве $D(\mathbf{L}^*)/\overline{D(\mathbf{L}_0)}$, тогда каждый столбец матрицы $\overline{V}$ удовлетворяет (3.7) и, следовательно,

$$\Phi^T \begin{pmatrix} -2i\Xi & M \\ -M & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \overline{V}_{2n\times n} = 0_{n\times n}. \tag{3.8}$$

Из (3.6) и (3.8) следует, что в качестве матрицы V может быть выбрана следующая матрица:

$$V = \begin{pmatrix} -M^{-1}A_1^* \\ M^{-1}A_0^* + 2iM^{-1}\Xi M^{-1}A_1^* \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathbf{L}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда $D(\mathbf{L}) = D(\mathbf{L}^*)$, поэтому если V – матрица из столбцов базисных векторов в подпространстве $D(\mathbf{L}^*)/\overline{D(\mathbf{L}_0)}$, то $D(\mathbf{L}) = D(\mathbf{L}^*)$ тогда и только тогда, когда V является также и матрицей из столбцов базисных векторов в подпространстве $D(\mathbf{L})/\overline{D(\mathbf{L}_0)}$, то есть любой её столбец удовлетворяет системе уравнений (3.5). А это равносильно системе равенств $\begin{pmatrix} A_0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M^{-1}A_1^* \\ M^{-1}A_0^* + 2iM^{-1}\Xi M^{-1}A_1^* \end{pmatrix} = 0$, что и доказывает теорему 3.

4. Граф с несколькими вершинами

В настоящей работе под графом с несколькими вершинами понимается одномерный клеточный комплекс [4]. Пусть граф Γ представляет собой набор из n вершин $Q_1, ..., Q_n$, из каждой исходит r_j, $r_j \in N$, рёбер Γ_j^i, представляющих собой либо бесконечные полупрямые, либо отрезки, соединяющие вершину Q_j с другими вершинами. Фиксируем на каждом ребре Γ_j параметризацию натуральным параметром. При этом на ребрах-полупрямых параметр возрастает от граничной точки, а на ребрах-отрезках ориентация выбрана произвольно. Пусть d_j – начальная точка ребра полупрямой, a_j – начальная точка ребра Γ_j отрезка, b_j – конечная точка ребра Γ_j отрезка. Пусть c_k, $k = 1, ..., N$, – совокупность всех граничных точек ребер $\Gamma_1, ..., \Gamma_n$. Определим функцию s на множестве $\{c_k\}$ так, что $s(c_k) = 1$ при условии, что c_k – начало ребра, и положим $s(c_k) = -1$ при условии, что c_k – конец ребра. Обозначим через S диагональную матрицу с числами $s(c_k)$ на диагонали. Введем операторы $\mathbf{L}_0$, $\mathbf{L}_0^*$ и пространство G граничных значений функций из $D(\mathbf{L}_0^*)$ и их производных. Пространство G линейно изоморфное пространству $\mathbb{C}^{2N}$. Через $u(c_j)$ обозначим совокупность предельных значений функции по ребру, границей которого является точка c_j, а через $u(c)$ обозначим N-мерный вектор $\big(u(c_1)...u(c_N)\big)^T$. Для вектора предельных значений производной $u'(c)$ используем аналогичные обозначения. Пусть $b(c_1), \ldots, b(c_N)$ – предельные значения функции B в точках $c_1, \ldots, c_N$ соответственно.

Теорема 4. *Пусть $m = 1$, $B(x) = 0$ и $C(x) = 0$. Оператор $\mathbf{L}$ с областью определения $D(\mathbf{L}) = \Big\{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(c) = Au(c)\Big\}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда матрица A удовлетворяет равенству $A = SA^*S$.*

Доказательство. Если $u \in D(\mathbf{L})$ и $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$, то справедливо равенство

$$\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^* v\big)_H = \big(Su(c), v'(c)\big)_{\mathbb{C}^{2n}} - \big(Su'(c), v(c)\big)_{\mathbb{C}^{2n}}.$$

Следовательно, $\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^* v\big)_H = \big(u(c), Sv'(c) - A^*Sv(c)\big)$.
Следы $u(c)$ принимают произвольные значения, поэтому равенство $v'(c) = SA^*S\, v(c)$ необходимо и достаточно для включения $v \in D(\mathbf{L}^*)$, что и доказывает теорему 4.

Следствие 2. *Если M и Ξ – диагональные матрицы и их матричные элементы заданы по формуле $\big(\frac{1}{m_i}\delta_{ij}\big)_{2n\times 2n}$, $\big(b_i\delta_{ij}\big)_{2n\times 2n}$, $i, j = 1, ..., n$, соответственно и $C = (c_{ij})$, где $c_{ij} \in L_\infty(\Gamma)$, то оператор $\mathbf{L}$ с областью определения $D(\mathbf{L}) = \Big\{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(c) = Au(c)\Big\}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда матрицы A, M и Ξ удовлетворяют равенству $A = M^{-1}SA^*SM - 2i\, M^{-1}S\Xi S$.*

Доказательство. Если $u \in D(\mathbf{L})$ и $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$, то справедливо равенство

$$\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^* v\big)_H = \Big(S\big(u(c)\big)^T, M\bar{v}'(c)\Big) - \Big(S\big(u'(c)\big)^T, M\bar{v}(c)\Big) -$$

$$-\Big(2iS\big(u(c)\big)^T, \Xi\bar{v}(c)\Big).$$

Следовательно,

$$\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^* v\big)_H = \Big(\big(u(c)\big)^T, SMv'(c) - A^*S\, Mv(c) + 2i\,\Xi\, S\bar{v}(c)\Big).$$

Следы $\big(u(c)\big)^T$ принимают произвольные значения, поэтому равенство $v'(c) = \big(M^{-1}SA^*SM - 2iM^{-1}S\Xi S\big)v(c)$ необходимо и достаточно для включения $v \in D(\mathbf{L}^*)$, что и доказывает следствие 2.

5. Граф с одной вершиной и со счетным множеством лучей

Для описания такого графа определим на нем следующие структуры (см. [2]). Обозначим через μ локально-конечную счётно-аддитивную неотрицательную меру на N, такую, что $\mu(k) = \mu_k > 0$ и через $L_2(N,\ 2^N,\ \mu,\ \mathbb{C})$ – гильбертово пространство граничных значений с нормой

$$\left\|\{u_n\}\right\|^2_{L_{2,\,\mu}} = \int_N \left|u_n\right|^2 d\mu(n) = \sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k\right|^2\mu(k).$$

Сужения всякой функции из пространства $W_2^2(\Gamma)$ на полупрямую обладают граничными значениями в вершине: $u(0) = (u_1(0)...u_n(0)...)^T \in L_{2,\,\mu}$. Это же верно для первых производных функции из пространства $W_2^2(\Gamma)$, граничные значения которых обозначим через $u'(0)$. Обозначим через Λ, M и Ξ диагональные матрицы, матричные элементы которых заданы по формуле $\left(\mu_i\delta_{ij}\right)$, $\left(\frac{1}{m_i}\delta_{ij}\right)$ и $\left(b_i\delta_{ij}\right)$ соответственно.

Теорема 5. *Пусть $\mu_k = 1$, $m = 1$, $B(x) = 0$, $C(x) = 0$. Оператор $\mathbf{L}$ с областью определения $D(\mathbf{L}) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда оператор A самосопряжен в пространстве ℓ_2.*

Доказательство. Если $u \in D(\mathbf{L})$ и $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$, то справедливо равенство

$$\left(\mathbf{L}u, v\right)_H - \left(u, \mathbf{L}_0^* v\right)_H = \Big(\left(u(0)\right)^T, \Lambda\,\bar{v}'(0)\Big) - \Big(\left(u'(0)\right)^T, \Lambda\,\bar{v}(0)\Big) =$$

$$= \Big(\left(u(0)\right)^T, \Lambda\,\bar{v}'(0)\Big) - \Big(\left(u(0)\right)^T, A^T\Lambda\,\bar{v}(0)\Big).$$

Следовательно,

$$\left(\mathbf{L}u, v\right)_H - \left(u, \mathbf{L}_0^* v\right)_H = \Big(\left(u(0)\right)^T, \Lambda\,\bar{v}'(0) - A^T\Lambda\,\bar{v}(0)\Big).$$

Следы $\left(u(0)\right)^T$ принимают произвольные значения в пространстве $L_2(N,\ 2^N,\ \mu,\ \mathbb{C})$, поэтому равенство $v'(0) = \Lambda^{-1}A^*\Lambda\ v(0)$ необходимо и достаточно для включения $v \in D(\mathbf{L}^*)$, что и доказывает теорему 5.

Следствие 3. *Если $\mu_k \in \ell_1$, $\frac{1}{m_k}$, m_k, $b_k \in \ell_\infty$ и Λ, Ξ и M – операторы в пространстве $L_2(N,\ 2^N,\ \mu,\ \mathbb{C})$, заданные диагональными матрицами с числами μ_k, b_k, $\frac{1}{m_k}$ на диагонали соответственно, $C = (c_{ij})$, где $c_{ij} \in L_\infty(\Gamma)$, то оператор $\mathbf{L}$ с областью определения $D(\mathbf{L}) = \Big\{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\Big\}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда операторы A, M и Ξ, действующие в пространстве ℓ_2, удовлетворяют равенству*

$$\Lambda\ M\ A\ = A^*\Lambda\ M - 2i\ \Lambda\Xi. \tag{5.1}$$

Доказательство. Если $u \in D(\mathbf{L})$ и $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$, то справедливо равенство

$$\left(\mathbf{L}u, v\right)_H - \left(u, \mathbf{L}_0^* v\right)_H = \Big(\left(u(0)\right)^T, \Lambda\ M\bar{v}'(0)\Big) - \Big(\left(u'(0)\right)^T, \Lambda\ M\bar{v}(0)\Big) - \Big(2i\left(u(0)\right)^T, \Lambda\ \Xi\bar{v}(0)\Big).$$

Следовательно,

$$\left(\mathbf{L}u, v\right)_H - \left(u, \mathbf{L}_0^* v\right)_H = \Big[\Lambda\ M\bar{v}'(0) - A^T\Lambda\ M\bar{v}(0) - 2i\Lambda\ \Xi\bar{v}(0)\Big](u(0))^T.$$

Следы $\left(u(0)\right)^T$ принимают произвольные значения в пространстве $L_2(N,\ 2^N,\ \mu,\ \mathbb{C})$, поэтому равенство $\Lambda M v'(0) = \left(A^*\Lambda\ M - 2i\Lambda\Xi\right)v(0)$ необходимо и достаточно для включения $v \in D(\mathbf{L}^*)$. Так как $\mathbf{L} = \mathbf{L}^*$ если и только если $D(\mathbf{L}) = D(\mathbf{L}^*)$, то для самосопряженности оператора $\mathbf{L}$ необходимо и достаточно выполнения равенства (5.1).

6. Заключение

В работе получено описание множества всех операторов Лапласа на графе, определяемых как самосопряженное расширение оператора, изначально заданного на гладких функциях с носителями, не содержащими точек ветвления графа. Тем самым дано описание различных возможностей определения оператора Лапласа на пространстве функций, определенных на разветвленном многообразии. Описание области определения каждого из самосопряженных расширений дано в терминах линейных соотношений, которым удовлетворяют предельные в точках ветвления и граничных точках графа значения функции из области определения оператора и ее производной. Каждому из операторов Лапласа соответствует марковский процесс, поведение которого в окрестности точек ветвления графа определяется выбором области определения оператора Лапласа. Полученные в статье результаты расширяют область исследования работы [11], в которой дано описание самосопряженных расширений оператора Лапласа на графе с одной вершиной и двумя ребрами, на случай графа с произвольным числом ребер. Кроме того, настоящая работа обобщает результаты работы [6] на такие операторы Лапласа, для которых линейные соотношения в пространстве граничных значений, задающих область определения оператора, не допускают возможности выразить предельные значения функции в граничных точках и точках ветвления графа через предельные значения ее производной или наоборот.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 14-11-00687.

Литература

1. *Амосов Г.Г., Сакбаев В.Ж.* О самосопряженных расширениях оператора Шредингера с вырождением на двух полупрямых и определяемых ими марковских коциклах // Матем. заметки. — 2004. — Т. 76, вып. 3. — С. 335–343.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. Т. 1. — М : ИЛ, 1962.
3. *Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М. : Физматлит, 2004.
4. *Пенкин О.М., Покорный Ю.В.* О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе // Матем. заметки. — 1996. — Т. 59, вып. 6. — С. 777–780.
5. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. — М. : Мир, 1977.
6. *Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Динамика квантовой частицы с разрывной зависимостью массы от положения // ДАН. — 2010. — Т. 433, вып. 3. — С. 314–317.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М. : Мир, 1972.
8. *Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Диффузия и квантовая динамика на графах // Доклады РАН. — 2013. — Т. 451, № 2. — С. 141–145.
9. *Толченников А.А., Чернышев В.Л., Шафаревич А.И.* Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах // Нелинейная динамика. — 2010. — Т. 6, вып. 3. — С. 623–638.
10. *Чернышев В.Л., Шафаревич А.И.* Квазиклассический спектр оператора Шредингера на геометрическом графе // Матем. заметки. — 2007. — Т. 82, вып. 4. — С. 606–620.
11. *Gadella M., Kuru S., Negro J.* Self-adjoint Hamiltonians with a mass jump: General matching conditions // Phys. Letters. — 2007. — V. 362, N 4. — P. 265–268.

Поступила в редакцию 03.10.2013.