УДК 517.955

Т. В. Дудникова

Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН

Об эргодичности фазового потока для волновых уравнений в четномерном пространстве

Рассматриваются волновые уравнения в $\mathbb{R}^n$ в случае четных $n \geq 4$. Начальные данные – случайная функция с конечной средней плотностью энергии, удовлетворяющая условию перемешивания типа Ибрагимова. Предполагается, что начальная случайная функция близка к двум различным пространственно-однородным процессам при $x_n \to \pm\infty$. Изучается распределение μ_t случайного решения в моменты времени $t \in \mathbb{R}$. Основной результат – доказательство сходимости мер μ_t к гауссовой мере μ_∞ при $t \to \infty$. Проверяется эргодичность фазового потока относительно меры μ_∞.

Ключевые слова: волновое уравнение в четномерном пространстве, задача Коши, случайные начальные данные, условие перемешивания, сходимость к равновесному распределению.

T. V. Dudnikova

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS

On the ergodicity of the phase flow for wave equations in the even-dimensional space

We consider wave equations in $\mathbb{R}^n$ for even $n \geq 4$. The initial data are given by a random function with a finite mean density of energy that satisfies the Ibragimov–type mixing condition. It is assumed that the initial random function is close to distinct space-homogeneous processes as $x_n \to \pm\infty$. We study the distribution μ_t of the random solution at time moments $t \in \mathbb{R}$. The main result is the convergence of μ_t to the Gaussian measure μ_∞ as $t \to \infty$. We control the ergodicity of the phase flow with respect to the measure μ_∞.

Key words: wave equation in the even-dimensional space, Cauchy problem, random initial data, mixing condition, convergence to equilibrium distribution.

1. Введение

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения:

$$\begin{cases} \ddot{u}(x,t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_j} - iA_j(x) \right)^2 u(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, что $n \geq 4$ и четное, $A_j(x)$ – действительнозначные функции класса C^∞, и $A_j(x) = 0$ при $|x| > R_0$, где $R_0 < \infty$.

Обозначим $Y(t) = (Y^0(t), Y^1(t)) \equiv (u(\cdot,t), \dot{u}(\cdot,t))$, $Y_0 = (Y_0^0, Y_0^1) \equiv (u_0, v_0)$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\dot{Y}(t) = \mathbf{A}(Y(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad Y(0) = Y_0, \tag{2}$$

где через $\mathbf{A}$ обозначается операторнозначная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - iA_j(x) \right)^2.$$

Обозначим через $H^s_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, $s\in\mathbb{R}$, локальные пространства Соболева, то есть пространства Фреше распределений $u\in D'(\mathbb{R}^n)$ с конечными полунормами:

$$\|u\|_{s,R}=\|\Lambda^s\left(\zeta(x/R)u\right)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

где $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $\zeta(0)\neq 0$, $\Lambda^s v=F^{-1}_{k\to x}(\langle k\rangle^s\hat v(k))$, $\langle k\rangle=\sqrt{|k|^2+1}$, и $\hat v=Fv$ – преобразование Фурье обобщенной функции медленного роста v. Для $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ определим $F\psi(k)=\int\exp{(ikx)}\psi(x)dx$.

Будем считать, что начальные данные $Y_0=(u_0,v_0)$ комплексны и принадлежат фазовому пространству $\mathcal{H}=H^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)\oplus H^0_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ с полунормами:

$$\text{для любого } R>0\text{: } \|Y_0\|_R=\Big(\int\limits_{|x|\le R}\left(|u_0(x)|^2+|\nabla u_0(x)|^2+|v_0(x)|^2\right)dx\Big)^{1/2}<\infty.$$

Мы предполагаем, что начальные данные Y_0 – случайный элемент пространства $\mathcal{H}$. Распределение Y_0 обозначается через μ_0.

На начальную меру μ_0 накладываются условия **M1** – **M4**.

M1. Мера μ_0 имеет нулевое математическое ожидание, т.е. $\mathbb{E}(Y_0(x))=0$, $x\in\mathbb{R}^n$, где $\mathbb{E}$ обозначает интеграл по мере $\mu_0(dY_0)$.

M2. Мера μ_0 обладает конечной средней плотностью энергии:

$$\mathbb{E}\left[|u_0(x)|^2+|\nabla u_0(x)|^2+|v_0(x)|^2\right]\le e_0<\infty.$$

Определим корреляционную матрицу $Q_0(x,y)=\Big(Q_0^{ij}(x,y)\Big)_{i,j=0,1}$ меры μ_0 следующим образом:

$$Q_0^{ij}(x,y)=\mathbb{E}\Big(Y_0^i(x)\otimes Y_0^j(y)\Big),\quad i,j=0,1.$$

Заметим, что мы отождествляем комплексное и действительное пространства $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ и через $\otimes$ обозначаем тензорное произведение действительных векторов.

M3. Корреляционные функции $Q_0^{ij}(x,y)$ имеют вид

$$Q_0^{ij}(x,y)=q_-^{ij}(x-y)\zeta_-(x_n)\zeta_-(y_n)+q_+^{ij}(x-y)\zeta_+(x_n)\zeta_+(y_n).$$

Здесь функции $\zeta_\pm\in C^\infty(\mathbb{R})$ такие, что $\zeta_\pm(s)=1$ при $\pm s>a$, $\zeta_\pm(s)=0$ при $\pm s<-a$, $a>0$, $q_\pm^{ij}(x-y)$ – корреляционные функции некоторых трансляционно-инвариантных мер $\mu_\pm$ с нулевым средним значением, $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$.

Определение. Мера μ называется трансляционно-инвариантной, если $\mu(T_hB)=\mu(B)$ для любого $B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $h\in\mathbb{R}^n$, где $T_hY(x)=Y(x+h)$ для всех $Y\in\mathcal{H}$, и $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ обозначает σ-алгебру борелевских множеств пространства $\mathcal{H}$.

Заметим, что начальная мера μ_0 не является трансляционно-инвариантной, если $q_-^{ij}\neq q_+^{ij}$.

Наконец, мы предполагаем, что мера μ_0 удовлетворяет условию перемешивания типа Ибрагимова. Чтобы сформулировать это условие (см. определение 17.2.2 в [1]), введем следующие обозначения. Для любого множества $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^n$ обозначим через $\sigma(\mathcal{A})$ наименьшую σ-алгебру борелевских множеств из $\mathcal{H}$, относительно которой измеримы линейные функционалы $Y\to\langle Y,\Psi\rangle$ на $\mathcal{H}$:

$$\langle Y,\Psi\rangle=\int\left(Y^0(x)\Psi^0(x)+Y^1(x)\Psi^1(x)\right)dx,\ \ Y=(Y^0,Y^1),\ \ \Psi=(\Psi^0,\Psi^1),$$

где $Y\in\mathcal{H}$, $\Psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\operatorname{supp}\Psi\subset\mathcal{A}$.

Определение. Мера μ_0 удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания Ибрагимова, если

$$\varphi(r) = \sup \frac{|\mu_0(A \cap B) - \mu_0(A)\mu_0(B)|}{\mu_0(B)} \to 0 \quad \text{при } r \to \infty,$$

где верхняя грань берется по всем множествам $A \in \sigma(\mathcal{A})$, $B \in \sigma(\mathcal{B})$, для которых $\mu_0(B) > 0$, и всем открытым выпуклым множествам $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$, для которых $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq r > 0$.

M4. Мера μ_0 удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания типа Ибрагимова, причем

$$\int_0^{+\infty} r^{n-1} \varphi^{n/(2(n+2))}(r) dr < \infty.$$

Обозначим через μ_t, $t \in \mathbb{R}$, меру на $\mathcal{H}$, которая является распределением случайного решения $Y(t)$ задачи (2). Основная цель статьи – доказать слабую сходимость мер μ_t,

$$\mu_t \to \mu_\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty, \tag{3}$$

к предельной мере μ_∞, которая является трансляционно-инвариантной гауссовской мерой. По определению, это означает сходимость

$$\int f(Y)\mu_t(dY) \to \int f(Y)\mu_\infty(dY) \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

для любого ограниченного непрерывного функционала $f(Y)$ на соответствующем пространстве.

Для уравнения (1) сходимость (3) была доказана Комечем, Копыловой и Маузером [2] в случае пространственно-однородных начальных мер μ_0. Для неоднородных начальных мер этот результат был получен для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ в работе [3], для уравнений Клейна–Гордона и гармонических кристаллов в работах [4] и [5] соответственно. В данной статье мы обобщаем эти результаты на случай волнового уравнения в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 4$ и четно.

2. Основные результаты

Следующая лемма вытекает из [6, теоремы V.3.1, V.3.2].

Лемма 1. *Для любого $Y_0 \in \mathcal{H}$ существует и притом единственное решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ задачи Коши (2). Более того, оператор $U(t) : Y_0 \mapsto Y(t)$ непрерывен на $\mathcal{H}$ для любого $t \in \mathbb{R}$.*

Мы предполагаем, что Y_0 в уравнении (2) – измеримая случайная функция со значениями в $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Поэтому решение $Y(t) = U(t)Y_0$ также является измеримой случайной функцией со значениями в $(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ в силу леммы 1.

Пусть μ_t обозначает борелевскую вероятностную меру на $\mathcal{H}$, которая является распределением $Y(t)$:

$$\mu_t(B) = \mu_0(U(-t)B), \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Определим корреляционные функции меры μ_t как $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$-значные обобщенные функции:

$$Q_t^{ij}(x, y) = \mathbb{E}\left(Y^i(x, t) \otimes Y^j(y, t)\right), \quad i, j = 0, 1, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Прежде чем сформулировать основной результат, введем корреляционную матрицу предельной меры в случае постоянных коэффициентов (т.е. $A_j(x) \equiv 0$). Определим для почти всех $x, y \in \mathbb{R}^n$ матричнозначную функцию $Q_\infty(x, y)$ следующим образом:

$$Q_\infty(x, y) = \left(Q_\infty^{ij}(x, y)\right)_{i,j=0,1} = q_\infty(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где в преобразовании Фурье $\hat{q}_\infty(k) = \hat{q}_\infty^+(k) + \hat{q}_\infty^-(k)$, и

$$\hat{q}_\infty^+(k) = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{q}}^+(k) + \hat{\mathbf{C}}(k)\hat{\mathbf{q}}^+(k)\hat{\mathbf{C}}^T(k)\right),$$

$$\hat{q}^-_\infty(k) = \mathrm{sign}(k_n)\frac{i}{2}\Big(\hat{\mathbf{C}}(k)\hat{\mathbf{q}}^-(k) - \hat{\mathbf{q}}^-(k)\hat{\mathbf{C}}^T(k)\Big)$$

с матрицей $\hat{\mathbf{C}}(k)$ вида $\hat{\mathbf{C}}(k) = \begin{pmatrix} 0 & |k|^{-1} \\ -|k| & 0 \end{pmatrix}$. Здесь $\mathbf{q}^+ = (q_+ + q_-)/2$, $\mathbf{q}^- = (q_+ - q_-)/2$.

Обозначим через $\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)$ действительную квадратичную форму на пространстве $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \oplus C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, определенную следующим образом:

$$\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi) = \sum_{i,j=0,1} \int \left(Q^{ij}_\infty(x,y), \Psi^i(x)\otimes\Psi^j(y)\right) dxdy, \tag{5}$$

где $Q^{ij}_\infty(x,y)$ определены в уравнении (4), $(\cdot,\cdot)$ обозначает действительное скалярное произведение в $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $n \geq 4$, четное, и выполнены условия* **M1** – **M4** *на меру μ_0. Тогда меры μ_t слабо сходятся в пространстве $\mathcal{H}^{-\varepsilon} = H^{1-\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\oplus H^{-\varepsilon}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ с любым $\varepsilon > 0$:*

$$\mu_t \overset{\mathcal{H}^{-\varepsilon}}{\longrightarrow} \mu_\infty \quad \textit{при} \quad t\to\infty. \tag{6}$$

Предельная мера μ_∞ является гауссовой на пространстве $\mathcal{H}$. Более того, поток $U(t)$ удовлетворяет условию перемешивания относительно меры μ_∞, т.е. для любых $f,g \in L^2(\mathcal{H},\mu_\infty)$ справедлива следующая сходимость:

$$\lim_{t\to\infty}\int f(U(t)Y)g(Y)\,\mu_\infty(dY) = \int f(Y)\,\mu_\infty(dY)\int g(Y)\,\mu_\infty(dY).$$

В частности, фазовый поток $U(t)$ – эргодический, т.е. для любых $f\in L^2(\mathcal{H},\mu_\infty)$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(U(t)Y)\,dt = \int f(Y)\,\mu_\infty(dY) \quad (mod\ \mu_\infty).$$

Объясним основные шаги доказательства теоремы 2.

В случае постоянных коэффициентов, т.е. $A_j(x) \equiv 0$, доказательство сходимости (6) разбивается на три этапа, используя общую стратегию работ [2] – [5].

I. Семейство мер $\{\mu_t, t\in\mathbb{R}\}$ является слабо компактным на пространстве $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

II. Корреляционные матрицы сходятся к пределу: для $i,j = 0,1$,

$$Q^{ij}_t(x,y) = \int \Big(Y^i(x)\otimes Y^j(y)\Big)\mu_t(dY) \to Q^{ij}_\infty(x,y), \quad t\to\infty.$$

III. Характеристические функционалы мер μ_t сходятся к гауссовскому характеристическому функционалу:

$$\hat{\mu}_t(\Psi) \equiv \int \exp(i\langle Y,\Psi\rangle)\mu_t(dY) \to \exp\Big\{-\frac{1}{2}\mathcal{Q}_\infty(\Psi,\Psi)\Big\}, \quad t\to\infty,$$

где квадратичная форма $\mathcal{Q}_\infty$ определена соотношением (5).

Свойство **I** следует из теоремы Прохорова о компактности с использованием методов Вишика и Фурсикова [7], разработанных ими для задач статистической гидромеханики. Из явного выражения для корреляционных матриц $Q^{ij}_t(x,y)$ выводится равномерная оценка для средней локальной энергии по мере μ_t. Из этой оценки вытекает выполнение условий теоремы Прохорова в силу теоремы вложения Соболева. Свойство **II** выводится из явного выражения для корреляционных матриц $Q^{ij}_t(x,y)$ так же, как и в работе [3] для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$. Отметим различия в доказательствах в случае четной и нечетной размерности пространства $\mathbb{R}^n$. В случае нечетного n формула Герглотца–Петровского позволяет выразить корреляционные функции $Q_t^{ij}(x,y)$ через интегралы по сферам радиуса t. В пределе при $t \to \infty$ сферы становятся плоскостями. Поэтому доказательства свойств **I** и **II** в случае нечетного n проводятся в координатном пространстве (см. [3]). В случае четного n корреляционные функции $Q_t^{ij}(x,y)$ выражаются через интегралы по шару радиуса t, и метод доказательства [3] уже не работает. Поэтому в этом случае свойства **I** и **II** проверяются в пространстве Фурье, используя методы работ [4, 5]. Наконец, свойство **III** проверяется, используя метод «комнат – коридоров» Бернштейна, который был развит в работах [2, 3].

Все результаты допускают обобщение на случай переменных коэффициентов, которые являются постоянными вне конечной области. Это обобщение вытекает из результата для постоянных коэффициентов с использованием теории рассеяния для решений с бесконечной энергией, которая была построена Комечем, Копыловой и Маузером [2].

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ-15-01-03587.

Литература

1. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965.
2. *Komech A., Kopylova E., Mauser N.* On convergence to equilibrium distribution for wave equation in even dimensions // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2004. V. 24. P. 547–576.
3. *Dudnikova T.V., Komech A.I., Spohn H.* On a two-temperature problem for wave equation // Markov Processes and Related Fields. 2002. V. 8. P. 43–80.
4. *Дудникова Т.В., Комеч А.И.* О двух-температурной задаче для уравнения Клейна–Гордона // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50, вып. 4. С. 675–710.
5. *Dudnikova T., Komech A., Mauser N.* On two-temperature problem for harmonic crystals // J. Stat. Phys. 2004. V. 114, N 3/4. P. 1035–1083.
6. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
7. *Вишик М.И., Фурсиков А.В.* Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980.

References

1. *Ibragimov I.A., Linnik Yu.V.* Independent and Stationary Sequences of Random Variables. Wolters–Noordhoff, Groningen, 1971.
2. *Komech A., Kopylova E., Mauser N.* On convergence to equilibrium distribution for wave equation in even dimensions // Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2004. V. 24. P. 547–576.
3. *Dudnikova T.V., Komech A.I., Spohn H.* On a two-temperature problem for wave equation // Markov Processes and Related Fields. 2002. V. 8. P. 43–80.
4. *Dudnikova T.V., Komech A.I.* On a two-temperature problem for the Klein–Gordon equation // Theory Prob. Appl. 2006. V. 50, N. 4. P. 582–611.
5. *Dudnikova T., Komech A., Mauser N.* On two-temperature problem for harmonic crystals // J. Stat. Phys. 2004. V. 114, N. 3/4. P. 1035–1083.
6. *Mikhailov V.P.* Partial Differential Equations. Moscow: Nauka, 1983. (in Russian).
7. *Vishik M.I., Fursikov A.V.* Mathematical Problems of Statistical Hydromechanics. Kluwer Academic Publishers, 1988.

Поступила в редакцию 18.01.2016