ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи

УДК 519.176

Пушняков Филипп Анатольевич

О числе рёбер в индуцированных подграфах специальных дистанционных графов

Специальность 01.01.09 —
дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Райгородский Андрей Михайлович

Москва — 2020

Оглавление

Стр.

Список сокращений и условных обозначений

$V(G)$ — множество вершин графа G

$E(G)$ — множество рёбер графа G

$f(n) = o(g(n))$ — для любого числа $c > 0$ существует такое число n_0, что для любого $n > n_0$ выполнено неравенство $|f(n)| < c \cdot |g(n)|$

$f(n) = O(g(n))$ — существуют такие числа $C > 0$ и n_0, что для любого $n > n_0$ выполнено неравенство $|f(n)| < C \cdot |g(n)|$

$f(x) \sim g(x)$ — функции асимптотически равны при $x \to \infty$, то есть $f(x) = g(x) \cdot (1 + o(1))$.

Введение

Актуальность темы

Рассмотрение дистанционных графов глубоко мотивировано некоторыми знаменитыми задачами комбинаторной геометрии, в частности — задачей Нельсона-Эрдеша-Хадвигера, проблемой Борсука, задачей о кодах с запрещенным расстоянием и другими. В задаче Нельсона-Эрдеша-Хадвигера ставится вопрос о хроматическом числе пространства $\mathbb{R}^n$: минимальном числе цветов, в которые можно раскрасить n-мерное евклидово пространство так, чтобы никакие две точки, отстоящие друг от друга на расстояние 1, не были окрашены в один и тот же цвет (см. [1] – [13]). С точки зрения теории графов, рассматривается задача о хроматическом числе бесконечного графа, вершинами которого являются все точки пространства $\mathbb{R}^n$, а ребро проводится между точками на расстоянии 1. Теорема Эрдеша–де Брейна утверждает, что бесконечный граф можно раскрасить в k цветов тогда и только тогда, когда в k цветов можно раскрасить каждый его конечный подграф (см. [14]). Тем самым, достаточно изучать хроматические числа конечных дистанционных графов — вершины дистанционного графа представляют собой конечное множество точек пространства $\mathbb{R}^n$, а ребро проводится в том и только том случае, если точки находятся на некотором фиксированном расстоянии друг от друга. Вообще, подобные графы обычно называют полными дистанционными графами. Смысл слова «дистанционный» понятен: ребра графа задаются парами точек, отстоящих друг от друга на некоторое расстояние — «дистанцию». А полнота понимается в том смысле, что мы провели в графе все возможные ребра.

В данной работе мы сконцентрируемся на рассмотрении специального дистанционного графа $G(n,3,1)$, вершинами которого являются точки в n-мерном булевом кубе, у которых ровно 3 единицы, а ребро между такими вершинами проводится тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между соответствующими точками равно 2, или, что то же самое, когда скалярное произведение соответствующих векторов равно 1. Можно сформулировать данное определение в комбинаторных терминах, а именно, вершинами данного графа являются все возможные трехэлементные подмножества множества $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, а ребро проводится между подмножествами, имеющими ровно один общий элемент. Видимо, впервые подобные дистанционные графы были упомянуты в работе Надя (см. [15]), в которой граф $G(n,3,1)$ был использован в качестве примера графа с маленьким кликовым числом и маленьким числом независимости — примера графа, возникающего в классической теории Рамсея. Напомним, что *независимым множеством* графа G называется такое подмножество его вершин, что никакие две вершины этого подмножества не соединены ребром. *Числом независимости* $\alpha(G)$ называется наибольшая мощность независимого множества. Кликовым же числом называется мощность наибольшей клики — множества вершин, каждые две из которых соединены ребром. Числом Рамсея называется такое минимальное натуральное число $r(n)$, что в любом графе на $r(n)$ вершинах найдется либо клика размера n, либо независимое множество размера n. Ясно, что в графе $G(n, 3, 1)$ порядка $\frac{n^3}{6}$ вершин, а размер максимальной клики и максимального независимого множества не превосходят n. Таким образом, была получена на тот момент наилучшая конструктивная оценка $r(n) > c \cdot n^3$. Позже Франкл и Уилсон в своей работе [16] привели сверхполиномиальную оценку, также полученную с помощью дистанционных графов (см. [10]).

Большая часть данной работы посвящена исследованию графа $G(n,3,1)$. Данный граф важен не только для теории Рамсея, но также он сыграл важную роль в одном из первых продвижений в задаче Нельсона–Эрдеша–Хадвигера. В своей работе Ларман и Роджерс (см. [11]) использовали данный граф для оценки хроматического числа пространства.

Они заметили, что хроматическое число пространства $\mathbb{R}^n$, которое мы будем обозначать $\chi(\mathbb{R}^n)$, никак не меньше хроматического числа графа $G(n,3,1)$, что давало рекордную на тот момент оценку $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant c \cdot n^2$. Впоследствии именно с помощью дистанционных графов Франкл и Уилсон установили, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1.207... + o(1))^n$. Таким образом, они показали, что хроматическое число пространства растет экспоненциально с ростом n (см. [16]). Для этого они рассмотрели графы $G(n,r,s)$, обобщающие графы $G(n{,}3{,}1)$ следующим образом: в каждой вершине у них не три единицы, а r, а ребро проводится тогда и только тогда, когда скалярное произведение соответствующих векторов равно s. В 1991 году Дж. Кан и Г. Калаи использовали результаты Франкла и Уилсона для опровержения классической гипотезы Борсука о том, что всякое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$ мощности больше 1 может быть разбито на $n+1$ часть меньшего диаметра (см. [1]–[3], [17]–[19]).

Следует также упомянуть, что дистанционные графы связаны с исследованием кодов с запрещенными расстояниями (см. [23], [24]), а клики в графе $G(n, \frac{n}{2}, \frac{n}{4})$ при n кратном 4 фактически являются строками матрицы Адамара. Матрицей Адамара называется квадратная матрица (таблица) размера $n \times n$, в которой все элементы суть 1 или -1 и любые две строки ортогональны (т. е. их скалярное произведение как векторов в $\mathbb{R}^n$ равно нулю). Легко заметить, что если для некоторого $n > 1$ существует матрица Адамара, то n обязано делиться на 4. Проблема в том, что до сих пор не известно, для всех ли n кратных 4 существует матрица Адамара размера $n \times n$. Для наших целей данные матрицы не слишком важны, и потому мы подробнее на них не останавливаемся.

В данной работе мы исследуем экстремальные свойства графа $G(n,r,s)$. А именно, мы исследуем число ребер в произвольном подграфе данного графа.

Обозначим через $r(W)$ количество ребер графа G на множестве $W \subseteq V$. Иными словами,

$$r(W) = |\{(x, y) \in E \mid x \in W,\ y \in W\}| .$$

Также положим

$$r(l) = \min_{|W|=l,\, W \subseteq V} r(W) .$$

В настоящей работе мы приведем практически полное исследование величины $r(l)$ для графов $G(n, 3, 1)$ и некоторые результаты для графов $G(n, r, s)$ более общего вида.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Получены оценки величины $r(l)$ для графа $G(n, 3, 1)$, в частности:
    (a) Точные оценки величины $r(l)$ для некоторых значений l.
    (b) Верхние и нижние оценки величины $r(l)$ для некоторых значений l.
    (c) Нижняя оценка величины $r(l)$ для подграфов специального вида.
2. Получены общие оценки величины $r(l)$ для графа $G(n, r, s)$ для произвольных r, s.

Научная новизна

Все результаты диссертации являются новыми.

Научная и практическая значимость

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты важны для теории графов и гиперграфов, комбинаторной геометрии и экстремальной комбинаторики.

Степень достоверности

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались на:

– 4th Polish Combinatorial Conference (2014)

– 57-я Научная Конференция МФТИ (2014)

– I Всероссийская научная конференция «Экстремальная комбинаторика и дискретная геометрия»; Адыгейский государственный университет (2018)

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в четырех работах автора и соавторов ([67]–[70]), список которых приведен в конце диссертации.

Личный вклад

Все результаты работ [67] – [70] получены соискателем. А. М. Райгородский участвовал в написании обзорной части и устранении ряда неточностей в первоначальных вариантах текстов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и заключения.

Первая глава посвящена постановке задачи и описанию классических результатов. В частности, в первой главе мы даем определение графа $G(n, r, s)$, независимого множества и числа независимости. Также мы определяем величину $r(l)$. Наконец, мы формулируем классическую теорему Турана и её аналог для дистанционных графов.

Во **второй главе** мы изучаем граф $G(n, 3, 1)$. В частности, мы получаем точные оценки величины $r(l)$ для некоторых значений l и нетривиальные нижние и верхние оценки для других l.

В **третьей главе** мы рассматриваем особые подграфы графа $G(n, 3, 1)$. Точнее, мы вводим понятие **звёздного множества**, размер которого напрямую влияет на эффективность оценок величины $r(l)$. Оказывается, ограничив максимальный возможный размер звездного множества, можно значительно улучшить нижние оценки величины $r(l)$ для широкого спектра значений l.

И, наконец, в **четвёртой главе** мы изучаем общий случай $G(n, r, s)$. В этой главе получены общие верхние и нижние оценки величины $r(l)$, которые являются следствиями естественных обобщений конструкций, разработанных для графа $G(n, 3, 1)$. Также в данной главе мы отдельно рассматриваем интересный случай $s = 0$, мотивированный многими задачами экстремальной теории графов.

Полный объём диссертации составляет 70 страниц. Список литературы содержит 72 наименования.

Благодарности

Автор признателен Андрею Михайловичу Райгородскому за многогранную поддержку, без которой работа не состоялась бы.

Глава 1. Постановка задачи и классические результаты

В данной главе мы сформулируем основные понятия и результаты, мотивирующие нас на дальнейшие исследования. В частности, в параграфе 1.1 мы определяем величину $r(l)$, а в параграфе 1.2 мы формулируем классическую теорему Турана и её модификацию для дистанционных графов.

1.1 Определение величины $r(l)$ и постановка задачи

Рассмотрим произвольный граф $G = G(V, E)$. Напомним, что *независимым множеством* графа G называется такое подмножество его вершин, что никакие две вершины этого подмножества не соединены ребром. *Числом независимости* $\alpha(G)$ называется наибольшая мощность независимого множества. Положим $\alpha = \alpha(G)$.

Обозначим через $r(W)$ количество ребер графа G на множестве $W \subseteq V$. Иными словами,

$$r(W) = |\{(x, y) \in E \mid x \in W,\ y \in W\}| .$$

Также положим

$$r(l) = \min_{|W|=l,\, W \subseteq V} r(W) .$$

Заметим, что если $l \leqslant \alpha$, то $r(l) = 0$ и обсуждать нечего. Если же $l > \alpha$, то, очевидно, в любом $W \subseteq V$ мощности l непременно найдутся ребра. Возникает интересный вопрос об изучении величины $r(l)$.

1.2 О теореме Турана

Сперва сформулируем классическую теорему Турана (см., например, [21], [22]). Данная теорема верна для произвольных графов.

Теорема 1. *В обозначениях выше верно, что если* $|W| = l > \alpha$, *то* $r(W) \geqslant \frac{l^2}{2\alpha} - \frac{l}{2}$.

Как хорошо известно, в доказательстве данной теоремы не используются никакие специальные свойства графа G и, более того, эта теорема в общем случае неулучшаема. Разумно предположить, что рассмотрев некоторые специальные графы можно улучшить данную оценку. Интересными графами являются так называемые **дистанционные** графы, вершинами которых являются точки в некотором пространстве $\mathbb{R}^n$, а ребро между такими вершинами проводится тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между ними равняется некоторому числу. Изучение данных графов обусловлено многими задачами комбинаторной геометрии, экстремальной комбинаторики, теории кодирования: например, задачей Нелсона–Эрдёша–Хадвигера о раскраске метрического пространства (см. [1]–[13]), проблемой Борсука о разбиении множеств в пространствах на части меньшего диаметра (см. [1]–[3], [17]–[19]), задачами о числах Рамсея (см. [20], [15]), задачами о кодах с одним запрещенным расстоянием (см. [23], [24]).

Для дистанционных графов была доказана следующая теорема (см. [22]).

Теорема 2. *Пусть* G_n *– последовательность дистанционных графов, у которых* $V(G_n) \subset \mathbb{R}^n$*. Положим* $\alpha_n = \alpha(G_n)$*. Пусть* W_n *это подмножество* $V(G_n)$*. Тогда если* $|W_n| = l(n)$ *и* $n\alpha_n = o(l(n))$*, то при* $n \to \infty$

$$r(l(n)) \geqslant \frac{l(n)^2}{\alpha_n}(1 + o(1)).$$

Стоит заметить, что теорема 2 примерно вдвое улучшает результат теоремы 1 благодаря использованию специальной структуры графа. Однако, как мы увидим в следующих главах, можно и дальше улучшать данную оценку, более аккуратно учитывая специальные свойства графа.

Глава 2. Анализ графа $G(n,3,1)$

В данной главе мы начнем исследование графа $G(n,3,1)$. В параграфе 2.1 мы напомним определение графа $G(n,3,1)$. В параграфе 2.2 мы найдем число независимости данного графа и опишем структуру независимого множества. В параграфе 2.3 мы найдем точные оценки величины $r(l)$ для некоторого класса функций l. К сожалению, не для всех функций l удалось найти точные оценки на величину $r(l)$, поэтому в дальнейших параграфах мы находим нижние (2.5, 2.6) и верхние (2.7) оценки на $r(l)$. Наконец, в последнем параграфе мы проведем сравнение полученных оценок и проанализируем величину зазора между ними. Результаты данной главы опубликованы в работах [67], [68], [69].

2.1 Мотивация

Рассмотрим последовательность графов $G_n = G_n(V_n, E_n) = G(n,3,1)$, у которых

$$V_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0,1\}, i = 1, \ldots, n\ ,\ x_1 + \ldots + x_n = 3\},$$

$$E_n = \{(x,y) \mid \langle x, y \rangle = 1\},$$

где через $\langle x, y \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов x и y. Иными словами, вершинами графа $G(n,3,1)$ являются (0,1)-векторы, скалярный квадрат которых равен трем. И эти вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда скалярное произведение соответствующих векторов равно единице. Данное определение можно переформулировать в комбинаторных терминах. А именно, рассмотрим граф, вершинами которого являются всевозможные трехэлементные подмножества множества $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$, причем ребро между такими вершинами проводится тогда и только тогда, когда соответствующие трехэлементные подмножества имеют ровно один общий элемент. Изучение данного графа обусловлено многими задачами комбинаторной геометрии, экстремальной комбинаторики, теории кодирования: например, задачей Нелсона–Эрдёша–Хадвигера о раскраске метрического пространства (см. [1]–[13]), проблемой Борсука о разбиении множеств в пространствах на части меньшего диаметра (см. [1]–[3], [17]–[19]), задачами о числах Рамсея (см. [20], [15]), задачами о кодах с одним запрещенным расстоянием (см. [23], [24]).

Напомним несколько свойств данного графа. Граф $G\,(n{,}3{,}1)$ является регулярным со степенью вершины $d_n = 3 \cdot C_{n-3}^2$. Очевидно, что $|V_n| = C_n^3 \sim \dfrac{n^3}{6}$ при $n \to \infty$. В силу регулярности рассматриваемого графа имеем $|E_n| = \frac{d_n \cdot |V_n|}{2} = \frac{3}{2} \cdot C_{n-3}^2 \cdot C_n^3 \sim \frac{n^5}{8}$ при $n \to \infty$.

Далее мы найдём мощность и структуру независимого множества графа $G\,(n, 3, 1)$.

2.2 О числе независимости графа $G\,(n, 3, 1)$

Положим $\alpha_n = \alpha\,(G\,(n, 3, 1))$. Результат теоремы Ж. Надя (см. [15]) отвечает на вопрос о числе независимости графа $G\,(n, 3, 1)$. А именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\alpha_n = \begin{cases} n, & \text{\textit{при} } n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ n-1, & \text{\textit{при} } n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ n-2, & \text{\textit{при} } n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ n-2, & \text{\textit{при} } n = 4k+3, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Таким образом, $\alpha_n \sim n$ при $n \to \infty$. Более того, из доказательства теоремы Ж. Надя можно сделать вывод о структуре независимого множества в рассматриваемом графе. Для описания этой структуры введем дополнительные обозначения. Пусть $W \subseteq V_n$. Будем говорить, что W является множеством вершин *первого типа*, если $|W| \geqslant 3$ и существуют такие $i, j \in \mathcal{R}_n$, что для любой вершины $w \in W$ выполнено $i, j \in w$; далее, W является множеством вершин *второго типа*, если $|W| \geqslant 2$ и существуют такие $i,\ j,\ k,\ t \in \mathcal{R}_n$, что для любой вершины $w \in W$ выполнено $w \subset \{i, j, k, t\}$; наконец, W является множеством вершин *третьего типа*, если для любых $w_1, w_2 \in W$ выполнено соотношение $w_1 \cap w_2 = \emptyset$. Более того, *носителем* множества вершин назовем объединение всех вершин данного множества. Обозначим носитель множества A через $\mathrm{supp}\ A$. Тогда имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Любое независимое множество $U \subseteq V_n$ можно представить в виде объединения

$$U = \left(\cup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \cup \left(\cup_{j \in \mathcal{J}} B_j\right) \cup \left(\cup_{k \in \mathcal{K}} C_k\right),$$

где A_i – множество вершин первого типа, B_j – множество вершин второго типа, C_k – множество вершин третьего типа, $i \in \mathcal{I},\ j \in \mathcal{J},\ k \in \mathcal{K}$, и носители всех упомянутых множеств попарно не пересекаются.

Мы не доказываем данное утверждение, так как оно мгновенно следует из доказательства теоремы Ж. Надя (см. [15]).

2.3 Точная оценка величины $r(l)$ для некоторых l

В статье [67] была доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Верны следующие утверждения:*

1. *Пусть функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таковы, что выполнено $n = o(f)$ и $g = o\left(n^2\right)$ при $n \to \infty$. Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств $f(n) \leqslant l(n) \leqslant g(n)$. Тогда $r(l(n)) \sim \frac{l(n)^2}{2\alpha_n}$ при $n \to \infty$.*
2. *Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что существуют константы C_1, C_2, с которыми для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств $C_1 \cdot n^2 \leqslant f(n) \leqslant C_2 \cdot n^2$. Тогда $r(l(n)) \sim \frac{l(n)^2}{2\alpha_n}$ при $n \to \infty$.*

Фактически, в данной теореме найдена асимптотика величины $r(l)$ для некоторого класса функций l. Для доказательства данных оценок достаточно привести пример подграфа, который содержит ровно столько вершин, сколько указано в формулировке соответствующего пункта теоремы 4.

2.3.1 Доказательство пункта 1

Нижняя оценка известна и вытекает из классической теоремы Турана (см. теорему 1 в главе 1). Для доказательства верхней оценки необходимо для каждой функции $l(n)$, удовлетворяющей условию пункта 1 теоремы 4, и для каждого n построить пример множества W_n мощности $l(n)$, для которого величина $r(W_n)$ оценивается сверху нужным образом. При этом можно считать, что n достаточно велико.

Зафиксируем произвольную функцию l, удовлетворяющую условию пункта 1 теоремы 4, и число n. Положим $a(n) = \left[\frac{n^2}{l(n)}\right]$. Положим $b(n) = [\ln a(n)]$. Положим $x(n) = n - \left[\frac{n}{b(n)}\right]$. Ясно, что $x(n) \sim n$ при $n \to \infty$. Также положим $y(n) = \left[\frac{2l(n)}{x(n)}\right]$. Рассмотрим следующее подмножество множества $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$:

$$A_1 = \{1, \ldots, x\}.$$

Рассмотрим также следующее множество вершин:

$$W_n = \bigcup_{i \in A_1} \bigcup_{j \in \{1, \ldots, \left[\frac{y}{2}\right]\}} \{\{x + 2(j-1) + 1, x + 2(j-1) + 2, i\}\}.$$

Найдем мощность множества W_n. Ясно, что

$$|W_n| = |A_1| \cdot \left[\frac{y}{2}\right] = x \cdot \left[\frac{y}{2}\right] \sim \frac{xy}{2}$$

при $n \to \infty$. Найдем $r(W_n)$. Обозначим через $E(W_n)$ множество ребер графа $G(n, 3, 1)$ на множестве вершин W_n. Иными словами,

$$E(W_n) = \{(a, b) \in E(G) \mid a \in W_n,\ b \in W_n\}.$$

Посчитаем мощность множества $E(W_n)$. Ясно, что только вершины вида $\{x + 2(j-1) + 1, x + 2(j-1) + 2, i\}$ при фиксированном $i \in A_1$ могут образовывать ребро. Всего существует $\left[\frac{y}{2}\right] \cdot x \cdot \left(\left[\frac{y}{2}\right] - 1\right) \cdot \frac{1}{2}$ пар таких вершин. Действительно, $\left[\frac{y}{2}\right] \cdot x$ способами можно выбрать одну вершину из W_n, $\left(\left[\frac{y}{2}\right] - 1\right)$ способами можно выбрать ей пару из W_n, и, наконец, сомножитель $\frac{1}{2}$ показывает нам, что каждую пару вершин мы посчитали два раза.

Таким образом,

$$|E(W_n)| = \left[\frac{y}{2}\right] \cdot x \cdot (\left[\frac{y}{2}\right] - 1) \cdot \frac{1}{2}.$$

Подставим в полученное выражение значения параметров:

$$|E(W_n)| \sim \frac{xy^2}{8} = \frac{x^2y^2}{8n} \cdot \frac{n}{x} \sim \frac{x^2y^2}{8n} \sim \frac{l(n)^2}{2\alpha_n}.$$

Таким образом, искомая верхняя оценка получена.

2.3.2 Доказательство пункта 2

Нижняя оценка, как и в предыдущем пункте, известна и вытекает из классической теоремы Турана. Для доказательства верхней оценки необходимо для каждой функции $l(n)$, удовлетворяющей условию пункта 2 теоремы 4, и для каждого n построить пример множества W_n мощности $l(n)$, для которого величина $r(W_n)$ оценивается сверху нужным образом. По-прежнему можно считать, что n достаточно велико.

Зафиксируем произвольную функцию l, удовлетворяющую условию пункта 2 теоремы 4, и число n. Положим $c_n = 4 - \frac{1}{\ln n}$, $k = \left[\frac{n}{4}\right]$. Положим

$$W_1 = \bigcup_{i=3}^{[c_n k]} \{\{1, 2, i\}\},$$

$$W_2 = \bigcup_{i=3}^{[c_n k]} \bigcup_{j=1}^{\left[\frac{n-[c_n k]}{2}\right]} \{\{i,\ [c_n k] + 2(j-1) + 1,\ [c_n k] + 2(j-1) + 2\}\}.$$

Обозначим $W_n = W_1 \sqcup W_2$. Ясно, что

$$|W_n| = |W_1| + |W_2| = [c_n k] - 2 + ([c_n k] - 2)\left[\frac{n - [c_n k]}{2}\right] \sim$$

$$\sim c_n k \frac{n - c_n k}{2} \sim c_n k \frac{(4 - c_n)\, k}{2} = \frac{c_n (4 - c_n)\, k^2}{2}.$$

Как и раньше, обозначим через $E(W_n)$ множество ребер графа $G(n, 3, 1)$ на множестве вершин W_n. Ясно, что

$$|E(W_n)| = ([c_n k] - 2)\left[\frac{n - [c_n k]}{2}\right] + \frac{1}{2}([c_n k] - 2)\left[\frac{n - [c_n k]}{2}\right] \cdot$$

$$\cdot \left(\left[\frac{n - [c_n k]}{2}\right] - 1\right) \sim \frac{c_n (4 - c_n)^2 k^3}{8} = \frac{c_n^2 (4 - c_n)^2 k^4}{4} \frac{1}{2 c_n k} \sim \frac{|W_n|^2}{2\alpha_n}.$$

Таким образом, утверждение доказано.

2.4 Нижняя и верхняя оценки величины $r(l)$ для $n^2 = o(l)$

Однако, не для всех l удается найти точную оценку величины $r(l)$. В работе [67] была доказана следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таковы, что выполнено $n^2 = o(f(n))$ и $g(n) = o\left(n^3\right)$ при $n \to \infty$. Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $f(n) \leqslant l(n) \leqslant g(n)$. Тогда существует такая функция $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h(n) \sim \frac{5l(n)^2}{\alpha_n}$ при $n \to \infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств $\frac{l(n)^2}{\alpha_n} \leqslant r(l(n)) \leqslant h(n)$.*

Как видно, здесь мы нашли порядок роста величины $r(l)$, однако зазор между константами достаточно существенный.

2.4.1 Доказательство теоремы 5

Нижняя оценка вытекает из аналога теоремы Турана для дистанционных графов (см. теорему 2 в главе 1). Для доказательства верхней оценки необходимо для каждой функции $l(n)$, удовлетворяющей условию пункта 3 теоремы, и для каждого n построить пример множества W_n мощности $l(n)$, для которого величина $r(W_n)$ оценивается сверху нужным образом. По-прежнему можно считать, что n достаточно велико.

Зафиксируем произвольную функцию l, удовлетворяющую условию пункта 3 теоремы, и число n. Положим $k(n) = \left[\frac{l(n)}{\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{4}\right]}\right]$. Ясно, что $k(n) = o(n)$, при $n \to \infty$. Рассмотрим следующие подмножества множества $\mathcal{R}_n$:

$$A_1 = \begin{cases} \{1,\ldots,2m\} & \text{при } n = 4m, \\ \{1,\ldots,2m+1\} & \text{при } n = 4m+1, \\ \{1,\ldots,2m+2\} & \text{при } n = 4m+2, \\ \{1,\ldots,2m+3\} & \text{при } n = 4m+3, \end{cases}$$

$$A_2 = \mathcal{R}_n \setminus A_1.$$

Ясно, что $|A_1| \sim \frac{n}{2}$, $|A_2| \sim \frac{n}{2}$ при $n \to \infty$. Также ясно, что число $|A_2|$ четно. Положим $a(n) = |A_1|$. Пусть $\sigma \in S_{n-a(n)}$ – произвольная перестановка. Назовем разбиением множества A_2, отвечающем перестановке σ, следующее множество:

$$P_\sigma = \{(a(n)+\sigma(1)\,,\ a(n)+\sigma(2))\,,\ldots,$$

$$\ldots, (a(n) + \sigma(n - a(n) - 1), \; a(n) + \sigma(n - a(n)))\}.$$

Ясно, что можно выбрать $k(n) + 1$ различных перестановок так, что никакая пара элементов $(x, y) \in A_2 \times A_2$ не будет принадлежать более чем одному разбиению. Иными словами, можно выбрать $k(n) + 1$ попарно не пересекающихся разбиений. Обозначим их $P_1, \ldots, P_{k(n)+1}$. Тогда для $i = 1, \ldots, k(n) + 1$ положим

$$W^{(i)} = \bigcup_{x \in A_1,\, (y,z) \in P_i} \{\{x, y, z\}\}.$$

Пусть $w(n) = |W^{(1)}| = \ldots = |W^{(k(n)+1)}|$. Тогда ясно, что $w(n) = \frac{|A_1| \cdot |A_2|}{2} \sim \frac{n^2}{8}$ при $n \to \infty$. Более того, ясно, что $|E\left(W^{(i)}\right)| = \frac{1}{2} \cdot \left(\left[\frac{n}{4}\right] - 1\right) \cdot w(n)$. Действительно, каждая из $w(n)$ вершин $W^{(i)}$ соединена ровно с $\left[\frac{n}{4}\right] - 1$ другими вершинами из $W^{(i)}$, а сомножитель $\frac{1}{2}$ показывает, что каждое ребро было посчитано два раза.

Выберем из множества $W^{(k(n)+1)}$ ровно $l(n) - k(n) \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{4}\right]$ вершин произвольным образом. Обозначим получившееся подмножество вершин через U. Ясно, что

$$|E(U)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot |U| \cdot \left(\left[\frac{n}{4}\right] - 1\right) \leqslant \frac{n^3}{64}.$$

Положим

$$W_n = U \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{k(n)} W^{(i)}\right).$$

Тогда

$$|W_n| = l(n) - k(n) \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{4}\right] + k(n) \cdot w(n) \sim l(n) \sim k(n) \frac{n^2}{8}$$

при $n \to \infty$. Посчитаем мощность множества $E\left(W_n\right)$. Обозначим

$$E_1 = \{(x{,}y) \in E\left(W_n\right) \ \mid \exists\, i \neq j,\ i{,}j \leqslant k\left(n\right) \ : x \in W^{(i)},\ y \in W^{(j)}\},$$

$$E_2 = \{(x{,}y) \in E\left(W_n\right) \ \mid x \in U,\ y \in W_n \setminus U\}.$$

Тогда

$$|E\left(W_n\right)| = \sum_{i=1}^{k(n)} |E\left(W^{(i)}\right)| + |E\left(U\right)| + |E_1| + |E_2|.$$

Найдем мощности множеств E_1 и E_2. Зафиксируем произвольную вершину $v \in W^{(1)}$. Обозначим

$$d_n = |\{y \in W_n \setminus \left(W^{(1)} \cup U\right) \ \mid \ (v, y) \in E\left(W_n\right)\}|.$$

Докажем, что $d_n = (k\left(n\right) - 1)\left(\left[\frac{n}{4}\right] - 2 + 2 \cdot (|A_1| - 1)\right)$. Действительно, пусть $v = \{i, j, k\}$, $i \in A_1$, $j{,}k \in A_2$. Рассмотрим произвольную вершину $u = \{x, y, z\} \in W_n \setminus \left(W^{(1)} \cup U\right)$, соединенную ребром с v. Тогда имеют место два случая:

1. $x = i$ и $|\{j, k\} \cap \{y, z\}| = 0$. Существует $(k(n) - 1)\left(\left[\frac{n}{4}\right] - 2\right)$ вершин u, удовлетворяющих данному условию. Действительно, $k(n) - 1$ способами можно выбрать такое натуральное t, что $u \in W^{(t)}$, и еще $\left[\frac{n}{4}\right] - 2$ способами можно выбрать пару $\{y, z\}$.
2. $x \neq i$ и $|\{j, k\} \cap \{y, z\}| = 1$. Существует $2 \cdot (k(n) - 1) \cdot (|A_1| - 1)$ вершин u, удовлетворяющих данному условию. Действительно, $k(n) - 1$ способами можно выбрать такое натуральное t, что $u \in W^{(t)}$, еще двумя способами можно выбрать элемент, по которому пересекаются $\{j, k\}$ и $\{y, z\}$, и, наконец, $|A_1| - 1$ способом можно выбрать элемент x.

Ясно, что $d_n \sim k(n)\frac{5n}{4}$ при $n \to \infty$. Тогда в силу регулярности подграфа графа $G(n,3,1)$, порожденного множеством вершин $W_n \setminus U$, имеем

$$|E_1| = \frac{1}{2} \cdot d_n \cdot |W_n \setminus U| \sim \frac{5k(n)^2 n^3}{64},$$

$$|E_2| \leqslant \frac{1}{2} \cdot d_n \cdot |U| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{4}\right] \cdot d_n \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n^2}{16} \cdot k(n) \cdot \left(\left[\frac{n}{4}\right] - 2 + 2 \cdot (|A_1| - 1)\right) \sim \frac{5k(n)n^3}{64}$$

при $n \to \infty$. Итого имеем

$$|E(W_n)| \sim \frac{k(n)n^3}{64} + \frac{5k(n)^2 n^3}{64} + |E(U)| + |E_2| \sim \frac{5k(n)^2 n^3}{64} \sim \frac{5l(n)^2}{\alpha_n}$$

при $n \to \infty$. Таким образом, утверждение пункта 3 доказано.

2.5 Улучшение нижней оценки величины $r(l)$ для $n^2 = o(l)$

Как мы уже заметили, зазор между константами в теореме 5 довольно существенный. В работе [68] была доказана следующая теорема, которая улучшает данный зазор.

Теорема 6. *Пусть функция $l\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что $n^2 = o(l)$ при $n \to \infty$. Тогда существует такая функция $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h \sim \frac{3l^2}{2n}$ при $n \to \infty$ и $r(l(n)) \geqslant h(n)$ для любого достаточно большого $n \in \mathbb{N}$.*

Иными словами, новая оценка в полтора раза лучше старой. При этом в теореме 5 доказана верхняя оценка вида $\frac{5l^2}{n}$, и, тем самым, продвижение значимое.

2.5.1 Доказательство теоремы 6

Для произвольной вершины w и произвольного подмножества H множества вершин графа $G(n,3,1)$ обозначим $n(w,H)$ – число соседей вершины w в множестве H. Формально,

$$n(w,H) = |\{u \in H \mid (u,w) \in E_n\}|.$$

Пусть W_n – произвольное подмножество вершин графа $G(n,3,1)$. Пусть Γ – наибольшее по мощности независимое подмножество W_n. Разобьем множество вершин $W_n \setminus \Gamma$ на три непересекающихся подмножества следующим образом:

$$W_n \setminus \Gamma = U_1 \sqcup U_2 \sqcup U_3,$$

где

$$U_1 = \{u \in W_n \setminus \Gamma \mid n(u,\Gamma) = 1\},$$

$$U_2 = \{u \in W_n \setminus \Gamma \mid n(u,\Gamma) = 2\},$$

$$U_3 = \{u \in W_n \setminus \Gamma \mid n(u,\Gamma) \geqslant 3\}.$$

Данное разбиение корректно, так как для любой вершины $u \in W_n \setminus \Gamma$ существует такая вершина $w \in \Gamma$, что $(u,w) \in E_n$, иначе множество $\Gamma \cup \{u\}$ было бы независимым и имело бы большую мощность, чем Γ. Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Справедлива оценка* $|U_1 \sqcup U_2| \leqslant 35n^2$.

Доказательство. 1. Докажем, что $|U_1| \leqslant 3n^2$. Для произвольной вершины $v \in \Gamma$ положим

$$U_{1,v} = \{u \in U_1 \mid (u,v) \in E_n\}.$$

Тогда
$$|U_1| = \sum_{v\in\Gamma} |U_{1,v}|.$$
Пусть $v = \{x, y, z\} \in \Gamma$ соединена ребром с $w \in U_{1,v}$. Ясно, что носители вершин v и w пересекаются ровно по одному элементу. Данный элемент можно выбрать тремя способами. Без ограничения общности будем считать, что этим элементом является $x \in \mathcal{R}_n$. Тогда $w = \{x, a, b\}$, где $a, b \in \mathcal{R}_n \setminus \{x, y, z\}$. Ясно, что элемент a мы можем выбрать ровно $n-3$ способами. Заметим, что для выбранного a существует не более одного способа выбрать элемент b. Действительно, если бы существовали два возможных b_1 и b_2, то множество
$$\Gamma \setminus \{\{x, y, z\}\} \cup \bigcup_{i=1}^{2} \{\{x, a, b_i\}\}$$
было бы независимым и имело бы большую мощность, чем Γ. Независимость следует из того, что между вершинами $\{x, a, b_1\}$ и $\{x, a, b_2\}$ ребра нет, так как их носители пересекаются ровно по двум элементам. И никакая из вершин $\{x, a, b_i\}$, $i = 1, 2$, не соединена ребром с $\Gamma \setminus \{\{x, y, z\}\}$.

Таким образом,
$$|U_{1,v}| \leqslant 3\,(n-3) \leqslant 3n,$$
и, стало быть,
$$|U_1| \leqslant |\Gamma| \cdot 3n \leqslant 3n^2.$$

2. Докажем, что $|U_2| \leqslant 32n^2$. Для произвольной пары различных вершин $v_1, v_2 \in \Gamma$ положим
$$U_{2,v_1,v_2} = \{u \in U_2 \mid \ (u, v_1)\,,\ (u, v_2) \in E_n\}.$$

Тогда
$$|U_2| = \sum_{v_1, v_2 \in \Gamma} |U_{2,v_1,v_2}|.$$
Заметим, что вершины v_1 и v_2 не соединены ребром. Это равносильно тому, что их носители либо не пересекаются, либо пересекаются ровно по двум элементам. Стало быть,
$$\sum_{v_1, v_2 \in \Gamma} |U_{2,v_1,v_2}| = \sum_{(v_1,v_2) \in \Gamma_0} |U_{2,v_1,v_2}| + \sum_{(v_1,v_2) \in \Gamma_2} |U_{2,v_1,v_2}|,$$
где
$$\Gamma_0 = \{(v_1, v_2) \in \Gamma^2 : \ |\text{supp } v_1 \cap \text{supp } v_2| = 0\},$$
$$\Gamma_2 = \{(v_1, v_2) \in \Gamma^2 : \ |\text{supp } v_1 \cap \text{supp } v_2| = 2\}.$$

(a) Докажем, что для любых $(v_1, v_2) \in \Gamma_0$ выполнено $|U_{2,v_1,v_2}| \leqslant 18$. Заметим, что для каждой пары элементов (a, b), $a \in v_1$, $b \in v_2$ существует не более двух таких элементов c, что вершина $\{a, b, c\}$ соединена ребром только с вершинами v_1 и v_2 в Γ. Докажем от противного: пусть существует хотя бы три элемента c_1, c_2, c_3 с указанным свойством. Тогда множество вершин
$$\Gamma \setminus (\{v_1\} \cup \{v_2\}) \cup \bigcup_{i=1}^{3} \{\{a, b, c_i\}\}$$
является независимым и имеет большую мощность, чем мощность Γ. Действительно, вершины $\{a, b, c_i\}$, $i = 1,2,3$, попарно не соединены ребром, так как их носители пересекаются ровно по двум элементам. Более того, каждая из вершин $\{a, b, c_i\}$, $i = 1,2,3$, не соединена ребром ни с одной вершиной из $\Gamma \setminus (\{v_1\} \cup \{v_2\})$.

В таком случае, заметив, что пару элементов (a,b) можно выбрать не более, чем девятью способами, получаем

$$|U_{2,v_1,v_2}| \leqslant 9 \cdot 2 = 18$$

для $(v_1, v_2) \in \Gamma_0$.

(b) Рассмотрим множество U_{2,v_1,v_2} при $(v_1, v_2) \in \Gamma_2$. В данном случае положим $v_1 = \{a, b, c\}$, $v_2 = \{b, c, d\}$. Будем говорить, что вершина $t \in U_{2,v_1,v_2}$ является вершиной первого типа, если существует такой элемент $f \in \mathcal{R}_n \setminus \{a, b, c, d\}$, что $t = \{a, d, f\}$; и второго типа, если $|\mathrm{supp}\ t \cap \{b, c\}| = 1$. Таким образом,

$$U_{2,v_1,v_2} = U_{2,v_1,v_2,1} \sqcup U_{2,v_1,v_2,2},$$

где $U_{2,v_1,v_2,i}$ является подмножеством U_{2,v_1,v_2}, состоящим из вершин i-го типа, $i = 1, 2$.

i. Докажем, что $|U_{2,v_1,v_2,1}| \leqslant 2$. В этом случае ясно, что соответствующий элемент f можно выбрать не более чем двумя способами. Докажем это от противного: пусть существуют хотя бы три элемента f_1, f_2, f_3 с указанным свойством. Тогда множество

$$\Gamma \setminus (\{v_1\} \cup \{v_2\}) \cup \bigcup_{i=1}^{3} \{\{a, d, f_i\}\}$$

является независимым и имеет большую мощность, чем Γ. Таким образом, $|U_{2,v_1,v_2,1}| \leqslant 2$.

ii. Докажем, что $|U_{2,v_1,v_2,2}| \leqslant 4n$. Пусть вершины v_1 и v_2 соединены с вершиной $t \in U_{2,v_1,v_2,2}$. По определению ровно один из элементов b или c принадлежит носителю вершины t. Без ограничения общности пусть им будет элемент b. Тогда $t = \{b, f, g\}$, для некоторых $f, g \in \mathcal{R}_n \setminus \{a, b, c, d\}$. Ясно, что элемент f мы можем выбрать $n - 4$ способами. В случае выбранного элемента f элемент g мы можем выбрать не более, чем двумя способами. В противном случае множество

$$\Gamma \setminus (\{\{a, b, c\}\} \cup \{\{b, c, d\}\}) \cup \bigcup_{i=1}^{3} \{\{b, f, g_i\}\}$$

будет независимым и будет иметь большую мощность, чем мощность Γ. Таким образом, нужная оценка получена.

(c) Положим

$$\Omega = \{(v_1, v_2) \in \Gamma_2 \ : \ \exists w \in U_{2,v_1,v_2,2}\}.$$

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 2. Справедлива оценка $|\Omega| \leqslant 3n$.

Доказательство. Напомним, что независимое множество Γ можно представить в виде объединения множеств вершин первого, второго и третьего типов так, как это указано во введении. Таким образом, можно представить

$$\Omega = \Omega_1 \sqcup \Omega_2,$$

где Ω_1 состоит из множеств пар вершин, каждая из которых принадлежит некоторому (одному и тому же, так как носители вершин из разных множеств не персекаются) множеству вершин первого типа, а Ω_2 из множеств пар вершин, каждая из которых принадлежит некоторому (одному и тому же) множеству вершин второго типа.

i. Докажем, что $|\Omega_1| \leqslant \frac{6n}{4}$. Из описания структуры независимого множества Γ следует, что каждое множество вершин первого типа может быть представлено в виде $\cup_{k=1}^{K}\{\{i,j,x_k\}\}$, где K–некоторое натуральное число, а $i,j,x_k \in \mathcal{R}_n,\ k=1,\ldots,K$. Докажем, что если $(v_1,v_2)\in\Omega_1$ и

$$v_1, v_2 \in \cup_{k=1}^{K}\{\{i,j,x_k\}\},$$

то $K \leqslant 4$. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что $v_1 = \{i,j,x_1\}, v_2 = \{i,j,x_2\}, w = \{i,a,b\}$. Тогда существует некоторый элемент

$$x \in \{x_1,\ldots,x_k\} \setminus \{x_1,x_2,a,b\}.$$

В таком случае вершина w соединена ребром с вершинами v_1, v_2 и $\{i,j,x\}$, что противоречит нашему выбору v_1, v_2 и w. Стало быть, наше предположение неверно и $K \leqslant 4$. Следовательно, выполнено неравенство $|\Omega_1| \leqslant \frac{6n}{4}$, что и требовалось доказать.

ii. Докажем, что $|\Omega_2| \leqslant \frac{6n}{4}$. Из описания структуры независимого множества Γ следует, что существует не более $\frac{n}{4}$ множеств вершин второго типа, в каждом из которых содержится не больше четырех вершин. Таким образом, чтобы выбрать пару вершин $(v_1, v_2) \in \Omega_2$ необходимо выбрать некоторое множество вершин второго типа и пару вершин в нем. Таким образом, получается нужная оценка.

Итого,

$$|\Omega| = |\Omega_1 \sqcup \Omega_2| = |\Omega_1| + |\Omega_2| \leqslant \frac{6n}{4} + \frac{6n}{4} = 3n.$$

□

Таким образом, имеем

$$|U_2| = \sum_{v_1, v_2 \in \Gamma} |U_{2,v_1,v_2}| =$$

$$= \sum_{(v_1,v_2) \in \Gamma_0} |U_{2,v_1,v_2}| + \sum_{(v_1,v_2) \in \Gamma_2} |U_{2,v_1,v_2}| =$$

$$= \sum_{(v_1,v_2) \in \Gamma_0} |U_{2,v_1,v_2}| + \sum_{(v_1,v_2) \in \Gamma_2} |U_{2,v_1,v_2,1}| + \sum_{(v_1,v_2) \in \Omega} |U_{2,v_1,v_2,2}| \leqslant$$

$$\leqslant 18n^2 + 2n^2 + |\Omega| \cdot 4n \leqslant 32n^2.$$

□

Рассмотрим наибольшее по мощности независимое множество I_1 в графе, индуцированном множеством вершин W_n. Пусть его мощность равна β_1. Ясно, что $\beta_1 \leqslant \alpha_n$. Пусть F_1 – такое подмножество множества $W_n \setminus I_1$, что для любой вершины $v \in F_1$ выполнено $n(v, I_1) \leqslant 2$. Пусть $f_1 = |F_1|$.

Заметим, что каждая вершина $u \in W_n \backslash (I_1 \cup F_1)$ соединена хотя бы с тремя вершинами I_1. Более того, из леммы следует, что $f_1 \leqslant 35n^2$. Тогда мы уже нашли хотя бы $3(l(n) - \beta_1 - f_1) + f_1 \geqslant 3(l(n) - n) - 70n^2$ ребер. Выкинем из W_n независимое множество I_1 и выберем в получившемся множестве $W_n \setminus I_1$ новое наибольшее независимое множество I_2 мощности β_2. Ясно, что $\beta_2 \leqslant \alpha_n$. Пусть F_2 – такое подмножество множества $W_n \setminus (I_1 \cup I_2)$, что для любой вершины $v \in F_2$ выполнено $n(v, I_2) \leqslant 2$. Пусть $f_2 = |F_2|$. Тогда каждая вершина $u \in W_n \setminus (I_1 \cup I_2 \cup F_2)$ соединена хотя бы с тремя вершинами I_2. Из леммы имеем оценку $f_2 \leqslant 35n^2$. Стало быть, мы нашли еще хотя бы $3\left(l\left(n\right) - 2n\right) - 70n^2$ ребер. Повторив данную операцию $\left[\frac{l(n)}{\alpha_n}\right]$ шагов, мы получим оценку

$$r\left(l\left(n\right)\right) \geqslant \sum_{i=1}^{\left[\frac{l(n)}{\alpha_n}\right]} \left(3\left(l\left(n\right) - in\right) - 70n^2\right) \sim$$

$$\sim 3l\left(n\right)\frac{l\left(n\right)}{n} - 3n\frac{\frac{l(n)}{n}\left(\frac{l(n)}{n} + 1\right)}{2} - 70n^2\frac{l\left(n\right)}{n} \sim$$

$$\sim \frac{3l\left(n\right)^2}{2n} - 70nl\left(n\right) \sim \frac{3l\left(n\right)^2}{2n}$$

при $n \to \infty$.

2.6 Нижняя оценка величины $r\left(l\right)$ для больших l

В работе [69] была доказана следующая теорема. О важности данной теоремы мы поговорим в параграфе 2.8.

Теорема 7. *Имеют место три случая:*

1. *Пусть функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такова, что существуют константа C и функция $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $n^2 = o(g)$ при $n \to \infty$*

и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнена цепочка неравенств $C \cdot n^3 \leqslant l(n) \leqslant C_n^3 - g(n)$. *Пусть* $c_n = 1 - \frac{l(n)}{C_n^3}$. *Тогда существует такая функция* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что* $h = o(1)$ *при* $n \to \infty$ *и для любого достаточно большого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $r(l(n)) \geqslant \frac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n + \frac{c_n^2}{3}(1 + h(n)) - \frac{10}{n} + \frac{20 \cdot c_n}{n} - \frac{10 \cdot c_n^2}{3n}(1 + h(n))\right)$.

2. *Пусть функция* $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такова, что существуют константы* B, C *и функция* $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такая, что* $n = o(g)$ *при* $n \to \infty$ *и для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено* $g(n) \leqslant Bn^2$ *и* $C \cdot n^3 \leqslant l(n) \leqslant C_n^3 - g(n)$. *Пусть* $c_n = 1 - \frac{l(n)}{C_n^3}$. *Тогда существует такая функция* $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что* $h = o(1)$ *при* $n \to \infty$ *и для любого достаточно большого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $r(l(n)) \geqslant \frac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n + \frac{2c_n^2}{9}(1 + h(n)) - \frac{10}{n} + \frac{20 \cdot c_n}{n} - \frac{20 \cdot c_n^2}{9n}(1 + h(n))\right)$.

3. *Пусть функция* $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такова, что существует такая константа* C, *что для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнена цепочка неравенств* $C_n^3 - Cn \leqslant l(n) \leqslant C_n^3$. *Пусть* $c_n = 1 - \frac{l(n)}{C_n^3}$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *выполнено неравенство* $r(l(n)) \geqslant \frac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n - \frac{10}{n} + \frac{20 \cdot c_n}{n}\right)$.

2.6.1 Доказательство теоремы 7

Для произвольной функции l, удовлетворяющей неравенствам $n^2 = o(l)$ и $l \leqslant C_n^3$, и произвольного натурального числа n положим $c_n = 1 - \frac{l(n)}{C_n^3}$. Рассмотрим произвольное подмножество вершин $W \subseteq V_n$ мощности $l(n)$, положим $W_1 = V_n \setminus W$. Ясно, что $|W_1| = c_n C_n^3$. Обозначим через $E(W_1)$ множество рёбер, концами которых являются вершины из W_1. Формально,

$$E(W_1) = \{(x, y) \in E_n \mid x, y \in W_1\}.$$

Обозначим через E_1 множество рёбер, один конец которых принадлежит множеству W, а другой — множеству W_1:

$$E_1 = \{(x, y) \in E_n \mid x \in W,\ y \in W_1\}\,.$$

С учетом введенных обозначений мы имеем

$$E\,(W) = E_n \setminus (E\,(W_1) \sqcup E_1)\,.$$

Тогда ясно, что

$$|E\,(W)\,| = |E_n| - |E\,(W_1)\,| - |E_1|.$$

Оценим сверху величину $|E\,(W_1)\,| + |E_1|$. В силу регулярности графа $G\,(n{,}3{,}1)$ имеем

$$|E\,(W_1)\,| + |E_1| \leqslant d_n \cdot |W_1|.$$

Действительно, каждое ребро из множеств $E\,(W_1) \cup E_1$ имеет одним из своих концов вершину из W_1. Поэтому этих рёбер не больше, чем общее число рёбер, содержащих вершины из W_1. Данную оценку можно слегка уточнить.

Заметим, что при таком подсчете дважды были посчитаны рёбра из $E\,(W_1)$. Оценим мощность данного множества. Возможны три случая.

1. *Функция l удовлетворяет условиям пункта 1 теоремы 7.*

   В данном случае мощность множества рёбер $E\,(W_1)$ можно оценить с помощью результата теоремы 6. А именно, верна оценка:

   $$|E\,(W_1)\,| \geqslant \frac{3|W_1|^2}{2\alpha_n}\,(1 + o\,(1))\,.$$

   Формально говоря, это означает, что существует такая функция $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h = o\,(1)$ при $n \to \infty$ и для любого натурального n

выполнено неравенство

$$|E\left(W_1\right)| \geqslant \frac{3|W_1|^2}{2\alpha_n}\left(1+h\left(n\right)\right).$$

Тогда

$$|E\left(W_1\right)| + |E_1| \leqslant d_n \cdot |W_1| - \frac{3|W_1|^2}{2\alpha_n}\left(1+h\left(n\right)\right).$$

Положим

$$f\left(n\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \leqslant 10 \\ \frac{n^5}{8}\Bigg(1-2c_n+\frac{c_n^2}{3}\left(1+h\left(n\right)\right)- & \\ -\frac{10}{n}+\frac{20\cdot c_n}{n}-\frac{10\cdot c_n^2}{3n}\left(1+h\left(n\right)\right)\Bigg) & \text{при} \quad n > 10 \end{cases}$$

Отметим, что константа 10 в определении функции f не несёт значительной смысловой нагрузки — она нужна лишь для упрощения некоторых выкладок ниже.

Заметим, что $f\left(n\right) \sim n^5\left(\frac{1}{8}-\frac{c_n}{4}+\frac{c_n^2}{24}\right)$ при $n \to \infty$. Стало быть, осталось доказать, что $r\left(l\left(n\right)\right) \geqslant f\left(n\right)$ для любого достаточно большого натурального n. Для этого запишем следующую цепочку неравенств:

$$\left(l\left(n\right)\right) \geqslant |E\left(W\right)| \geqslant \frac{3}{2}C_{n-3}^2 C_n^3 - d_n \cdot |W_1| + \frac{3|W_1|^2}{2\alpha_n}\left(1+h\left(n\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2}C_{n-3}^2 C_n^3 - 3\cdot C_{n-3}^2 \cdot |W_1| + \frac{3|W_1|^2}{2n}\left(1+h\left(n\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}C_{n-3}^2 C_n^3 - 3\cdot C_{n-3}^2 \cdot c_n \cdot C_n^3 + \frac{3\cdot c_n^2 \cdot \left(C_n^3\right)^2}{2n}\left(1+h\left(n\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}C_{n-3}^2 C_n^3\left(1-2c_n+\frac{c_n^2\cdot C_n^3}{n\cdot C_{n-3}^2}\left(1+h\left(n\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{n^5}{8}\left(1 - \frac{10}{n} + \frac{35}{n^2} - \frac{50}{n^3} + \frac{24}{n^4}\right) \cdot$$

$$\cdot \left(1 - 2c_n + \frac{c_n^2 \cdot (n-1)(n-2)}{3(n-3)(n-4)}(1 + h(n))\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n^5}{8}\left(1 - \frac{10}{n}\right) \cdot \left(1 - 2c_n + \frac{c_n^2}{3}(1 + h(n))\right) \geqslant f(n).$$

2. *Функция l удовлетворяет условиям пункта 2 теоремы 7.*

В данном случае воспользуемся результатами пунктов 1 и 2 теоремы 4. В силу этих результатов имеет место оценка:

$$|E(W_1)| \geqslant \frac{|W_1|^2}{\alpha_n}(1 + o(1)).$$

Формально говоря, это означает, что существует такая функция $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h = o(1)$ при $n \to \infty$ и для любого натурального n выполнено неравенство

$$|E(W_1)| \geqslant \frac{|W_1|^2}{\alpha_n}(1 + h(n)).$$

Тогда

$$|E(W_1)| + |E_1| \leqslant d_n \cdot |W_1| - \frac{|W_1|^2}{\alpha_n}(1 + h(n)).$$

Положим

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \leqslant 10 \\ \frac{n^5}{8}\Big(1 - 2c_n + \frac{2c_n^2}{9}(1 + h(n)) - & \\ - \frac{10}{n} + \frac{20 \cdot c_n}{n} - \frac{20 \cdot c_n^2}{9n}(1 + h(n))\Big) & \text{при} \quad n > 10 \end{cases}$$

Заметим, что $f(n) \sim n^5\left(\frac{1}{8} - \frac{c_n}{4} + \frac{c_n^2}{36}\right)$ при $n \to \infty$. Стало быть, как и в предыдущем пункте, осталось доказать, что $r(l(n)) \geqslant f(n)$ для любого достаточно большого натурального n.

Для этого запишем следующую цепочку неравенств:

$$r\left(l\left(n\right)\right) \geqslant \left|E\left(W\right)\right| \geqslant \frac{3}{2}C_{n-3}^{2}C_{n}^{3} - d_{n}\cdot\left|W_{1}\right| + \frac{\left|W_{1}\right|^{2}}{\alpha_{n}}\left(1+h\left(n\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{3}{2}C_{n-3}^{2}C_{n}^{3} - 3\cdot C_{n-3}^{2}\cdot\left|W_{1}\right| + \frac{\left|W_{1}\right|^{2}}{n}\left(1+h\left(n\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}C_{n-3}^{2}C_{n}^{3} - 3\cdot C_{n-3}^{2}\cdot c_{n}\cdot C_{n}^{3} + \frac{c_{n}^{2}\cdot\left(C_{n}^{3}\right)^{2}}{n}\left(1+h\left(n\right)\right) =$$

$$= \frac{3}{2}C_{n-3}^{2}C_{n}^{3}\left(1-2c_{n}+\frac{2}{3}\frac{c_{n}^{2}\cdot C_{n}^{3}}{n\cdot C_{n-3}^{2}}\left(1+h\left(n\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{n^{5}}{8}\left(1-\frac{10}{n}+\frac{35}{n^{2}}-\frac{50}{n^{3}}+\frac{24}{n^{4}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1-2c_{n}+\frac{2\cdot c_{n}^{2}\cdot\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{9\left(n-3\right)\left(n-4\right)}\left(1+h\left(n\right)\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n^{5}}{8}\left(1-\frac{10}{n}\right)\cdot\left(1-2c_{n}+\frac{2\cdot c_{n}^{2}}{9}\left(1+h\left(n\right)\right)\right) \geqslant f\left(n\right).$$

3. *Функция l удовлетворяет условиям пункта 3 теоремы 7.*

Заметим, что в данном случае множество W_1 может вовсе не содержать рёбер. Поэтому от улучшения оценки придётся отказаться. Положим

$$f\left(n\right) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \leqslant 10 \\ \frac{n^{5}}{8}\left(1-2c_{n}-\frac{10}{n}+\frac{20\cdot c_{n}}{n}\right) & \text{при} \quad n > 10 \end{cases}$$

Заметим, что $f\left(n\right) \sim n^{5}\left(\frac{1}{8}-\frac{c_{n}}{4}\right)$ при $n \to \infty$. Стало быть, как и в предыдущем пункте, осталось доказать, что $r\left(l\left(n\right)\right) \geqslant f\left(n\right)$ для любого достаточно большого натурального n. Для этого запишем следующую цепочку неравенств:

$$r\left(l\left(n\right)\right) \geqslant \left|E\left(W\right)\right| \geqslant \frac{3}{2}C_{n-3}^{2}C_{n}^{3} - d_{n}\cdot\left|W_{1}\right| =$$

$$= \frac{3}{2} C_{n-3}^2 C_n^3 - 3 \cdot C_{n-3}^2 \cdot |W_1| = \frac{n^5}{8} \cdot \left(1 - \frac{10}{n}\right) \cdot (1 - 2c_n) \geqslant f(n).$$

2.7 Верхняя оценка величины $r(l)$ для $n = o(l)$

В работе [69] была доказана следующая верхняя оценка.

Теорема 8. *Пусть дана произвольная функция $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с ограничением $n = o(l)$. Тогда существует такая функция $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что $h(n) \sim \frac{9l(n)^2}{2\alpha_n}$ при $n \to \infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $r(l(n)) \leqslant h(n)$.*

2.7.1 Доказательство теоремы 8

Зафиксируем произвольную функцию l, удовлетворяющую условию теоремы 8, и число n. Возьмём наименьшее натуральное число t_n, с которым $C_{t_n}^3 \cdot \left[\frac{n}{t_n}\right] \geqslant l(n)$. Ясно, что $t_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Значит, $t_n \sim \sqrt{\frac{6l}{n}}$ при $n \to \infty$. Положим

$$S_1 = \{1, 2, \ldots, t_n\},$$

$$S_2 = \{t_n + 1, t_n + 2, \ldots, 2 \cdot t_n\},$$

$$\ldots$$

$$S_{\left[\frac{n}{t_n}\right]} = \left\{\left[\frac{n}{t_n}\right] \cdot t_n - t_n + 1, \left[\frac{n}{t_n}\right] \cdot t_n - t_n + 2, \ldots, \left[\frac{n}{t_n}\right] \cdot t_n\right\}.$$

Подчеркнём, что мощность каждого из множеств S_i, $i = 1, \ldots, \left[\frac{n}{t_n}\right]$, равна t_n.

Для каждого $i = 1, \ldots, \left[\frac{n}{t_n}\right]$ положим

$$U_i = \bigcup_{x \in S_i,\ y \in S_i\ z \in S_i,\ x \neq y \neq z} \{\{x, y, z\}\}.$$

Иными словами, множество U_i — это подмножество множества вершин графа $G(n, 3, 1)$, носители которых лежат во множестве S_i.

Заметим, что в силу выбора величины t_n данный выбор подмножеств корректен. То есть, для каждого множества S_i существуют вершины графа $G(n, 3, 1)$ с носителем, лежащим в S_i. Коль скоро U_i — это подмножество множества вершин графа $G(n, 3, 1)$, мы можем положить

$$T_i = \{(v, w)\ \mid v \in U_i,\ w \in U_i,\ (v, w) \in E_n\}.$$

Иными словами, T_i – это множество рёбер графа $G(n, 3, 1)$, вершинами которых являются вершины из множества U_i. Посчитаем мощности множеств U_i и T_i.

Легко видеть, что

$$|U_i| = C^3_{|S_i|} = \frac{|S_i^3|}{6}(1 + o(1)) = \frac{t_n^3}{6}(1 + o(1)).$$

Для оценки величины $|T_i|$ заметим, что подграф графа $G(n, 3, 1)$, индуцированный подмножеством вершин U_i, является регулярным. Положим d_i – степень вершины в подграфе графа $G(n, 3, 1)$, индуцированном подмножеством вершин U_i. Легко видеть, что

$$d_i = 3C^2_{|S_i|-3} = \frac{3|S_i|^2}{2}(1 + o(1)) = \frac{3t_n^2}{2}(1 + o(1)).$$

Стало быть,

$$|T_i| = \frac{|U_i| \cdot d_i}{2} = \frac{t_n^5}{8}(1 + o(1)).$$

Перейдём к построению множества W_n, обладающего описанными в начале доказательства свойствами. Положим

$$W_n = \bigcup_{i=1}^{\left[\frac{n}{t_n}\right]} U_i.$$

Заметим, что для любых $i,\ j \leqslant \left[\frac{n}{t_n}\right]$, множества вершин U_i и U_j не пересекаются. Таким образом, объединение выше на самом деле является дизъюнктным.

Положим

$$E(W_n) = \{(u, v) \mid u \in W_n,\ v \in W_n,\ (u, w) \in E_n\}.$$

Иными словами, $E\left(W_n\right)$ — это множество рёбер в подграфе графа $G(n, 3, 1)$, индуцированным вершинами W_n. Поскольку множество W_n является дизъюнктным объединением множеств вершин U_i, которые попарно не пересекаются, то и множество рёбер $E(W_n)$ является дизъюнктным объединением множеств рёбер T_i:

$$E(W_n) = \bigsqcup_{i=1}^{\left[\frac{n}{t_n}\right]} T_i.$$

Оценим мощности множеств W_n и $E(W_n)$. Из вышесказанного следует, что

$$|W_n| = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{t_n}\right]} |U_i| = \left[\frac{n}{t_n}\right] \cdot C_{t_n}^3 \geqslant l(n).$$

Также ясно, что $|W_n| = \frac{n \cdot t_n^2}{6}(1 + o(1))$ при $n \to \infty$. Далее,

$$|E\left(W_n\right)| = \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{t_n}\right]} |T_i| = \left[\frac{n}{t_n}\right] \cdot |T_1| \cdot (1 + o\left(1\right)) = \frac{n \cdot t_n^4}{8}\left(1 + o\left(1\right)\right).$$

Таким образом,

$$|E(W_n)| = \frac{n \cdot t_n^4}{8}(1 + o(1)) = \frac{9}{2}\frac{|W_n|^2}{\alpha_n}(1 + o(1)).$$

Стало быть, для каждой функции $l(n)$, удовлетворяющей условию теоремы 8, и для каждого n мы построили пример множества W_n мощности $l(n)$, для которого величина $r(W_n)$ оценивается сверху нужным образом.

2.8 Выводы

Проанализируем результаты данной главы. В теореме 4 мы нашли асимптотическое значение величины $r(l)$ при $n \to \infty$. В случае теоремы 5 мы нашли порядок величины $r(l(n))$. Наконец, случай из теоремы 7 исследован не до конца, но оценка, полученная в нем, обладает тем свойством, что $r(l(n)) \sim |E_n|$ при $l(n) \sim |V_n|$ и $n \to \infty$.

Результат теоремы 6 улучшает оценку, полученную в теореме 5. Тем не менее, эта оценка по-прежнему не является точной: величина $r(l(n))$ удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$\frac{3l(n)^2}{2\alpha_n}(1 + o(1)) \leqslant r(l(n)) \leqslant \frac{9l(n)^2}{2\alpha_n}(1 + o(1))$$

при $n \to \infty$. Между нижней и верхней оценками имеется зазор в 3 раза.

Посмотрим теперь на полученные результаты с несколько иной точки зрения. А именно, можно записать лучшую известную нам верхнюю оценку в виде

$$r(l(n)) \leqslant \frac{9l(n)^2}{2n}(1 + o(1)) = \frac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n + c_n^2\right)(1 + o(1)), \tag{2.1}$$

где c_n из формулировки теоремы 7. В таком же виде можно записать и нижнюю оценку из той же теоремы:

$$r\left(l\left(n\right)\right) \geqslant \frac{n^5}{8}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}c_n + \frac{1}{3}c_n^2\right)\left(1 + o\left(1\right)\right). \tag{2.2}$$

Конечно, если $c_n \to 0$, то оценки пунктов 1–3 новой теоремы асимптотически совпадают с оценкой (2.1) и в этом случае оценка (2.2) им не конкурент. Однако в условиях теоремы 7 возможно и что c_n не стремится к нулю (хотя и не превосходит константы, строго меньшей единицы). В этом случае оценки из пунктов 1–3 становятся лучше, чем оценка из теоремы 6 при выполнении неравенства

$$\frac{n^5}{8}\left(1 - 2c_n - \frac{10}{n} + \frac{20 \cdot c_n}{n}\right) \geqslant \frac{3\left(c_n C_n^3\right)^2}{2},$$

которое выполнено при $c_n \leqslant 0.486\ldots$ и достаточно больших значениях $n \in \mathbb{N}$.

Глава 3. Анализ особых подграфов графа $G(n, 3, 1)$

В данной главе мы рассматриваем особые подграфы графа $G(n, 3, 1)$. А именно, в параграфе 3.1 мы вводим понятия *звездного множества* и его диаметра. Оказывается, как мы увидим в параграфе 3.2, что для подграфов с ограничением на диаметр звездного множества можно значительно улучшить оценку величины $r(l)$. Результаты данной главы опубликованы в работе [70].

3.1 Определение звёздного множества

Заметим, что все оценки, приведённые выше, выполнены для всех возможных подграфов графа $G(n, 3, 1)$. Возникает вопрос, а можно ли улучшить оценки, если рассмотреть только лишь подграфы определённой структуры? Например, подграфы, не содержащие какой-нибудь заданной конструкции. В работе [69] автору удалось значительно улучшить оценки величины $r(l(n))$ для некоторого класса подграфов графа $G(n, 3, 1)$. Для формулировки этих результатов нам потребуется определить некоторые дополнительные понятия.

Звездным множеством будем называть любое независимое множество, состоящее из вершин, принадлежащих множествам первого и третьего типов. Диаметром $d(A)$ звездного множества A назовём мощность носителя A. И, наконец, диаметром $d(W)$ множества вершин W назовём максимальный диаметр звездного множества, содержащегося в W. Формально говоря,

$$d(W) = \max_{A \subset W} \{ d(A) \mid A \text{ является звездным множеством} \}.$$

Также для произвольной функции $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющей неравенству $\rho(n) \leqslant n$ для любого натурального n, и произвольного $W \subset V_n$ положим

$$r_\rho(W) = \begin{cases} r(W) & \text{при} \quad d(W) \leqslant \rho(n) \\ C_n^5 & \text{при} \quad d(W) > \rho(n) \end{cases}$$

Рассмотрим подробнее определение функции r_ρ. Легко заметить, что для всех $W \subset V_n$ выполнено неравенство $r_\rho(W) \geqslant r(W)$, а любые нижние оценки являются либо тривиальными, либо оценками для подмножеств вершин W, у которых диаметр не превосходит некоторой функции ρ.

3.2 Нижняя оценка для подграфов с ограничением на размер звёздного множества

Основным результатом статьи [70] и данной главы является следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть функции $l : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таковы, что $n^2 = o(l)$ при $n \to \infty$, и для любого натурального n выполнено неравенство $l(n) \leqslant C_n^3$. Тогда для любого $W \subset V_n$ мощности $l(n)$ выполнено неравенство*

$$r_\rho(W) \geqslant \frac{l^2}{n} \left(2 - \frac{\rho(n)^3}{6l} + o(1) \right) \tag{3.1}$$

при $n \to \infty$.

Как уже было замечено, теорема 9 не всегда является улучшением старых результатов. Более того, в некоторых случаях оценка из теоремы 9 является тривиальной. А именно, в случае $d(W) > \rho(n)$ доказывать нечего — число рёбер в произвольном подмножестве вершин графа $G(n, 3, 1)$ никак не может быть больше общего числа рёбер графа. С другой стороны, при $d(W) \leqslant \rho(n)$ оценка является нетривиальной, и её-то мы и будем доказывать!

Ясно, что при $\rho^3 = o(l)$ результат теоремы 9 является значимым улучшением на рассматриваемом классе графов по сравнению со всеми прежними результатами, ведь константа $\frac{3}{2}$ в них заменена константой 2. При l порядка n^3 данное условие состоит в малости ρ в сравнении с n. Но даже если ρ порядка n, новая оценка может быть сильнее прежних. Например, если $l = \frac{C_n^3}{2}$, а $\rho = \frac{n}{2}$, то правая часть оценки из теоремы может быть записана в виде $\frac{l^2}{n}(1.75 - \dots)$, что является несомненным улучшением старых результатов. Тем не менее, оценка из теоремы 9 по-прежнему далека от лучшей верхней оценки. Действительно, известные нам результаты можно упрощённо записать в виде

$$\frac{9l^2}{2\alpha_n}(1 + o(1)) \geqslant r(W) \geqslant \frac{l^2}{n} \cdot (2 - \dots).$$

Как легко заметить, зазор между левой и правой частями неравенства по-прежнему существенный.

3.2.1 Вспомогательные утверждения и определения

Перед началом доказательства введём вспомогательное определение и сформулируем несколько вспомогательных утверждений. Для произвольного множества вершин S и произвольной вершины $v \notin S$ положим

$$n(v, S) = |\{u \in S \mid (u, v) \in E_n\}|.$$

Иными словами, $n(v, S)$ обозначает число вершин множества S, соединённых ребром с вершиной v.

Пусть H – произвольное подмножество вершин графа $G(n, 3, 1)$. Пусть также I – наибольшее независимое подмножество подграфа графа $G(n, 3, 1)$, индуцированного множеством вершин H. Очевидно, $|I| \leqslant n$. Положим

$$B_i = \{w \in H \mid n(w, I) = i\}.$$

Иными словами, B_i – это подмножество вершин графа H, которые соединены ровно с i вершинами из множества I. Оценим мощности множеств B_i для некоторых значений i.

Очевидно, что $|B_0| = 0$, так как иначе I не было бы максимальным независимым множеством. В статье [68] была доказана следующая лемма.

Лемма 2. *В обозначениях выше выполнено неравенство* $|B_1| + |B_2| \leqslant 35 \cdot n^2$.

Таким образом, число вершин, соединённых с не более, чем двумя вершинами независимого множества I, достаточно маленькое. Оказывается, число вершин, соединённых ровно с тремя вершинами множества I, также не является достаточно большим. А именно, верна следующая лемма.

Лемма 3. $|B_3| \leqslant \frac{(\rho(n))^3}{6} + 20n^2$.

Доказательство леммы 3 будет приведено в пункте 3.2.3.

3.2.2 Доказательство теоремы 9

Теперь перейдём к доказательству теоремы. Пусть I_1 – наибольшее независимое подмножество вершин множества W. Положим $\alpha_1 = |I_1|$. Ясно, что $\alpha_1 \leqslant n$. Рассмотрим множество $W_1 = W \setminus I_1$. Каждая вершина из данного множества соединена как минимум с одной вершиной из множества I_1, иначе I_1 не было бы максимальным. Положим,

$$f_1 = |\{v \in W_1 \mid n\,(v, I_1) \leqslant 2\}|.$$

Иными словами, f_1 – это мощность множества вершин из множества W_1, соединенных с не более чем двумя вершинами из I_1. Как следует из леммы 1, $f_1 \leqslant 35 \cdot n^2$. Также, пусть f_2 обозначает число вершин, соединенных ровно с тремя вершинами из множества I_1. Формально говоря,

$$f_2 = |\{v \in W_1 \mid n\,(v, I_1) = 3\}|.$$

По лемме 2 выполнено неравенство $f_2 \leqslant \frac{(\rho(n))^3}{6} + 20n^2$. Остальные вершины из множества W_1 соединены хотя бы с четырьмя вершинами из множества I_1. Стало быть, число рёбер между вершинами множеств W_1 и I_1 можно оценить снизу как

$$4\,(l - \alpha_1 - f_1 - f_2) + 3f_2 + 2f_1 =$$

$$= 4l - 4\alpha_1 - 2f_1 - f_2 \geqslant 4l - 4n - 90 \cdot n^2 - \frac{(\rho\,(n))^3}{6}.$$

Теперь попробуем повторить подобную операцию несколько раз. А именно рассмотрим множество вершин W_1. Выберем в нём максимальное независимое множество и обозначим его I_2. Аналогично положим $\alpha_2 = |I_2|$.

Ясно, что $\alpha_2 \leqslant \alpha_1 \leqslant n$, так как на первом шаге мы взяли наибольшее независимое множество. Обозначим $W_2 = W_1 \setminus I_2$. Опять же, как и в предыдущем случае, каждая из вершин множества W_2 соединена хотя бы с одной вершиной из множества I_2. Положим

$$f_3 = |\{v \in W_2 \mid n\,(v, I_2) \leqslant 2\}|.$$

Иными словами, f_3 – это мощность множества вершин из W_2, соединённых с не более чем двумя вершинами из множества I_2. И, наконец, через f_4 обозначим число вершин из множества W_2, соединённых ровно с тремя вершинами из I_2. Формально говоря,

$$f_4 = |\{v \in W_2 \mid n\,(v, I_2) = 3\}|.$$

Из леммы 2 следует, что $f_4 \leqslant \frac{(\rho(n))^3}{6} + 20n^2$. Остальные вершины из множества W_2, очевидно, соединены хотя бы с четырьмя вершинами из I_2. Таким образом, количество рёбер между вершинами из множеств W_2 и I_2 можно оценить снизу как

$$4\,(l - \alpha_1 - \alpha_2 - f_3 - f_4) + 3f_4 + 2f_3 =$$

$$= 4l - 4\alpha_1 - 4\alpha_2 - 2f_3 - f_4 \geqslant 4l - 8n - 90n^2 - \frac{(\rho\,(n))^3}{6}.$$

Продолжим данный процесс

$$t = \left[\frac{l}{n}\right]$$

шагов. Получим, что мы найдём как минимум

$$\sum_{i=1}^{t} \left(4l - 4in - 90 \cdot n^2 - \frac{(\rho\,(n))^3}{6}\right)$$

рёбер. Оценим каждое слагаемое данной суммы отдельно, а потом из этих оценок получим оценку всей суммы.

$$\sum_{i=1}^{t} 4l = 4l \cdot t \geqslant 4l \left(\frac{l}{n} - 1 \right) = \frac{4l^2}{n} - 4l. \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{t} 4in = 4n \frac{t\,(t+1)}{2} \leqslant \frac{4n}{2} \frac{l}{n} \left(\frac{l}{n} + 1 \right) = \frac{2l^2}{n} + 2l. \tag{3.3}$$

$$\sum_{i=1}^{t} 90 \cdot n^2 = 90 \cdot tn^2 \leqslant 90 \cdot n^2 \frac{l}{n} = 90 \cdot n \cdot l. \tag{3.4}$$

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{\rho\,(n)^3}{6} = \frac{t \cdot \rho\,(n)^3}{6} \leqslant \frac{\rho\,(n)^3 \cdot l}{6n}. \tag{3.5}$$

Просуммируем неравенства 3.2–3.5 и получим, что число рёбер, найденное нами в результате описанной выше процедуры, не меньше, чем

$$\frac{l^2}{n} \left(2 - \frac{\rho\,(n)^3}{6l} - 90 \frac{n^2}{l} - 6 \frac{n}{l} \right) = \frac{l^2}{n} \left(2 - \frac{\rho\,(n)^3}{6l} + o\,(1) \right)$$

при $n \to \infty$. Таким образом, утверждение теоремы доказано.

3.2.3 Доказательство леммы 3

Пусть w – произвольная вершина, принадлежащая множеству B_3. По определению, она соединена ровно с тремя вершинами независимого множества I. В силу утверждения 1 вершины независимого множества I можно разбить на три непересекающихся подмножества: подмножество, все вершины которого лежат в некотором множестве вершин первого типа, подмножество вершин, все вершины которого лежат в некотором множестве второго типа, и, наконец, подмножество вершин, все вершины которого лежат в некотором множестве третьего типа.

Введём дополнительные обозначения. Пусть

$$F = \bigcup_{t \in \mathcal{F}} \{F_t\} \text{ – множество всех уникальных подмножеств}$$
$$\text{вершин } I \text{ первого типа,}$$
$$S = \bigcup_{t \in \mathcal{S}} \{S_t\} \text{ – множество всех уникальных подмножеств}$$
$$\text{вершин } I \text{ второго типа,}$$
$$T = \bigcup_{t \in \mathcal{T}} \{T_t\} \text{ – множество всех уникальных подмножеств}$$
$$\text{вершин } I \text{ третьего типа.}$$

Напомним, что носители всех упомянутых множеств попарно не пересекаются.

Введём два вспомогательных определения. Напомним, что множеством вершин второго типа является множество вершин S, для которого существуют такие четыре различных элемента $\{i, j, k, l\} \in \mathcal{R}_n$, что носители вершин множества S являются подмножествами множества $\{i, j, k, l\}$. Очевидно, что для фиксированных элементов $\{i, j, k, l\}$ существует ровно четыре уникальные вершины графа $G(n, 3, 1)$, носители которых лежат в множестве $\{i, j, k, l\}$. Так что совершенно ясно, что множество вершин второго типа может иметь мощность как минимум 3 и как максимум 4. Таким образом, будем называть множество вершин второго типа *полным*, если его мощность равняется четырём, а иначе, если его мощность равняется трём, то *неполным*.

Аналогично, будем называть элемент a, принадлежащий носителю множества вершин второго типа, *полным*, если он принадлежит трём вершинам множества вершин второго типа, а иначе *неполным*.

Перейдём к доказательству леммы. Пусть вершина w пересекается с вершинами v_1, v_2, v_3 из множества I. Каждая из этих вершин принадлежит какому-либо подмножеству вершин либо первого, либо второго, либо третьего типа. Рассмотрим все возможные случаи подобной принадлежности.

1. **Существует такое полное множество вершин A второго типа, что $|\mathbf{supp}\,(A) \cap \mathbf{supp}\,(w)\,| = 1$.**

   Иными словами, w пересекается с каким-то полным множеством вершин по одному элементу. Пусть $x = \mathrm{supp}\,(A) \cap \mathrm{supp}\,(w)$. Пусть также $w = \{x, y, z\}$. В таком случае элемент y можно выбрать $n-4$ способами, а оставшийся элемент z не более чем четырьмя способами, так как иначе мы нашли бы независимое множество большей мощности, чем исходное. Элемент x можно выбрать 4 способами, а само множество A можно выбрать не более чем $\frac{n}{4}$ способами. Таким образом, в этом случае мы имеем не больше $4 \cdot \frac{n}{4} \cdot (n-4) \cdot 4 \leqslant 4n^2$ вершин, удовлетворяющих данному условию.

2. **Существует такое полное множество вершин A второго типа, что $|\mathbf{supp}\,(A) \cap \mathbf{supp}\,(w)\,| = 2$.**

   Иными словами, существует такое полное множество вершин второго типа, с которым вершина w пересекается ровно по двум элементам. Пусть множество A имеет носитель $\{x, y, z, t\}$, а w имеет вид $\{x, y, a\}$. Пару элементов $\{x, y\}$ можно выбрать C_4^2 способами, а оставшийся элемент a можно выбрать $n-4$ способами. Само множество A можно выбрать не более чем $\frac{n}{4}$ способами. Таким образом, в этом случае мы имеем не больше $\frac{n}{4} \cdot C_4^2 \cdot (n-4) \leqslant 2n^2$ вершин, удовлетворяющих данному условию.

3. **Существует такое неполное множество вершин A второго типа, что $|\mathbf{supp}\,(A) \cap \mathbf{supp}\,(w)\,| = 1$.**

   Иными словами, существует такое неполное множество вершин, с которым вершина w пересекается ровно по одному элементу. Обозначим этот элемент x. Тогда имеют место два случая:

   – **Элемент x является полным.** Пусть неполное множество вершин A имеет вид $\{\{x,y,z\},\{x,y,t\},\{x,z,t\}\}$, а вершина w имеет вид $\{x,a,b\}$. Элемент a можно выбрать не более чем $n-4$ способами, а элемент b при фиксированном элементе a можно выбрать не более чем четырьмя способами (иначе выбранное независимое множество не является максимальным). Таким образом, в данном случае мы имеем не более чем $\frac{n}{4}\cdot(n-4)\cdot 4 \leqslant n^2$ вершин, удовлетворяющих условию.

   – **Элемент x является неполным.** Пусть неполное множество вершин A имеет вид $\{\{x,y,z\},\{x,y,t\},\{y,z,t\}\}$, а вершина w имеет вид $\{x,a,b\}$. В таком случае, вершина w пересекается с двумя вершинами из A и с одной вершиной из остального независимого множества. Пусть существует такая вершина $u_1 \in I$, для которой $\mathrm{supp}\,(u_1) \cap \mathrm{supp}\,(w) = \{a\}$, и не существует такой вершины u_2, для которой $\mathrm{supp}\,(u_2) \cap \mathrm{supp}\,(w) = \{b\}$. Элемент a можно выбрать не более, чем $n-4$ способами. А элемент b можно выбрать не более, чем 5 способами, так как иначе мы бы могли найти большее независимое множество, чем мы выбрали изначально. А именно, если бы существовали элементы $b_1, b_2, \ldots, b_5$, удовлетворяющие условиям выше, то множество

$$\left(I \cup_{i=1}^{5} \{\{x, a, b_i\}\}\right) \setminus \left(\{\{x, y, z\}\} \cup\right.$$

$$\left.\cup \{\{x, y, t\}\} \cup \{\{y, z, t\}\} \cup \{u_1\}\right)$$

было бы независимым и имело бы большую мощность, чем I. Само множество A можно выбрать не более, чем $n-4$ способами. Таким образом, в данном случае мы нашли не больше, чем $\frac{n}{4} \cdot (n-4) \cdot 5 \leqslant 2n^2$ вершин.

4. **Существует такое неполное множество вершин A второго типа, что $|\mathbf{supp}\,(A) \cap \mathbf{supp}\,(w)\,| = 2$.**

   Иными словами, w пересекается с неполным множеством вершин A по двум элементам. Данные 2 элемента можно выбрать не более, чем C_4^2 способами. Оставшийся третий элемент вершины w можно выбрать не более, чем $n-4$ способами. А само множество A можно выбрать не более, чем $\frac{n}{4}$ способами. Таким образом, мы имеем не более $\frac{n}{4} \cdot C_4^2 \cdot (n-4) \leqslant 2n^2$ вершин, удовлетворяющих данному условию.

5. **Не существует множества вершин A второго типа, для которого $|\mathbf{supp}\,(A) \cap \mathbf{supp}\,(w)\,| > 0$.**

   Иными словами, вершина w не пересекается ни с полным, ни с неполным множеством вершин. В данном случае w пересекается только с вершинами первого и третьего типов. Возможны два случая: либо носитель вершины w полностью лежит в объединении носителей вершин первого и третьего типов, либо нет. Обозначим $X_n = \mathrm{supp}\,(\cup_{a \in F \cup T} \{a\})$. Иными словами, X_n – это носитель объединения вершин первого и третьего типов.

   – $\mathbf{supp}\,(w) \subset X_n$

Иными словами, носитель вершины w лежит в объединении носителей вершин первого и третьего типа. Ясно, что в этом случае существует не более $C^3_{\rho(n)}$ вершин, удовлетворяющих данным условиям.

– $\mathbf{supp}\,(w) \not\subset X_n$

Иными словами, носитель вершины w не лежит в объединении носителей вершин первого и третьего типа. Возможны два случая:

(a) $|\mathrm{supp}\,(w) \cap X_n| = 1$. Поскольку вершина w пересекается ровно с тремя вершинами независимого множества I, то данное равенство возможно только в том случае, если вершина w пересекается с некоторым множеством вершин первого типа мощности 3. Пусть вершина w имеет вид $\{x, y, z\}$, причем элемент x принадлежит трём вершинам некоторого множества вершин первого типа. Тогда элемент x можно выбрать не более, чем n способами, элемент y можно выбрать не более, чем n способами, а элемент z можно выбрать не более, чем тремя способами, так как иначе множество I не было бы максимальным. Таким образом, в данном случае существует не больше $3 \cdot n^2$ вершин.

(b) $|\mathrm{supp}\,(w) \cap X_n| = 2$. Пусть вершина w имеет вид $\{x, y, z\}$, причём элементы x, y принадлежат множеству X_n. Пару элементов x, y можно выбрать не более, чем n^2 способами, а элемент z можно выбрать не более, чем тремя способами, так как иначе независимое множество I не было бы максимальным. Таким образом, в данном случае существует не больше $3 \cdot n^2$ вершин.

Итого, число вершин, удовлетворяющих данному условию, не превосходит $6n^2$.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные варианты взаимного расположения вершины w и независимого множества. Просуммировав результаты всех пунктов мы получим, что существует не более чем $C^3_{\rho(n)} + 17n^2 \leqslant \frac{\rho(n)^3}{6} + 20n^2$ вершин, пересекающихся ровно с тремя вершинами из независимого множества. Таким образом, лемма доказана.

Глава 4. Анализ графов $G\left(n, r, s\right)$

В данной главе мы изучаем общий случай $G\left(n, r, s\right)$ для произвольных r, s. В параграфе 4.1 мы напомним определение графа $G\left(n, r, s\right)$, далее приведем оценки числа независимости данного графа и сформулируем основные результаты. В параграфе 4.3 мы рассмотрим особый случай $s = 0$, который восходит к так назваемым *кнезеровским графам*.

4.1 О числе независимости графа $G\left(n, r, s\right)$ и формулировка результатов

Пусть $n > r > s$. Напомним, что графом $G\left(n, r, s\right)$ называется следующая конструкция:

$$G\left(n, r, s\right) = \left(V, E\right), \; V = \binom{[n]}{r}, \; E = \{(A, B) : \; |A \cap B| = s\},$$

то есть вершины графа — это всевозможные r-элементные подмножества $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$, а ребрами мы соединяем пары множеств, пересекающихся ровно по s элементам. Эти графы называются *графами Джонсона* и играют важную роль в задачах теории кодирования (см. [26]), теории Рамсея (см. [18], [8]), комбинаторной геометрии (см. [3]–[27]), теории гиперграфов (см. [30]–[34]).

Напомним, что для графов $G\left(n,3,1\right)$ нами было доказано, что

$$\left(1 + o\left(1\right)\right) \frac{3l^2}{2\alpha} \leqslant r\left(l\right) \leqslant \left(1 + o\left(1\right)\right) \frac{9l^2}{2\alpha}. \tag{4.1}$$

Иными словами, нижняя оценка в 4.1 втрое больше классической турановской оценки, которая неулучшаема в общем случае.

Для произвольных графов $G(n,r,s)$ оценок ранее не было. Однако это *дистанционные графы*, т.е. их вершины можно считать точками в $\mathbb{R}^n$ (это n-мерные векторы с r единицами и $n-r$ нулями), а ребра тогда — это пары точек на расстоянии $\sqrt{2(r-s)}$. Для графов такого типа верна следующая оценка (см. теорему 2 в главе 1). Пусть $\alpha n = o(l)$. Тогда

$$r(l) \geqslant \frac{l^2}{\alpha}(1+o(1)). \tag{4.2}$$

Таким образом, оценка 4.2 вдвое сильнее классической турановской оценки.

Прежде всего мы докажем следующую несложную теорему.

Теорема 10. *Пусть даны числа r,s. Пусть $G_n = G(n,r,s)$. Пусть $l = l(n) \to \infty$. Тогда*

$$r(l) \leqslant (1+o(1)) \cdot \frac{l^2}{n^s} \cdot \frac{C_r^s \cdot r!}{2 \cdot (r-s)!}.$$

Чтобы сравнить теорему 10 с оценками 4.1–4.2, надо напомнить, как ведут себя числа независимости графов $G(n,r,s)$. В работе [36] доказана

Теорема 11. *Пусть даны числа r,s. Тогда*

1. если $r > 2s+1$, то при достаточно больших n

$$\alpha(G(n,r,s)) = C_{n-s-1}^{r-s-1} \sim \frac{n^{r-s-1}}{(r-s-1)!};$$

2. если $r \leqslant 2s+1$ и $r-s$ — степень простого числа, то

$$\alpha(G(n,r,s)) \sim n^s \cdot \frac{(2r-2s-1)!}{r! \cdot (r-s-1)!};$$

3. для любых r,s существуют $c(r,s)$ и $d(r,s)$, с которыми

$$c(r,s)\cdot\max\left\{n^s,n^{r-s-1}\right\}\leqslant\alpha\left(G(n,r,s)\right)\leqslant d(r,s)\cdot\max\left\{n^s,n^{r-s-1}\right\}.$$

Из теоремы 11 сразу следует, что новая теорема 10 дает лучшую из ранее известных верхних оценок для случая параметров $n,3,1$ — оценку 4.1. Более того, при $r\leqslant 2s+1$ получаем, что порядок новой верхней оценки из теоремы 10 совпадает с порядком классических нижних оценок, ведь у них в знаменателе стоит число независимости, которое в данном режиме имеет порядок n^s. И только при $r>2s+1$ имеется серьезный зазор по порядку.

Далее мы приведём доказательства данных теорем.

4.2 Верхняя оценка величины $r(l)$

4.2.1 Доказательство теоремы 10

Рассмотрим множество всех индуцированных подграфов графа $G(n,r,s)$, имеющих l вершин. Для каждого графа H из этого множества и каждого ребра графа $G(n,r,s)$ рассмотрим индикатор вхождения этого ребра в H. Просуммируем индикаторы по всем ребрам и по всем графам двумя способами. С одной стороны, получится произведение числа ребер и числа графов, содержащих данное ребро:

$$A=\left(\frac{1}{2}\cdot C_n^r\cdot C_{n-r}^{r-s}\cdot C_r^s\right)\cdot\left(C_{C_n^r-2}^{l-2}\right).$$

С другой стороны, получится сумма по H чисел ребер в H. Таким образом, минимальное число ребер не меньше, чем

$$\frac{A}{C_{C_n^r}^l} \sim \frac{1}{2} \cdot C_n^r \cdot C_n^{r-s} \cdot C_r^s \cdot \frac{l^2}{(C_n^r)^2} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{l^2}{n^s} \cdot C_r^s \cdot \frac{r!}{(r-s)!}.$$

Теорема доказана.

4.3 Нижняя оценка в случае $s = 0$

Особенно любопытно выглядит случай с $s = 0$. Это случай так называемых *кнезеровских графов* (см. [18], [33], [34]). Получается, что в его рамках новая верхняя оценка из теоремы 10 тривиальна, ибо асимптотически равна $\frac{l^2}{2}$, а это асимптотика числа ребер полного графа на l вершинах! Как ни странно, это не свидетельство слабости новой оценки. Имеет место

Теорема 12. *Пусть* $l > \alpha(G(n,r,0)) = C_{n-1}^{r-1}$. *Тогда*

$$r(l) \geqslant \frac{l(l - (C_n^r - C_{n-r}^r))}{2}.$$

Видно, что если l сильно больше числа независимости, т.е. $n^{r-1} = o(l)$, то оценка в теореме 3 асимптотически равна $\frac{l^2}{2}$. Действительно, разность $C_n^r - C_{n-r}^r$ имеет порядок n^{r-1}.

Есть, наконец, интересный режим, в котором теорема 12 не работает. Это режим, когда $l \sim C_{n-1}^{r-1}$. В таком случае оценка теоремы 12 становится отрицательной. Здесь удается доказать следующую теорему.

Теорема 13. *Пусть* $l > \alpha(G(n,r,0)) = C_{n-1}^{r-1}$. *Тогда*

$$r(l) \geqslant \min_{\beta \leqslant C_{n-1}^{r-1}} \max \left\{ l \cdot \left[\frac{l}{\beta}\right] - \beta \cdot \frac{\left[\frac{l}{\beta}\right] \cdot \left(\left[\frac{l}{\beta}\right] + 1\right)}{2}, (l-\beta)\left(\beta - r^2 C_{n-2}^{r-2}\right) \right\}.$$

Например, если $l = \alpha(G(n,r,0)) + 1$, то все классические оценки принимают значение 1. Однако здесь мы имеем значительное усиление. В самом деле, если $\beta \leqslant 2r^2 C_{n-2}^{r-2}$, то первая величина из двух под знаком максимума имеет порядок не ниже n^r. При больших β уже вторая величина имеет порядок, как минимум, n^{r-2}. Можно и аккуратнее оценить, но суть ясна и так.

4.3.1 Доказательство теоремы 12

Пусть W — некоторое множество вершин графа $G(n,r,0)$, имеющее мощность l. Тогда для любой вершины $v \in W$ имеем

$$|\{w \in W: \ w \sim v\}| = l - |\{w \in W: \ w \not\sim v\}| \geqslant l - |\{w: \ w \not\sim v\}| =$$

$$= l - \left(C_n^r - |\{w \in W: \ w \sim v\}|\right) = l - \left(C_n^r - C_{n-r}^r\right).$$

Суммирование по всем вершинам завершает доказательство.

4.3.2 Доказательство теоремы 13

Пусть H — подграф графа $G(n,r,0)$, имеющий l вершин. Пусть β — максимальная мощность независимого множества вершин в H. Очевидно,

$\beta \leqslant \alpha\left(G\left(n,r,0\right)\right) = C_{n-1}^{r-1}$. Пусть B — любое независимое множество вершин H мощности β. С одной стороны, имеет место рассуждение, которое восходит к Турану и дает классическую турановскую оценку с заменой α на β. Именно она и стоит первой под знаком максимума. С другой стороны, как и в начале турановского рассуждения, отметим, что каждая вершина H, не принадлежащая B, отправляет хотя бы одно ребро в B. Если на этом остановиться, то получится оценка $l - \beta$, которая намного слабее турановской, ибо входит лишь как одно из слагаемых в турановское неравенство. Однако вид второй величины под знаком максимума в теореме 13 подсказывает, что можно значимо усилить утверждение о хотя бы одном ребре, идущем в B. Действительно, покажем, что таких ребер не меньше, чем $\beta - r^2 C_{n-2}^{r-2}$. Пусть $v \notin B$, а w — ее гарантированный сосед из B. Пусть $z \in B$ и $z \not\sim v$. Разумеется, $z \not\sim w$, ведь B — независимое множество. Получается, что r-элементные подмножества R, S множества $[n]$, отвечающие вершинам v, w не пересекаются (вершины образуют ребро), а r-элементное подмножество T, отвечающее z, пересекает и R, и S. Таких множеств T не больше, чем $r^2 C_{n-2}^{r-2}$. Следовательно, не более $r^2 C_{n-2}^{r-2}$ вершин из B не соединены с v, откуда число вершин в B, являющихся соседками с v, не меньше $\beta - r^2 C_{n-2}^{r-2}$. Теорема доказана.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Получены оценки величины $r(l)$ для графа $G(n, 3, 1)$, в частности:
   (a) Точные оценки величины $r(l)$ для некоторых значений l.
   (b) Верхние и нижние оценки величины $r(l)$ для некоторых значений l.
   (c) Нижняя оценка величины $r(l)$ для подграфов с ограничением на размер звёздного множества.
2. Получены общие оценки величины $r(l)$ для графа $G(n, r, s)$ для произвольных r, s.

В дальнейших исследованиях возможны несколько направлений.

1. Найти точные оценки величины $r(l)$ для как можно большего класса l
2. Насколько важно ограничение на мощность звездного множества? Можно ли еще улучшить оценки $r(l)$ при ограниченной мощности звездного множества?
3. Улучшить верхние и нижние оценки для произвольных r, s.

Список литературы

1. *Raigorodskii A.* Cliques and cycles in distance graphs and graphs of diameters // Discrete Geometry and Algebraic Combinatorics, AMS, Contemporary Mathematics. — 2014. — Vol. 625. — P. 93–109.

2. *Raigorodskii A.* Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory, J. Pach ed., Springer. — 2013. — P. 429–460.

3. *Райгородский А.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107—146.

4. *Райгородский А.* О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах // Доклады РАН. — 2010. — Т. 432, № 2. — С. 174—177.

5. *Raigorodskii A.* On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ // Combinbatorica. — 2012. — Vol. 32, no. 1. — P. 111–123.

6. *Balogh J.*, *Kostochka A.*, *Raigorodskii A.* Coloring some finite sets in $\mathbb{R}^n$ // Discussiones Mathematicae Graph Theory. — 2013. — Vol. 33, no. 1. — P. 25–31.

7. Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов / Л. Боголюбский [и др.] // Доклады РАН. — 2014. — Т. 457, № 4. — С. 383—387.

8. Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов некоторых дистанционных графов / Л. Боголюбский [и др.] // Математический сборник. — 2015. — Т. 206, № 10. — С. 3—36.

9. *Agarwal P.*, *Pach J.* Combinatorial geometry // John Wiley and Sons Inc., New York. — 1993.

10. *Székely L.* Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems // Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer. — 2002. — Vol. 11. — P. 649–666.

11. *Larman D.*, *Rogers C.* The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. – 1972. – T. 19. – C. 1—24.

12. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book // Springer. — 2009.

13. *Klee V.*, *Wagon S.* Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory // Math. Association of America. — 1991.

14. *Erdoś P.*, *Bruijn N. de.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Indag. Math. – 1951. – T. 13. – C. 371—373.

15. *Nagy Z.* A certain constructive estimate of the Ramsey number // Matematikai Lapok. — 1972. — Vol. 23, no. 26. — P. 301–302.

16. *Frankl P.*, *Wilson R.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. – 1981. – T. 1. – C. 357—368.

17. *Boltyanski V.*, *Martini H.*, *Soltan P.* Excursions into combinatorial geometry // Universitext, Springer, Berlin. — 1997.

18. *Raigorodskii A.* Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. — 2007. — Vol. 347. — P. 202–248.

19. *Райгородский А.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники. Серия "Современная математика". – 2007. – Т. 23. – С. 147—164.

20. *Graham R.*, *Rothschild B.*, *Spencer J.* Ramsey theory // John Wily and Sons, NY, Second Edition. — 1990.

21. *Демёхин Е., Райгородский А., Рубанов О.* Дистанционные графы, имеющие большое хроматическое число и не содержащие клик или циклов заданного размера // Матем. сборник. — 2013. — Т. 204, № 4. — С. 49—78.

22. *Райгородский А., Михайлов К.* О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0{,}1\}^n$ // Матем. сборник. — 2009. — Т. 200, № 12. — С. 63—80.

23. *Мак-Вильямс Ф., Слоэн Н.* Теория кодов, исправляющих ошибки // М.: Радио и связь. — 1979.

24. *Bassalygo L., Cohen G., Zémor G.* Codes with forbidden distances // Discrete Mathematics. — 2000. — Vol. 213. — P. 3–11.

25. *Raigorodskii A.* Combinatorial geometry and coding theory // Fundamenta Informatica. — 2016. — Vol. 145. — P. 359–369.

26. *MacWilliams F., Sloane N.* The theory of error-correcting codes // North-Holland, Amsterdam. — 1977.

27. *Kostina O.* On Lower Bounds for the Chromatic Number of Spheres // Math. Notes. — 2019. — Vol. 105, no. 1. — P. 16–27.

28. *Шишунов Е., Райгородский А.* О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в $\{-1{,}0{,}1\}^n$ // Доклады РАН. — 2019. — Т. 485, № 3.

29. *Просанов Р.* Контрпримеры к гипотезе Борсука, имеющие большой обхват // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, № 6. — С. 890—898.

30. *Frankl P., Kupavskii A.* Partition-free families of sets // Proceedings of the London Mathematical Society. —. — DOI: DOI:10.1112/plms.12236.

31. *Frankl P.*, *Kupavskii A.* Families of sets with no matching of sizes 3 and 4 // European Journal of Combinatorics. — 2019. — Vol. 75. — P. 123–135.

32. *Shabanov D.*, *Krokhmal N.*, *Kravtsov D.* Panchromatic 3-colorings of random hypergraphs // European Journal of Combinatorics. — 2019. — Vol. 78. — P. 28–43.

33. *Cherkashin D.*, *Petrov F.* On small n-uniform hypergraphs with positive discrepancy // Journal of Combinatorial Theory. Series B. —. — DOI: 10.1016/j.jctb.2019.04.001.

34. *Balogh J.*, *Cherkashin D.*, *Kiselev S.* Coloring general Kneser graphs and hypergraphs via high-discrepancy hypergraphs // European Journal of Combinatorics. — 2019. — Vol. 79C. — P. 228–236.

35. *Райгородский А.*, *Михайлов К.* О числах Рамсея для полных дистанционных графов с вершинами в $\{0,1\}^n$ // Матем. сборник. — 2009. — Т. 200, № 12. — С. 63—80.

36. *Frankl P.*, *Füredi Z.* Forbidding just one intersection // Journal of Combinatorial Theory. — 1985. — Vol. 39. — P. 160–176.

37. *Боголюбский Л. И.*, *Райгородский А. М.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками $\ell 1$ и $\ell 2$ // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, № 2. — С. 187—213.

38. *Пядёркин М. М.* Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 2. — С. 288—297.

39. *Черкашин Д.*, *Райгородский А.* О хроматических числах пространств малой размерности // Доклады РАН. — 2017. — Т. 472, № 1. — С. 11—12.

40. *Cherkashin D., Kulikov A., Raigorodskii A.* On the chromatic numbers of small-dimensional Euclidean spaces // Discrete and Applied Math. — 2018. — Vol. 243. — P. 125–131.

41. *Просанов Р., Сагдеев А., Райгородский А.* Улучшения теоремы Франкла–Рёдля и геометрические следствия // Доклады РАН. — 2017. — Т. 475, № 2. — С. 137—139.

42. *Сагдеев А., Райгородский А.* О хроматическом числе пространства с запрещенным правильным симплексом // Доклады РАН. — 2017. — Т. 472, № 2. — С. 127—129.

43. *Райгородский А., Сагдеев А.* Об одной оценке в экстремальной комбинаторике // Доклады РАН. — 2018. — Т. 478, № 3. — С. 271—273.

44. *Raigorodskii A., Sagdeev A.* On a Frankl–Wilson theorem and its geometric corollaries // Acta Math. Univ. Comenianae. — 2019.

45. *Сагдеев А. А.* О теореме Франкла–Рэдла // Изв. РАН. Сер. матем. — 2018. — Т. 82, № 6. — С. 128—157.

46. *Сагдеев А. А.* Экспоненциально рамсеевские множества // Пробл. передачи информ. — 2018. — Т. 54, № 5. — С. 82—109.

47. *Сагдеев А. А.* Улучшенная теорема Франкла–Рёдля и некоторые ее геометрические следствия // Пробл. передачи информ. — 2018. — Т. 54, № 2. — С. 45—72.

48. *Сагдеев А. А.* О хроматических числах, соответствующих экспоненциально рамсеевским множествам // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2018. — Т. 475. — С. 174—189.

49. *Захаров Д. А., Райгородский А. М.* Клико-хроматические числа графов пересечений // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, № 1. — С. 142—144.

50. *Райгородский А.*, *Трухан Т.* О хроматических числах некоторых дистанционных графов // Доклады РАН. — 2018. — Т. 482, № 6. — С. 648—650.

51. *Shabanov L.*, *Raigorodskii A.* Turán type results for distance graphs // Discrete and Computational Geometry. — 2016. — Vol. 56, no. 3. — P. 814–832.

52. *Шабанов Л.*, *А.М.Райгородский.* Турановский оценки для дистанционных графов // Доклады РАН. — 2017. — Т. 475, № 3. — С. 254—257.

53. *Shabanov L. E.* Turán-Type Results for Distance Graphs in an Infinitesimal Plane Layer // Journal of Mathematical Sciences. — 2019. — Vol. 236, no. 5.

54. *Tikhomirov M.* On the distance and multidistance graph embeddability problem // Dokl. Math. — 2016. — Vol. 93, no. 3. — P. 280–281.

55. *Tikhomirov M.* On complexity of multidistance graph recognition in R1 // Electron. Notes Discrete Math. —. — Vol. 61. — P. 1039–1045.

56. *Frankl N.*, *Kupavskii A.*, *Swanepoel K.* E,bedding graphs in Euclidean space // Electron. Notes Discrete Math. —. — Vol. 61. — P. 475–481.

57. *Бобу А.*, *Куприянов А.*, *Райгородский А.* О числе ребер однородного гиперграфа с диапазоном разрешенных пересечений // Доклады РАН. — 2017. — Т. 475, № 4. — С. 365—368.

58. *Бобу А.*, *Куприянов А.*, *Райгородский А.* О числе ребер однородного гиперграфа с диапазоном разрешенных пересечений // Пробл. передачи информ. — 2017. — Т. 53, № 4. — С. 16—42.

59. *Бобу А.*, *Куприянов А.* Улучшение нижних оценок хроматического числа пространства с запрещенными одноцветными треугольниками // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, № 3. — С. 349—363.

60. *Киселев С., Райгородский А.* О хроматическом числе случайного подграфа кнезеровского графа // Доклады РАН. — 2017. — Т. 476, № 4. — С. 375—376.

61. *Balogh J., Cherkashin D., Kiselev S.* Kneser graphs and hypergraphs via high-discrepancy hypergraphs // European Journal of Combinatorics. — 2019. — Vol. 79. — P. 228–236.

62. *Райгородский А.* Об устойчивости числа независимости случайного подграфа // Доклады РАН. — 2017. — Т. 477, № 6. — С. 649—651.

63. *Просанов Р. И.* Контрпримеры к гипотезе Борсука, имеющие большой обхват // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, № 6. — С. 890—898.

64. *Бобу А., Куприянов А., Райгородский А.* О хроматических числах дистанционных графов, близких к кнезеровским // Доклады РАН. — 2016. — Т. 468, № 3. — С. 247—250.

65. *Бобу А., Куприянов А., Райгородский А.* О максимальном числе рёбер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением // Доклады РАН. — 2015. — Т. 463, № 1. — С. 11—13.

66. *Бобу А., Куприянов А., Райгородский А.* Асимптотическое исследование задачи о максимальном числе рёбер однородного гиперграфа с одним запрещенным пересечением // Матем. сборник. — 2016. — Т. 207, № 5. — С. 17—42.

67. *Пушняков Ф.* О числе рёбер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа // Матем. заметки. — 2016. — Т. 99, № 4. — С. 550—558. — DOI: 10.4213/mzm10745. — URL: https://doi.org/10.4213/mzm10745.

68. *Пушняков Ф.* Новая оценка числа рёбер в индуцированных подграфах специального дистанционного графа // Пробл. передачи информ. — 2015. — Т. 51, № 4. — С. 371—377.

69. *Пушняков Ф.* О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов // Матем. заметки. — 2019. — Т. 105, № 4. — С. 592—602. — DOI: 10.4213/mzm11942. — URL: https://doi.org/10.4213/mzm11942.

70. *Ф. А. Пушняков, А. М. Райгородский.* Оценка числа ребер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // Матем. заметки. — 2020. — Т. 107, № 2. — С. 286—298.

71. *Pushnyakov P.* Around Turán's theorem // 5th Polish Combinatorial Conference. — 2014.

72. *Пушняков Ф. А.* Оценка числа рёбер в особых подграфах некоторого дистанционного графа // Материалы I Всероссийской научной конференции Экстремальная комбинаторика и дискретная геометрия. Адыгейский государственный университет. — 2018. — С. 48—55.