УДК 517.955

В. М. Имайкин

Волгоградский государственный университет

Солитонные асимптотики решений гиперболических уравнений с конечномерными нелинейными возмущениями

Обзор методов и результатов по солитонным асимптотикам решений гиперболических уравнений с конечномерными нелинейными возмущениями. Такие системы можно интерпретировать как взаимодействие поля (волнового, Клейна–Гордона, Максвелла) с заряженной частицей. Подробно рассмотрены случай слабого взаимодействия и случай плотности заряда, удовлетворяющей специальному условию Винера.

Ключевые слова: Системы взаимодействия поля с частицей, солитонные решения, долговременные солитонные асимптотики, слабое взаимодействие, условие Винера.

V. M. Imaykin

Volgograd State University

Soliton-type asymptotics of solutions to hyperbolic equations with finite-dimensional nonlinear perturbations

The overview of methods and results of soliton type asymptotics of solutions to hyperbolic equations with finite dimensional nonlinear perturbations. The systems describe an interaction of the either wave field or Klein–Gordon field or Maxwell field with a charged particle. We consider in detail the weak interaction case and the charge density case which satisfies a special Wiener condition.

Key words: Systems of wave-particle interaction, soliton-type solutions, long time soliton-type asymptotics, weak interaction, Wiener condition.

1. Введение

1.1. Краткая историческая справка

Изучение асимптотических свойств решений уравнений в частных производных — традиционная важная область теории дифференциальных уравнений, имеющая многочисленные приложения в теоретической физике. В частности, те системы, состоящие из гиперболического уравнения и наложенного на него конечномерного возмущения, которые освещены в настоящей работе, можно интерпретировать как взаимодействие поля и заряженной частицы. В недавнее время в этой области произошел существенный *математический* прогресс.

Уравнение движения заряженной частицы в электрическом поле было введено Лоренцем в 1895 году [1, 2], хотя впервые оно было написано Максвеллом в одной из работ 1865 г. [3]. С другой стороны, формулы для поля движущегося заряда были найдены Льенаром в 1898 г. и Вихертом в 1900 г. [4]. Таким образом, возникла проблема взаимодействия заряда с создаваемым им самим полем, т.е. проблема «самодействия» заряженной частицы.

С математической точки зрения — это задача исследования асимптотики решений системы, состоящей из гиперболического уравнения, на которое наложено конечномерное нелинейное возмущение, вызванное движением частицы, а также из обыкновенного уравнения движения частицы, правая часть которого определяется решением возмущенного гиперболического уравнения (полем); например, в случае уравнения Максвелла эта правая часть есть сила Лоренца. Ниже для краткости будем называть такие системы *системами взаимодействия поля с частицей.*

Этот вопрос приобрел особенную остроту в связи с проблемой бесконечной массы и энергии точечного заряда, поставленной Абрагамом [5] в 1905 г. Для преодоления этой трудности Абрагам ввел понятие *размазанного* электрона.

Формулы Льенара–Вихерта наводят на мысль, что создаваемое ускоренно движущимся зарядом поле уносит энергию, в результате чего ускорение должно стремиться к нулю, как написано в учебниках электродинамики, см., например, [6]. Однако строго доказать это удалось впервые лишь сто лет спустя для модели Абрагама [7, 8].

1.2. Описание результатов

Рассматриваются следующие системы: скалярные поля — волновое и Клейна–Гордона, а также поле Максвелла, взаимодействующие с частицей (см. точные формулировки в следующем параграфе).

Все эти системы трансляционно инвариантны и имеют решения типа *солитонов.* Частица в солитонном решении движется равномерно прямолинейно, а поле, сосредоточенное вокруг частицы, сохраняет форму неизменной. Стремление ускорения частицы к нулю, при определенных условиях на плотность заряда и начальные данные, позволяет получить солитонные асимптотики взаимодействия и построить начала теории рассеяния.

Для вывода солитонных асимптотик в период с 1997 по 2013 г. в работах [7–17] были разработаны три группы методов, которые оказались достаточно эффективными при различных предположениях о функции взаимодействия и начальных данных:

I. Метод интегрального неравенства для случая *слабого взаимодействия* поля с частицей — это значит, что функция взаимодействия, связывающая конечномерную и бесконечномерную части системы (ее можно интерпретировать как плотность заряда частицы), достаточно мала в некоторой интегральной норме. На начальные данные налагается дополнительное условие достаточно быстрого убывания на бесконечности. Методом интегрального неравенства удается вывести солитонные асимптотики решений в локальных энергетических полунормах и рассеяние входящей волны на солитоне в глобальных энергетических нормах. В этом случае рассмотрено также взаимодействие поля Максвелла с *неподвижной вращающейся частицей.*

II. При наложении специального *условия Винера* на функцию взаимодействия (при этом ее малость не предполагается) удается доказать стремление к нулю ускорения частицы и отсюда вывести солитонные асимптотики решений в локальных энергетических полунормах, сосредоточенных вокруг частицы. Название «условие Винера» связано с использованием в этом подходе так называемой *тауберовой теоремы Винера.*

III. Метод *симплектической проекции* с использованием *гамильтоновой структуры* систем — с его помощью удается вывести асимптотическую устойчивость солитонных многообразий в подходящих весовых пространствах Соболева и рассеяние входящей волны на солитоне для начальных данных, достаточно близких к солитонному многообразию; при том же винеровском условии на плотность заряда.

Результаты, полученные методом симплектической проекции, изложены в подробном обзоре [17]. Однако результаты и методы I, II отсутствуют в литературе на русском языке. Настоящий обзор посвящен изложению этих методов и результатов.

2. Системы взаимодействия поля с частицей. Существование динамики. Солитоны

Рассматриваются следующие системы, состоящие из гиперболического уравнения, нелинейно возмущенного конечномерной траекторией, и обыкновенного уравнения для этой траектории, правая часть которого зависит от решения гиперболического уравнения. Их можно интерпретировать как системы, описывающие взаимодействие поля с заряженной частицей:

1) Волновое поле (т.е. гиперболическое уравнение — волновое), взаимодействующее с частицей.

2) Поле Клейна–Гордона (гиперболическое уравнение Клейна–Гордона), взаимодействующее с частицей.

3) Система Максвелла–Лоренца (гиперболическое уравнение Максвелла; правая часть обыкновенного уравнения — сила Лоренца), описывающая заряженную частицу в поле Максвелла.

4) Вращающаяся частица, взаимодействующая с полем Максвелла.

1. Рассмотрим скалярное волновое поле $\varphi(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$, взаимодействующее с релятивистской заряженной частицей. Пусть $q(t), p(t) \in \mathbb{R}^3$ — координаты и импульс частицы соответственно в момент t, тогда система имеет вид [7, 10]:

$$
\begin{aligned}
&\dot\varphi(x,t) = \pi(x,t), \qquad \dot\pi(x,t) = \Delta\varphi(x,t) - \rho(x-q(t)), \qquad x \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R},\\
&\dot q(t) = p(t)/\sqrt{1+p^2}, \quad \dot p(t) = -\int \nabla\varphi(x,t)\,\rho(x-q(t))dx.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Мы накладываем следующие условия регулярности, убывания и симметрии на плотность распределения заряда: ρ — гладкая вещественная функция на $\mathbb{R}^3$ с компактным носителем и сферически симметричная, т.е.

$$
\rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \qquad \rho(x) = 0 \ \text{при}\ |x| \geqslant R_\rho > 0, \quad \rho(x) = \rho_1(|x|). \tag{2}
$$

Функционал энергии (он же гамильтониан, см. ниже) для волновой системы (1) имеет вид:

$$
\mathcal{H}(\varphi,\pi,q,p) = \frac{1}{2}\int \Big(|\pi(x)|^2 + |\nabla\varphi(x)|^2\Big)dx + \int \varphi(x)\rho(x-q)dx + \sqrt{1+p^2}. \tag{3}
$$

2. В случае поля Клейна–Гордона система записывается аналогично [14]:

$$
\begin{aligned}
&\dot\varphi(x,t) = \pi(x,t), \qquad \dot\pi(x,t) = \Delta\varphi(x,t) - m^2\varphi(x,t) - \rho(x-q(t)), \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}\\
&\dot q(t) = p(t)/\sqrt{1+p^2(t)}, \quad \dot p(t) = -\int \nabla\varphi(x,t), \rho(x-q(t))dx,
\end{aligned} \tag{4}
$$

где $m > 0$. Заметим, что система для волнового уравнения (1) имеет вид (4) с $m = 0$. Для системы Клейна–Гордона (4) функционал энергии (гамильтониан) имеет вид

$$
\mathcal{H}_m(\varphi,\pi,q,p) = \frac{1}{2}\int \Big(|\pi(x)|^2 + |\nabla\varphi(x)|^2 + m^2|\varphi(x)|^2\Big)dx + \int \varphi(x)\rho(x-q)dx + \sqrt{1+p^2}.
$$

3. В случае поля Максвелла система имеет вид [8, 18]:

$$
\begin{aligned}
&\dot E(x,t) = \nabla \wedge B(x,t) - \rho(x-q(t))\dot q(t), \quad \dot B(x,t) = -\nabla \wedge E(x,t), \ x \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R}\\
&\dot q(t) = p(t)/\sqrt{1+p^2(t)}, \qquad \dot p(t) = \int \left(E(x,t) + \dot q(t) \wedge B(x,t)\right), \rho(x-q(t))dx,
\end{aligned} \tag{5}
$$

кроме того, налагаются условия трансверсальности

$$\nabla \cdot E(x,t) = \rho(x - q(t)), \quad \nabla \cdot B(x,t) = 0. \tag{6}$$

Здесь $E(x,t), B(x,t)$ — соответственно электрическое и магнитное поля. Энергия для системы Максвелла–Лоренца равна

$$H(E,B,q,p) = \sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\int \left(|E(x)|^2 + |B(x)|^2\right) dx.$$

4. Для неподвижной вращающейся частицы в поле Максвелла система имеет вид [16,18]:

$$\begin{aligned} &E(-x,t) = -E(x,t), && B(-x,t) = B(x,t),\\ &\dot{E}(x,t) = \nabla \wedge B(x,t) - (\omega \wedge x)\rho(x), && \dot{B}(x,t) = -\nabla \wedge E(x,t), \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\nabla \cdot E(x,t) = \rho(x), && \nabla \cdot B(x,t) = 0.\\ &I\,\dot{\omega} = \textstyle\int x \wedge [E(x,t) + (\omega \wedge x) \wedge B(x,t)]\rho(x)\,dx, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\omega(t)$ — угловая скорость частицы, а

$$I = \frac{2}{3}\int x^2 \rho(x)\,dx$$

— ее момент инерции. Функционал энергии равен

$$H(E,B,\omega) = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{1}{2}\int \Big(|E(x)|^2 + |B(x)|^2\Big) dx.$$

Во всех системах механическую массу частицы, а также скорость распространения волны мы считаем равными 1.

Заметим, что случаи поля Максвелла и волнового поля идейно имеют много общего, однако для поля Максвелла алгебраическая структура задачи и соответствующие вычисления существенно усложняются.

Будем записывать все системы (1), (4), (5)–(6), (7)–(8) в виде

$$\dot{Y}(t) = G(Y(t)), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

где $Y(t) := (\varphi(x,t), \pi(x,t), q(t), p(t))$ для волнового уравнения и уравнения Клейна–Гордона, $Y(t) := (E(x,t), B(x,t), q(t), p(t))$ для уравнения Максвелла, $Y(t) := (E(x,t), B(x,t), \omega(t))$ для уравнения Максвелла с вращающейся частицей; G — нелинейный оператор, определяемый правыми частями уравнений соответствующей системы. Все производные понимаются в смысле обобщенных функций. Рассмотрим задачу Коши для (9) с начальным условием

$$Y(0) = Y^0. \tag{10}$$

2.1. Фазовые пространства. Существование динамики

Введем фазовые пространства, в которых имеет место существование динамики для указанных систем. Также введем локальные энергетические полунормы, в которых будут получена часть результатов по асимптотике.

Пусть $H^0 = L^2$ — вещественное гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и нормой $|\cdot|$, а H^1 — пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^3) = \{\varphi \in L^2 : |\nabla\varphi| \in L^2\}$ с нормой $\|\varphi\|_{H^1} = |\nabla\varphi| + |\varphi|$. Введем также пространство $\dot{H}^1$ — пополнение вещественного пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ по норме $|\nabla\varphi(x)|$. Норму в пространстве $\dot{H}^1$ обозначим $\|\cdot\|$, т.е. $\|\varphi\| = |\nabla\varphi|$. В силу соответствующей теоремы вложения Соболева, [19], $\dot{H}^1 = \{\varphi \in L^6(\mathbb{R}^3) : |\nabla\varphi| \in L^2\}$.

Введем фазовое пространство для волновой системы (1).

Определение 1. 1) $\dot{\mathcal{E}}$ — гильбертово пространство $\dot{H}^1 \oplus L^2 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ с конечной нормой

$$\| Y \|_{\dot{\mathcal{E}}} = \|\varphi\| + |\pi| + |q| + |p|, \quad \text{где} \quad Y = (\varphi, \pi, q, p)\,.$$

2) $\dot{\mathcal{F}}$ — пространство $\dot{H}^1 \oplus L^2$ полей $F = (\varphi, \pi)$ с конечной нормой

$$\|F\|_{\dot{\mathcal{F}}} = \|\varphi\| + |\pi|.$$

3) $\dot{\mathcal{F}}_R$ (локальное энергетическое пространство) — пространство полей $F = (\varphi, \pi)$ с конечными полунормами

$$\|F\|_R = |\nabla\varphi|_R + |\pi|_R \;\; \forall R > 0.$$

Здесь $|\cdot|_R$ — норма пространства $L^2(B_R)$, где B_R — шар $\{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, |x| < R\}$.

Заметим, что $\dot{H}^1$ не содержится в L^2, однако ввиду оценки

$$\frac{1}{2}\langle \rho, \Delta^{-1}\rho \rangle \le \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \langle \varphi(x), \rho(x-q)\rangle \le \;\; |\nabla\varphi|^2 - \frac{1}{2}\langle \rho, \Delta^{-1}\rho\rangle \tag{11}$$

$\dot{\mathcal{E}}$ является пространством состояний конечной энергии, т.е. $\mathcal{H}(Y) < \infty$ при $Y \in \dot{\mathcal{E}}$, и энергия ограничена снизу на $\dot{\mathcal{E}}$; пространство $\dot{\mathcal{F}}_R$ метризуемо.

Теперь введем фазовое пространство для системы Клейна–Гордона (4).

Определение 2. 1) Фазовое пространство $\mathcal{E}$ уравнения (4) при $m > 0$ — это вещественное гильбертово пространство $H^1 \oplus L^2 \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3$ состояний $Y = (\varphi, \pi, q, p)$ с конечной нормой

$$\|Y\|_{\mathcal{E}} = \|\varphi\|_{H^1} + |\pi| + |q| + |p|.$$

2) $\mathcal{F}$ — пространство $H^1 \oplus L^2$ полей $F = (\varphi, \pi)$ с конечной нормой

$$\|F\|_{\mathcal{F}} = \|\varphi\|_{H^1} + |\pi|.$$

3) $\mathcal{F}_R$ — пространство полей $F = (\varphi, \pi)$ с конечными полунормами

$$\|F\|_R = \|\varphi\|_R + |\pi|_R \;\; \forall R > 0,$$

где $\|\cdot\|_R$ — норма пространства $H^1(B_R)$.

Обратимся к системе Максвелла–Лоренца (5) – (6). Положим $H^0 = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$. Обозначим H^0_s — подпространство, образованное соленоидальными векторными полями, а именно, замыкание в H^0 векторных полей из $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ с нулевой дивергенцией. Определим (нелинейное) фазовое пространство

$$\mathcal{M} = H^0 \oplus H^0_s \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3, \;\; \|Y\|_{\mathcal{M}} = |E| + |B| + |q| + |p|, \;\; \text{где} \;\; Y = (E, B, q, p), \;\; \nabla\cdot E = \rho(x-q).$$

Введем соответствующее пространство полей:

$$\mathcal{F} = H^0 \oplus H^0_s, \;\; \|(E, A)\|_{\mathcal{F}} = |E| + |B|, \;\; \nabla\cdot E = \rho(x-q).$$

Определим локальное энергетическое пространство

$$\mathcal{F}_R = \{(E, A) \,:\, \|(E, A)\|_R = |E|_R + |B|_R < \infty \;\; \forall R > 0\}, \;\; \nabla\cdot E = \rho(x-q), \;\; \nabla\cdot B = 0.$$

Наконец, введем фазовое пространство для системы (7) – (8). Положим $\mathcal{F} = L^2 \oplus L^2$ и $\mathcal{L} = \mathcal{F} \oplus \mathbb{R}^3$,

$$\|(E, B\|_{\mathcal{F}} = |E| + |B|, \;\; \|Y\|_{\mathcal{L}} = |E| + |B| + |\omega|, \;\; Y = (E, B, \omega) \in \mathcal{L}.$$

Фазовое пространство $\mathcal{M}_s$ — метрическое пространство состояний $(E, B, \omega) \in \mathcal{L}$, удовлетворяющих условиям симметрии-антисимметрии $E(-x) = -E(x)$, $B(-x) = B(x)$ и связям

$$\nabla \cdot E(x) = \rho(x), \quad \nabla \cdot B(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Метрика на $\mathcal{M}_s$ индуцируется вложением $\mathcal{M}_s \subset \mathcal{L}$. Локальное энергетическое пространство определяется аналогично.

При условии (2) каждая из систем (1), (4), (5) – (6), (7) – (8) определяет динамику на соответствующем фазовом пространстве, а именно, справедливо следующее утверждение о существовании динамики.

Предложение 1. [8, 10, 14, 16] Пусть выполнены условия (2). Тогда

1) задача Коши (9), (10) имеет

единственное решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \dot{\mathcal{E}})$ для любого $Y^0 \in \dot{\mathcal{E}}$ в случае волнового уравнения;

единственное решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ для любого $Y^0 \in \mathcal{E}$ в случае уравнения Клейна–Гордона;

единственное решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ для любого $Y^0 \in \mathcal{M}$ в случае уравнения Максвелла.

единственное решение $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_s)$ для любого $Y^0 \in \mathcal{M}_s$ в случае уравнения Максвелла с вращающейся частицей.

2) Для любого $t \in \mathbb{R}$ отображение $U(t) : Y^0 \mapsto Y(t)$ непрерывно на $\dot{\mathcal{E}}$ (соответственно на $\mathcal{E}$, на $\mathcal{M}$, на $\mathcal{M}_s$).

3) Выполняется закон сохранения энергии

$$\mathcal{H}(Y(t)) = \mathcal{H}(Y(0)), \;\; \mathcal{H}_m(Y(t)) = \mathcal{H}_m(Y(0)), \;\; H(Y(t)) = H(Y(0))$$

для каждой соответствующей системы.

4) Выполняется оценка скорости частицы

$$|\dot{q}(t)| \leqslant q_1(\rho, Y^0) < 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

5) Вторая и третья производные по времени $q^{(k)}(t)$, $k = 2, 3$, также равномерно ограничены, т.е. существуют такие постоянные $q_k > 0$, зависящие только от начальных данных, что

$$|q^{(k)}(t)| \leqslant q_k\,, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

2.2. Солитоны

Определим $V := \{v \in \mathbb{R}^3 : |v| < 1\}$. Системы (1), (4), а также (5) – (6) инвариантны относительно сдвигов и допускают солитонные решения

$$Y_{a,v}(t) = (\varphi_v(x - vt - a), \pi_v(x - vt - a), vt + a, p_v) \tag{14}$$

в случае волнового уравнения и уравнения Клейна–Гордона и

$$Y_{a,v}(t) = (E_v(x - vt - a), B_v(x - vt - a), vt + a, p_v)$$

в случае уравнения Максвелла, для любых $a \in \mathbb{R}^3, v \in V$; $p_v := v/\sqrt{1 - v^2}$.

Система Максвелла с вращающейся частицей (7) – (8) инвариантна относительно вращений и имеет солитонные решения

$$Y_\omega(t) = (E_\omega(x), B_\omega(x), \omega)$$

для любого $\omega \in \mathbb{R}^3$.

В случае волнового уравнения формулы полей солитонов имеют вид

$$\varphi_v(x) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(y)d^3y}{|\gamma(y-x)_\parallel + (y-x)_\perp|}\,, \ \ \pi_v(x) = -v\cdot\nabla\varphi_v(x). \tag{15}$$

Здесь мы положили $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$, $x = x_\parallel + x_\perp$, где $x_\parallel \| v$ и $x_\perp \perp v$, $x\in \mathbb{R}^3$.

Для уравнения Клейна–Гордона солитонные поля задаются формулами

$$\varphi_v(x) = -\frac{\gamma}{4\pi}\int \frac{e^{-m|\gamma(y-x)_\parallel + (y-x)_\perp|}\rho(y)d^3y}{|\gamma(y-x)_\parallel + (y-x)_\perp|}, \ \ \pi_v(x) = -v\cdot\nabla\varphi_v(x).$$

В случае уравнения Максвелла солитонные поля E_v, B_v задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} &E_v(x) = -\nabla\varphi_v(x) + v\cdot\nabla\ A_v(x), \qquad && B_v(x) = \nabla\wedge A_v(x);\\ &\varphi_v(x) = \frac{\gamma}{4\pi}\int\frac{\rho(y)d^3y}{|\gamma(y-x)_\parallel + (y-x)_\perp|}, && A_v(x) = v\varphi_v(x). \end{aligned} \tag{16}$$

Наконец, для уравнения Максвелла с вращающейся частицей солитонные поля в фурье-представлении имеют вид

$$\widehat{E}_\omega = -i\frac{k\hat\rho(k)}{k^2},\ \widehat{B}_\omega = -\frac{(k\wedge(\omega\wedge\nabla_k))\hat\rho(k)}{k^2}.$$

Вывести формулы для солитонов нетрудно, сделав преобразование Фурье. Покажем это на примере волнового уравнения.

Подставив $\varphi(x,t) = \varphi_v(x-vt)$, $\pi(x,t) = \pi_v(x-vt)$ в систему (1), получим $(v\cdot\nabla)^2\varphi_v(x) = \Delta\varphi_v(x) + \rho(x)$. Применим преобразование Фурье, получим

$$\hat\varphi_v(k) = -\hat\rho(k)/(k^2-(v\cdot k)^2)\,. \tag{17}$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, приходим к формулам (15). Заметим, что последнее уравнение системы (1) для найденного поля φ_v тоже будет выполнено. Его левая часть для постоянного импульса $p(t) = p_v$ равна нулю. Сделаем преобразование Фурье правой части и подставим (17). Ввиду условия (2) получим, что подынтегральное выражение нечетно, поэтому интеграл в правой части также равен нулю.

Для уравнений Клейна–Гордона и Максвелла формулы солитонов выводятся аналогично.

3. Солитонные асимптотики в случае слабого взаимодействия поля с частицей

Первая группа результатов относится к случаю *слабого взаимодействия* поля с частицей, см. [7, 9, 11–14, 16]. Слабое взаимодействие формализуется условием малости функции взаимодействия ρ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\gamma_\rho := \|\rho\| \ll 1. \tag{18}$$

Введем пространства начальных условий, достаточно быстро убывающих на бесконечности. Для волнового уравнения:

$\dot{\mathcal{E}}^\sigma$ при $0\le\sigma\le 1$ — пространство состояний $(\varphi,\pi,q,p)\in\dot{\mathcal{E}}$, для которых

$$\int\limits_{\{R\leqslant|x|\}} d^3x\,(|\nabla\varphi(x)|^2 + |\varphi(x)|^2 + |\pi(x)|^2) = \mathcal{O}(R^{-2-2\sigma}) \quad \text{при} \ \ R\to\infty\,.$$

Для уравнения Клейна–Гордона:

Пусть $0 < \sigma < 1/2$, $\alpha = (1-2\sigma)/3$. Множество $\mathcal{E}^\sigma$ — пространство состояний $(\varphi, \pi, q, p) \in \mathcal{E}$, для которых

$$\int\limits_{R\leqslant|x|} d^3x(R^2|\varphi(x)|^2 + |\nabla\varphi(x)|^2) = \mathcal{O}(R^{-(4+2\sigma)})$$

и

$$\int\limits_{R^\alpha\leqslant|x|} d^3x\ (|\varphi(x)|^2 + |\pi(x)|^2) = \mathcal{O}(R^{-(4+2\sigma)})$$

при $R \to +\infty$.

Для уравнения Максвелла:

Для $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ определим $\mathcal{M}^\sigma$ — пространство состояний $(E(x), B(x), q, p) \in \mathcal{M}$, для которых $\nabla E(x)$ и $\nabla B(x)$ принадлежат пространству L^∞_{loc} вне шара B_R с некоторым $R = R(Y) > 0$ и выполняется оценка

$$|E(x)| + |B(x)| + |x|\,(|\nabla E(x)| + |\nabla B(x)|) \leqslant C|x|^{-1-\sigma} \quad |x| > R. \tag{19}$$

Для уравнения Максвелла с вращающейся частицей:

$\mathcal{M}^\sigma_s$, $0 \leq \sigma \leq 1$ — пространство состояний $(E(x), B(x), \omega) \in \mathcal{M}_s$, для которых $\nabla E(x)$,$\nabla B(x)$ принадлежат пространству L^∞_{loc} вне шара B_R с некоторым $R = R(Y) > 0$ и

$$|E(x)| + |B(x)| + |x|\Big(|\nabla E(x)| + |\nabla B(x)|\Big) \leqslant C|x|^{-1-\sigma} \text{ при } |x| > R.$$

Теорема 1. *Если, в условиях Предложения* 1, *величина* γ_ρ *достаточно мала и начальные условия принадлежат пространствам* $\dot{\mathcal{E}}^\sigma, \mathcal{E}^\sigma, \mathcal{M}^\sigma, \mathcal{M}^\sigma_s$ *соответственно, то для первых трех систем имеет место следующая солитонная асимптотика:*

1) *Ускорение частицы стремится к нулю:*

$$|\ddot{q}(t)| \leqslant C(1+|t|)^{-1-\sigma}. \tag{20}$$

2) *Скорость частицы стабилизируется: существуют такие* $v_\pm = \lim_{t\to\pm\infty} \dot{q}(t)$, $v_\pm \in V$, *что*

$$|\dot{q}(t) - v_\pm| \ \leqslant C\,(1+|t|)^{-\sigma}. \tag{21}$$

3) *Поля в окрестности частицы сходятся к солитонным полям:*

$$\|F(x+q(t),t) - F_{v_\pm}(x)\|_R \leqslant C_R(1+|t|)^{-\sigma}, \quad \forall R > 0. \tag{22}$$

Здесь $F = (\varphi, \pi)$ *в случае уравнений волнового и Клейна–Гордона;* $F = (E, B)$ *в случае уравнения Максвелла. Соответственно* $F_v = (\varphi_v, \pi_v)$ *или* $F_v = (E_v, B_v)$ *— солитонные поля.* $\|\cdot\|_R$ *— определенная выше локальная энергетическая полунорма в соответствующем пространстве полей.*

4) *Имеет место рассеяние в глобальной энергетической норме: существуют такие* $F_\pm$, *что*

$$\|F(x,t) - F_{v(t)}(x - q(t)) - U(t)F_\pm\| \leqslant C(1+|t|)^{-\sigma}. \tag{23}$$

Здесь $U(t)$ *— группа свободного уравнения, волнового, Клейна–Гордона или Максвелла, норма берется в соответствующем пространстве полей.*

Для уравнения Максвелла с вращающейся частицей в покое:

1) *Угловая скорость стабилизируется: существуют* $\omega_\pm = \lim_{t\to\pm\infty}\omega(t)$, *причем*

$$|\omega(t) - \omega_\pm| \ \leqslant C\ \ (1+|t|)^{-\sigma}.$$

2) *Поля сходятся к солитонным в локальных энергетических полунормах:*

$$\|F(x,t) - F_{\omega_\pm}(x)\|_R \leqslant C_R(1+|t|)^{-\sigma}, \quad \forall R > 0.$$

3) *Имеет место рассеяние в глобальной энергетической норме: существуют такие* $F_\pm \in \mathcal{F}$, *что*

$$\|F(x,t) - F_{\omega(t)}(x) - U(t)F_\pm\|_{\mathcal{F}} \leqslant C(1+|t|)^{-\sigma}.$$

3.1. Вывод асимптотик методом интегрального неравенства

В случае слабого взаимодействия поля с частицей применяется *метод интегрального неравенства.* Доказательство можно разбить на несколько шагов, которые по существу будут одинаковыми для первых трех рассматриваемых систем, отличаясь лишь техническими подробностями. Опишем эти шаги на примере волнового уравнения. В случае уравнения Максвелла с вращающейся частицей эти шаги несколько модифицируются, см. ниже.

Введение сопутствующего солитона. Рассмотрим решение $Y(t)$ системы (1). Введем *сопутствующий солитон* $F_{v(t)}(x - q(t))$, где $v(t) := \dot{q}(t)$. Центр сопутствующего солитона находится в месте расположения частицы, а его параметр скорости равен скорости частицы в данной точке в данный момент времени.

Вывод уравнения для разности решения и сопутствующего солитона. Рассмотрим разность

$$Z(x,t) = F(x,t) - F_{v(t)}(x - q(t)),$$

где $F(x,t) = (\varphi(x,t), \pi(x,t))$ — поля решения системы, $F_v = (\varphi_v, \pi_v)$ — солитонные поля. Положим $\overline{\rho}(x) = (0, \rho(x))$ и $A(\varphi,\pi) = (\pi, \Delta\varphi)$. Поля F удовлетворяют уравнению

$$\dot{F}(x,t) = AF(x,t) - \overline{\rho}(x - q(t)),$$

солитонные поля F_v при *фиксированном* v — такому же уравнению с $q(t) = vt$. Вычитая, получаем для Z уравнение

$$\dot{Z}(x,t) = AZ(x,t) - \dot{p}(t)\cdot\nabla_p F_{v(t)}(x - q(t)). \tag{24}$$

Здесь $\nabla_p F_v = \nabla_v F_v\, dv(p)$, где $dv(p)$ — дифференциал отображения $p \mapsto v(p) = p/\sqrt{1+p^2}$.

Формулировка оценки нормы разности

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (2), (18) *и начальные данные принадлежат пространству* $\dot{\mathcal{E}}^\sigma$. *Тогда при любом* $R > 0$ *выполняется оценка:*

$$\|Z(\cdot + q(t), t)\|_R \leqslant C_R(1+|t|)^{-1-\sigma}. \tag{25}$$

Доказательство. Сначала докажем оценку (25) для случая $R = R_\rho$ (напомним, что R_ρ — радиус носителя функции $\rho(x)$). Для решения уравнения (24) имеем интегральное представление (интеграл Дюгамеля):

$$Z(t) = U(t)Z(0) - \int_0^t U(t-s)[\dot{p}(s)\cdot\nabla_p F_{v(s)}(\cdot - q(s))]\, ds, \tag{26}$$

где $U(t)$ — группа свободного волнового уравнения в $\dot{H}^1 \oplus L^2$. Чтобы получить оценку (25) для $Z(t)$, нам надо получить следующие три оценки:

1) оценку скорости изменения импульса $\dot{p}(s)$;

2) оценку выражения $U(t-s)[\dot{p}(s)\cdot\nabla_p F_{v(s)}(\cdot - q(s))]$;

3) оценку $U(t)Z(0)$.

Оценка 1. Импульс удовлетворяет уравнению $\dot{p}(t) = -\int \nabla\varphi(x+q(t),t)\,\rho(x)dx$. Для солитонного поля выполняется уравнение $0 = -\int \nabla\varphi_v(\cdot+q(t))\,\rho(x)dx$. Вычитая, получим уравнение

$$\dot{p}(t) = -\int \nabla Z_1(x+q(t),t)\,\rho(x)dx, \tag{27}$$

где Z_1 — первая компонента вектора Z. Из этого уравнения следует оценка

$$|\dot{p}(t)| \leqslant C\|Z(\cdot+q(t),t)\|_R|\rho|. \tag{28}$$

Действительно, подынтегральное выражение в (27) равно нулю при $|x| > R = R_\rho$, так что оценка (28) получается из (27) ввиду неравенства Коши–Буняковского.

Оценка 2. Заметим, что $\dot{p}(s)$ не зависит от x, поэтому

$$U(t-s)[\dot{p}(s)\cdot\nabla_p F_{v(s)}(\cdot-q(s))] = \dot{p}(s)\cdot U(t-s)[\nabla_p F_{v(s)}(\cdot-q(s))].$$

Оценка $\dot{p}(s)$ уже получена, поэтому остается оценить убывание действия группы свободного волнового уравнения на производной солитона по скоростям, т.е. убывание действия группы на конкретной функции. Поэтому соответствующая оценка будет точной.

Используя явные формулы для решения волнового уравнения с учетом строгого принципа Гюйгенса и закона сохранения энергии, получаем оценку, см. подробности в [9, Параграф 3]:

$$\|\dot{p}(s)\cdot U(t-s)[\nabla_p F_{v(s)}(\cdot-q(s))]\|_R \leqslant C|\rho|\,\frac{\|Z(\cdot+q(s),s)\|_R\,|\rho|}{1+(t-s)^2}. \tag{29}$$

Оценка 3. Теперь оценим $\|[U(t)Z(0)](\cdot+q(t),t)\|_R$. Это стандартная оценка убывания группы свободного волнового уравнения, примененной к убывающим начальным данным. Для применения метода интегрального неравенства достаточно, чтобы порядок убывания был суммируемым. Это обеспечивается достаточно быстрым пространственным убыванием начальных данных $Z(0)\in\mathcal{E}^\sigma$. Для таких данных справедлива оцека

$$\|[U(t)Z(0)](\cdot+q(t),t)\|_R \leqslant \frac{C}{(1+|t|)^{1+\sigma}}. \tag{30}$$

Метод интегрального неравенства. Комбинируя оценки (28), (29) и (30) с $R = R_\rho$, получаем

$$\|Z(\cdot+q(t),t)\|_{R_\rho} \leqslant \frac{C(Z(0),q^0,\bar{v},R_\rho)}{(1+|t|)^{1+\sigma}} + \gamma_\rho^2 C_4(\overline{v},R_\rho)\int_0^t \frac{\|Z(\cdot+q(s),s)\|_{R_\rho}}{1+(t-s)^2}\,ds, \quad t\geqslant 0.$$

Положим $M(t) := \max_{0\leq s\leqslant t}(1+|s|)^{1+\sigma}\|Z(\cdot+q(s),s)\|_{R_\rho}$, тогда

$$M(t) \leqslant C_0(Z(0),q^0,\overline{v},R_\rho) + \gamma_\rho^2 C(\overline{v},R_\rho)I_\sigma M(t),$$

где

$$I_\sigma = \sup_{t\geqslant 0}(1+|t|)^{1+\sigma}\int_0^t \frac{(1+|s|)^{-1-\sigma}}{(1+|t-s|^2)}\,ds < \infty \quad \sigma\in(0,1]\,.$$

Остается выбрать γ_ρ настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\gamma_\rho^2 C(\overline{v},R_\rho)I_\sigma < 1$, тогда выполняется оценка (25) с $R = R_\rho$.

Из оценки (25) с $R = R_\rho$ выводится та же оценка, уже с любым $R > 0$, см. подробности в [9, 13].

Вывод (23) из оценки нормы разности (метод Кука теории рассеяния). Из оценок (25) и (28) следует

$$|\dot{p}(t)| \leqslant C(1+|t|)^{-1-\sigma} \Longleftrightarrow |\ddot{q}(t)| \leqslant C_1(1+|t|)^{-1-\sigma}, \tag{31}$$

Тем самым доказана оценка (20). Из нее следует оценка (21).

Теперь докажем, что

$$\|Z(x,t) - U(t)F_{\pm}\|_{\mathcal{F}} \leqslant C(1+|t|)^{-\sigma}. \tag{32}$$

Это равносильно тому, что $\|U(-t)Z(x,t) - F_{\pm}\|_{\mathcal{F}} \leqslant C(1+|t|)^{-\sigma}$. Применим $U(-t)$ к интегральному уравнению (26) и получим

$$U(-t)Z(t) = Z(0) - \int_0^t U(-s)[\dot{p}(s)\cdot\nabla_p F_{v(s)}(\cdot - q(s))]\,ds.$$

Из (31) следует сходимость интеграла с указанной скоростью сходимости, что влечет (32), а значит и (23). Из (25), ввиду уже полученной оценки (21) и непрерывной зависимости солитона от параметра v, получаем оценку (22).

Для случая полной системы Максвелла с движущейся и вращающейся частицей [18], (10.17) – (10.20) известно, что солитонные решения вида

$$q(t) = q + vt,\ \omega(t) \equiv \omega,\ E(x,t) = E_{v,\omega}(x - vt),\ B(x,t) = B_{v,\omega}(x - vt)$$

при $v \neq 0$ существуют только в случае $\omega \| v$ или $\omega \perp v$. Это не позволяет естественным образом ввести сопутствующий солитон. Именно поэтому рассмотрена упрощенная система с вращающейся частицей в покое (7) – (8), для которой сопутствующий солитон определяется естественно: $F_{\omega(t)}(x)$, где $F_\omega = (E_\omega, B_\omega)$ — полевая часть солитона. Обозначим

$$Z(x,t) = F(x,t) - F_{\omega(t)}(x).$$

Положим $\overline{\rho}(x) = (\rho(x), 0)$ и $A(E,B) = (\nabla\wedge B, -\nabla\wedge E)$, тогда для Z выполняется уравнение

$$\dot{Z}(x,t) = AZ(x,t) - \dot{\omega}(t)\cdot\nabla_\omega F_{\omega(t)}(x).$$

Для начальных условий, принадлежащих пространству $\mathcal{M}_s^\sigma$, для любого $R > 0$ выполняется следующая оценка:

$$\|Z(\cdot,t)\|_R \leqslant C_R(Z(\cdot,0),\rho)(1+|t|)^{-1-\sigma}.$$

Эта оценка выводится из представления Дюгамеля решения

$$Z(t) = U(t)Z(0) - \int_0^t U(t-s)[\dot{\omega}(s)\cdot\nabla_\omega F_{\omega(s)}(\cdot)]\,ds = U(t)Z(0) - \int_0^t \dot{\omega}(s)\cdot U(t-s)\nabla_\omega F_{\omega(s)}(\cdot)\,ds,$$

где $U(t)$ — свободная группа уравнения Максвелла на соленоидальных полях.

Дальнейшие шаги доказательства аналогичны соответствующим шагам для предыдущих задач. Отметим только, что в предыдущих задачах оценивалось действие свободной группы на производной солитона по линейной скорости v, а в задаче с вращающейся частицей оценивается действие свободной группы на производной солитона по угловой скорости ω.

4. Солитонные асимптотики при винеровском условии на плотность заряда. Случай волнового уравнения

В этом и следующем параграфах мы дадим обзор вывода солитонных асимптотик без предположения малости ρ, однако при специальном дополнительном условии, которое мы называем *условием Винера* (или *винеровским условием*). Название объясняется использованием в доказательств так называемой *тауберовой теоремы Винера*, см. ниже. Заметим, что в [17] выясняется спектральный смысл винеровского условия, однако этот момент выходит за рамки настоящего обзора.

Вывод солитонных асимптотик при винеровском условии состоит из трех основных шагов. Сначала доказывается убывание ускорения частицы, в этом месте и используется тауберова теорема Винера. Затем, с учетом гамильтоновой структуры системы и при помощи канонического преобразования переменных, выводится *орбитальная устойчивость* солитонов. Наконец, комбинируя орбитальную устойчивость и убывание ускорения, мы получаем солитонные асимптотики (в локальных энергетических полунормах).

Отметим, что при выводе убывания ускорения и солитонных асимптотик существенно используется *строгий принцип Гюйгенса*, который имеет место для волнового поля и поля Максвелла, но не выполняется для поля Клейна–Гордона. Поэтому вопрос о солитонных асимптотиках для поля Клейна–Гордона при условии Винера остается пока открытым.

В настоящем параграфе мы достаточно подробно излагаем случай волнового уравнения, [7, 10]. В следующем параграфе кратко укажем модификацию основных шагов для случая поля Максвелла, [8]. В работе [8] получена только предварительная асимптотика — сходимость в локальных полунормах к сопутствующему солитону с переменной скоростью. Это связано с техническими трудностями из-за наличия связей (6) в уравнениях Максвелла. Эти трудности были преодолены в работе [15], основные моменты которой мы тоже изложим в следующем параграфе.

4.1. Формулировка результата

На начальные данные накладываются более сильные условия регулярности: положим $\dot{\mathcal{E}}^\sigma$ при $\sigma \geq 0$ — множество таких состояний $Y = (\varphi, \pi, q, p) \in \dot{\mathcal{E}}$, что для некоторого $R^0 = R^0(Y) > 0$ функции $\varphi(x)$, $\pi(x)$ соответственно C^2, C^1-дифференцируемы вне шара B_{R^0} и

$$|\varphi(x)| + |x|(|\nabla\varphi(x)| + |\pi(x)|) + |x|^2(|\nabla\nabla\varphi(x)| + |\nabla\pi(x)|) = \mathcal{O}(|x|^{-\sigma}) \qquad |x| \to \infty. \tag{33}$$

Накладывается требование, чтобы все «частотные моды» поля взаимодействовали с частицей — это формализуется условием Винера

$$\hat{\rho}(k) = \int d^3x\, e^{ikx}\rho(x) \neq 0 \quad \text{при всех} \ \ k \in \mathbb{R}^3\,. \tag{34}$$

Замечание. Априори не очевидно, что существуют плотности заряда, удовлетворяющие одновременно условиям (2) и (34). Примеры таких плотностей построены в Приложении 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (2) и (34), пусть $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ — решение системы* (1) *с начальными условиями $Y^0 = Y(0) \in \dot{\mathcal{E}}^\sigma$, где $\sigma > 1/2$. Тогда*

1)
$$\lim_{t\to\infty} \ddot{q}(t) = 0. \tag{35}$$

2) *Существует такое $v \in V$, что для любого $R > 0$*

$$\lim_{t\to\infty} \Big(\|\varphi(q(t) + \cdot\,, t) - \varphi_v(\cdot)\|_R + |\pi(q(t) + \cdot\,, t) - \pi_v(\cdot)|_R + |\dot{q}(t) - v| \Big) = 0\,. \tag{36}$$

4.2. Убывание ускорения частицы

Как уже отмечалось выше, убывание ускорения частицы связано с излучением энергии в бесконечность. В работах [7, 8] эта идея была формализована, сформулированы и доказаны точные утверждения.

Рассеяние энергии в бесконечности

Мы выведем оценку снизу излученной в бесконечность полной энергии, в терминах *интеграла диссипации энергии*, см. ниже. Поскольку энергия априори ограничена, этот интеграл должен быть конечным.

Шаг 1. Излучение энергии из большого шара. Определим энергию $\mathcal{H}_R(t)$ в момент $t \in \mathbb{R}$ в шаре B_R с $R > |q(t)| + R_\rho$ как

$$\mathcal{H}_R(t) = \frac{1}{2}\int_{B_R} d^3x\, \Big(|\pi(x,t)|^2 + |\nabla\varphi(x,t)|^2\Big) + \sqrt{1+p^2(t)} + \int d^3x\, \varphi(x,t)\rho(x-q(t))\,.$$

Зафиксируем $T > 0$ и рассмотрим полную излученную энергию I_R из шара B_R за промежуток времени $[R, R+T]$, где $R \gg T$:

$$I_R(R, R+T) = \mathcal{H}_R(R) - \mathcal{H}_R(R+T).$$

Эта энергия ограничена априори, поскольку величина $\mathcal{H}_R(R)$ ограничена сверху, а величина $\mathcal{H}_R(R+T)$ ограничена снизу. Действительно, в силу сохранения энергии, $\mathcal{H}_R(R) \leqslant \mathcal{H}(Y(t)) = \mathcal{H}(Y^0)$. С другой стороны, ввиду оценки (11)

$$\mathcal{H}_R(t) \geqslant \mathcal{H}(Y(t)) - \frac{1}{2}(\|\pi(t)\|^2 + \|\nabla\varphi(t)\|^2) \geq -C_1(\mathcal{H}(Y^0) + C_2\langle\rho, \Delta^{-1}\rho\rangle.$$

Поэтому

$$\mathcal{H}_R(R) - \mathcal{H}_R(R+T) \leq I < \infty\,, \tag{37}$$

где постоянная I не зависит от T и R.

Шаг 2. Скорость излучения энергии из шара. Обозначим $\omega(x) = x/|x|$, d^2x — элемент площади поверхности ∂B_R, $\overline{R}^0 = \max(R^0, R_\rho + |q^0|)$ с $R^0 = R^0(Y^0)$, соответствующим начальному состоянию $Y^0 \in \dot{\mathcal{E}}^\sigma$, наконец, $\Delta_R = [R+\overline{R}^0, (R-\overline{R}^0)/q_1]$, где q_1 взято из оценки (12). Поскольку $0 < q_1 < 1$, Δ_R — непустой промежуток длины $|\Delta_R| \sim R(1-q_1)/q_1$ при больших R. Из (33) следует, что решение $\varphi(x,t)$ является C^1-дифференцируемым в области $t > R^0+|x|$. Более подробно, дифференцируемость следует из интегрального представления решения. А именно,

$$\varphi(x,t) = \varphi_r(x,t) + \varphi_0(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

где $\varphi_r(x,t)$ — *запаздывающий потенциал*, а $\varphi_0(x,t)$ — *интеграл Кирхгофа*

$$\varphi_r(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{d^3y\ \Theta(t-|x-y|)}{|x-y|}\rho(y - q(t-|x-y|)), \tag{38}$$

$$\varphi_0(x,t) = \frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} d^2y\ \pi^0(y) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi t}\int_{S_t(x)} d^2y\ \varphi^0(y)\right). \tag{39}$$

Здесь $S_t(x)$ обозначает сферу $\{y:\ |y-x| = t\}$, Θ — стандартная функция Хевисайда.

Далее, ввиду оценки (12), имеем $|q(t)| < |q^0| + q_1 t$ при $t > 0$. Отсюда получаем

$$\frac{d}{dt}\mathcal{H}_R(t) = -\int_{\partial B_R} d^2x\ \omega(x)\cdot S(x,t) \quad \text{при} \ \ t \in \Delta_R, \tag{40}$$

где $S(x,t) = -\pi(x,t)\nabla\varphi(x,t)$. Тогда из (40) и (37) следует

$$-\int_R^{R+T} dt\ \int_{\partial B_R} d^2x\ \omega(x)\cdot S(x,t) \leq I. \tag{41}$$

Шаг 3. Асимптотика полей в волновой зоне; случай финитных начальных данных. Нам потребуется асимптотика полей $\pi(x,t)$ и $\nabla\varphi(x,t)$ в «волновой» зоне $|x| \sim t \to \infty$. Сначала рассмотрим частный случай начальных данных $\varphi^0(x), \pi^0(x)$ с компактным носителем: $\varphi^0(x) = \pi^0(x) = 0$ при $|x| > R^0$. Тогда из строгого принципа Гюйгенса следует

$$\varphi(x,t) = \varphi_r(x,t), \ \ \pi(x,t) = \pi_r(x,t) \ \ t > |x| + R^0. \tag{42}$$

В этом случае необходимую асимптотику типа Льенара–Вихерта, см. замечание ниже, обеспечивает следующая лемма, которую мы докажем позже:

Лемма 2. *Существует такое $T_r > 0$, что равномерно по $t \in [T_r, T]$ при любом фиксированном $T > T_r$ выполняется асимптотика:*

$$\pi_r(x, |x| + t) = \overline{\pi}_r(\omega(x), t)|x|^{-1} + \mathcal{O}(|x|^{-2}), \quad (43)$$

$$\nabla\varphi_r(x, |x| + t) = -\omega(x)\overline{\pi}_r(\omega(x), t)|x|^{-1} + \mathcal{O}(|x|^{-2}) \quad (44)$$

при $|x| \to \infty$.

Здесь мы положили

$$\overline{\pi}_r(\omega, t) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3y\ \rho(y - q(\overline{\tau}))\frac{\ddot{q}_{\|}(\overline{\tau})}{(1 - \dot{q}_{\|}(\overline{\tau}))^2} \quad (45)$$

— «интеграл диссипации энергии», где используются следующие обозначения: S^2 — единичная сфера $\{|\omega| = 1\}$ в $\mathbb{R}^3$, $d^2\omega$ — элемент площади ее поверхности. Для фиксированного $\omega \in S^2$ полагаем $z = \omega z_{\|} + z_{\perp}$, где $z_{\|} = \omega \cdot z$, а $z_{\perp} \perp \omega$, $z \in \mathbb{R}^3$; $\overline{\tau} = t + y_{\|}$.

Шаг 4. Оценка диссипации энергии в случае финитных начальных данных. Тождества (42) приводят к

$$S(x, |x| + t) = \omega(x)|\overline{\pi}_r(\omega(x), t))|^2|x|^{-2} + \mathcal{O}(|x|^{-3}) \quad t > \overline{T} = \max(T_r, R^0). \quad (46)$$

Из (41) следует

$$\int_{\overline{T}}^{T} dt \int_{S^2} d^2\omega\ |\overline{\pi}_r(\omega, t)|^2 \leq I + T\mathcal{O}(R^{-1}).$$

Шаг 5. Случай общих начальных данных. Теперь рассмотрим общие начальные данные φ^0 и π^0. Подставим $\pi = \pi_r + \pi_0, \nabla\varphi = \nabla\varphi_r + \nabla\varphi_0$ в (41),

$$\int_{R}^{R+T} dt \int_{\partial B_R} d^2x\ \omega(x) \cdot (\pi_r\nabla\varphi_r + \pi_0\nabla\varphi_r + \pi_r\nabla\varphi_0 + \pi_0\nabla\varphi_0) \leq I. \quad (47)$$

Запаздывающие поля $\pi_r, \nabla\varphi_r$ порождаются плотностью заряда $\rho(x - q(t))$, (38), а поля $\pi_0, \nabla\varphi_0$ — начальными полями φ^0, π^0, (39). Эта разница очень существенна, поскольку $q(t)$ нам «не известно», а поля φ^0, π^0 «известны» и управляются формулой (33). Следующая лемма позволяет отделить «вклад» от полей φ^0, π^0 в левую часть (47).

Лемма 3. *Пусть $(\varphi^0, \pi^0, q^0, p^0) \in \dot{\mathcal{E}}^\sigma$ с $\sigma > 1/2$. Тогда существуют такие $I_0 < \infty$ и $T_0 > 0$, что для любого $R > 0$ и $T > T_0$*

$$\int_{R+T_0}^{R+T} dt \int_{\partial B_R} d^2x\ \Big(|\pi_0(x, t)|^2 + |\nabla\varphi_0(x, t)|^2\Big) \leq I_0. \quad (48)$$

Из этой леммы и (47), (43), (44) следует, что для каждого фиксированного $T > \overline{T} = \max(T_r, T_0)$,

$$\int_{\overline{T}}^{T} dt \int_{S^2} d^2\omega\ |\overline{\pi}_r(\omega, t)|^2 \leq I_1 + T\mathcal{O}(R^{-1}),$$

с постоянной $I_1 < \infty$, не зависящей от T и R, — ввиду неравенства Коши–Шварца. □

Остается устремить здесь $R \to \infty$, затем $T \to \infty$, и мы приходим к доказательству следующего предложения.

Предложение 2. Пусть выполнено условие (2) и $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ — решение (1) с начальными данными $Y^0 = Y(0) \in \mathcal{E}^\sigma$, где $\sigma > 1/2$. Тогда

$$\int_0^\infty dt \int_{S^2} d^2\omega|\overline{\pi}_r(\omega, t)|^2 < \infty. \quad (49)$$

Замечание Асимптотики (43), (44) аналогичны известному разложению потенциалов Льенара–Вихерта точечной частицы на дальнее и ближнее поля, [20]. Главный член асимптотики (46) соответствует известному выражению Лармора–Льенара для мощности излучения, [20].

Асимптотика типа Льенара–Вихерта в волновой зоне

Докажем леммы 2 и 3. Заметим, что в обеих леммах речь идет об асимптотике полей в волновой зоне $|x| \sim t \to \infty$.

Доказательство леммы 2. Положим $T_r = |q^0| + R_\rho$. Тогда из представления (38) следует, что при $t - |x| > T_0$

$$\pi_r(x,t) = \int d^3y \ \frac{1}{4\pi|x-y|} \nabla\rho(y - q(\tau)) \cdot \dot{q}(\tau), \tag{50}$$

где $\tau = t - |x - y|$. Подынтегральное выражение в (38) имеет носитель по y, равномерно ограниченный для ограниченного $t - |x|$. Поэтому из (38) следует, что для ограниченных $t - |x| > T_r$

$$\begin{aligned} \nabla\varphi_r(x,t) &= \int d^3y \ \frac{1}{4\pi|x-y|} n \nabla\rho(y - q(\tau)) \cdot \dot{q}(\tau) + \mathcal{O}(|x|^{-2}) = \\ &= \omega(x)\pi_r(x,t) + \mathcal{O}(|x|^{-2}), \end{aligned} \tag{51}$$

поскольку $n = \dfrac{x-y}{|x-y|} = \omega(x) + \mathcal{O}(|x|^{-1})$ для ограниченных y. Теперь подставим $|x| + t$ вместо t в представления (50), (51), чтобы получить асимптотики (43), (44) при $t > T_r$. Тогда τ становится $|x| + t - |x - y|$ и имеем, равномерно по ограниченным t и $|y|$:

$$\tau = |x| + t - |x-y| = t + \omega(x) \cdot y + \mathcal{O}(|x|^{-1}) = \overline{\tau} + \mathcal{O}(|x|^{-1}), \quad |x - y| = |x| + \mathcal{O}(1).$$

Поэтому из (50) следует (43) с

$$\overline{\pi}_r(\omega, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \ \nabla\rho(y - q(\overline{\tau})) \cdot \dot{q}(\overline{\tau}). \tag{52}$$

Тождество этого выражения с (45) установим при помощи интегрирования по частям. Заметим, что

$$\nabla_y \rho(y - q(\overline{\tau})) \cdot \dot{q}(\overline{\tau}) = \nabla\rho(y - q(\overline{\tau})) \cdot \dot{q}(\overline{\tau}) \ (1 - \omega \cdot \dot{q}(\overline{\tau})).$$

ввиду $\overline{\tau} = t + y_\| = t + \omega \cdot y$. Тогда

$$\begin{aligned} \int d^3y \ \nabla\rho(y - q(\overline{\tau})) \cdot \dot{q}(\overline{\tau}) &= \int d^3y \ \nabla_y \rho(y - q(\overline{\tau})) \cdot \dot{q}(\overline{\tau}) \frac{1}{1 - \omega \cdot \dot{q}(\overline{\tau})} \\ &= -\int d^3y \ \rho(y - q(\overline{\tau})) \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \frac{\dot{q}_\alpha(\overline{\tau})}{1 - \omega \cdot \dot{q}(\overline{\tau})}. \end{aligned}$$

Продифференцировав, получим

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \frac{\dot{q}_\alpha}{1 - \omega \cdot \dot{q}} = \frac{\ddot{q}_\alpha \omega_\alpha}{(1 - \omega \cdot \dot{q})^2} = \frac{\ddot{q}_\|}{(1 - \dot{q}_\|)^2} \ .$$

Тогда (52) очевидно совпадает с (45).

Итак, асимптотика (43) получена. В итоге (51) приводит к (44). □

Доказательство леммы 3. Выведем (48) с $T_0 = R^0 = R^0(Y^0)$ из формулы Кирхгофа (39) и предположения (33) для $Y = Y^0$. Из (39) следует, для $t > R^0 + |x|$, представление

$$\nabla\varphi_0(x,t) = \sum_{|\alpha| \le 1} t^{|\alpha|-2} \int_{S_t(x)} d^2y \, a_\alpha(x-y) \partial^\alpha \pi^0(y) + \sum_{|\alpha| \le 2} t^{|\alpha|-3} \int_{S_t(x)} d^2y \, b_\alpha(x-y) \partial^\alpha \varphi^0(y). \tag{53}$$

Здесь все производные понимаются в классическом смысле, а коэффициенты $a_\alpha(\cdot)$ и $b_\alpha(\cdot)$ ограничены. Аналогичное представление имеет место для $\pi_0(x,t)$. Коэффициенты являются однородными функциями нулевого порядка, гладкими вне начала координат. Тогда, с учетом предположения (33) для $Y = Y^0$, из (53) для $t > R^0 + |x|$ получаем

$$|\nabla\varphi_0(x,t)| \le C \sum_{0 \le k \le 1} t^{k-2} \int_{S_t(x)} d^2y \ |y|^{-\sigma-1-k} + C \sum_{0 \le k \le 2} t^{k-3} \int_{S_t(x)} d^2y \ |y|^{-\sigma-k}.$$

Всегда можно подобрать такое σ, что $\sigma + k \neq 2$. Тогда прямым вычислением получаем, что типичный член имеет вид

$$I^k(x,t) := \int_{S_t(x)} d^2y\ |y|^{-\sigma-k} = \frac{2\pi t}{|x|(2-\sigma-k)}\Big((t+|x|)^{2-\sigma-k}\ -\ (t-|x|)^{2-\sigma-k}\Big).$$

Поэтому вклад от соответствующего члена из (53) в левой части (48) можно оценить сверху выражением

$$\begin{aligned} J^\alpha_{R,T} := &\quad C_1\int_{R+T_0}^{R+T} dt \int_{\partial B_R} d^2x\ \left|t^{|\alpha|-3} I^{|\alpha|}(x,t)\right|^2 \\ = &\quad C_2 \int_{R^0}^{T} dt\ (R+t)^{2(|\alpha|-2)}\left|(2R+t)^{2-\sigma-|\alpha|}\ -\ t^{2-\sigma-|\alpha|}\right|^2. \end{aligned} \tag{54}$$

Возьмем σ чуть больше $1/2$. Тогда при $|\alpha| \le 1$ имеем $\sigma + |\alpha| \le 2$ и из (54) следует

$$J^\alpha_{R,T} \le C \int_{R^0}^{T} dt\ (R+t)^{-2\sigma} \le J^\alpha < \infty \text{ при } R \ge 0, T \ge R^0.$$

При $|\alpha| = 2$ из оценки (54) вытекает

$$J^\alpha_{R,T} \le C \int_{R^0}^{T} dt\ t^{-2\sigma} \le J^\alpha < \infty \text{ при } R \ge 0, T \ge R^0.$$

Все вклады от остальных членов из (53) можно мажорировать аналогично, также и для $\pi_0(x,t)$ в левой части (48). □

Замечание. Из представлений (39), (53) и соответствующего представления для $\pi_0(x,t)$ вместе с (33) следует, что для любого $R > 0$

$$\max_{|x|\le R}\Big(|\varphi_0(x,t)| + t|\pi_0(x,t)| + t|\nabla\varphi_0(x,t)|\Big) = \mathcal{O}(t^{-\sigma}) \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

где все производные понимаются в классическом смысле.

Убывание ускорения

Покажем, с помощью Предложения 4.2, что $\ddot{q}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, если выполнено условие (34).

Выполнены оценки (12) и (13) при $k = 2, 3$ из Предложения 2.1, 5). Поэтому функция

$$R_\omega(t) = \int d^3y\, \rho(y - q(t+\omega\cdot y))\frac{\omega\cdot\ddot{q}(t+\omega\cdot y)}{(1-\omega\cdot\dot{q}(t+\omega\cdot y))^2} \tag{55}$$

является глобально липшицевой по ω и t. Тогда, согласно Предложению 4.2,

$$\lim_{t\to\infty} R_\omega(t) = 0 \tag{56}$$

равномерно по $\omega \in S^2$. Положим $r(t) = \omega\cdot q(t) \in \mathbb{R}$, $s = \omega\cdot y$ и $\rho_a(q_3) = \int dq_1 dq_2 \rho(q_1,q_2,q_3)$. В формуле (55) выполним интегрирование по y вдоль ω, а также в трансверсальном направлении. Тогда

$$\begin{aligned} R_\omega(t) &= \int ds\, \rho_a(s - r(t+s))\, \frac{\ddot{r}(t+s)}{(1-\dot{r}(t+s))^2}, \\ &= \int d\tau\, \rho_a(t-(\tau - r(\tau)))\, \frac{\ddot{r}(\tau)}{(1-\dot{r}(\tau))^2}, \\ &= \int d\theta\, \rho_a(t-\theta) g_\omega(\theta) = \rho_a * g_\omega(t). \end{aligned} \tag{57}$$

Здесь мы подставили $\theta = \theta(\tau) = \tau - r(\tau)$ — это невырожденный диффеоморфизм, поскольку $|\dot{r}| \leq q_1 < 1$ согласно (12), и положили

$$g_\omega(\theta) = \frac{\ddot{r}(\tau(\theta))}{(1 - \dot{r}(\tau(\theta)))^2}.$$

Продолжим $q(t)$ в область $t < 0$, сохранив гладкость в нуле. Тогда $\rho_a * g_\omega\,(t)$ определено при всех t и совпадает с $R_\omega(t)$ при достаточно больших t. Поэтому (56) оказывается пределом свертки

$$\lim_{t\to\infty} \rho_a * g_\omega(t) = 0. \tag{58}$$

Теперь заметим, что из (12) и (13) с $k = 2, 3$ следует, что $g'_\omega(\theta)$ ограничено. Тогда из (58) и (W), по тауберовой теореме Винера в обобщении Питта [21, Теорема 9.7(b)], получаем

$$\lim_{\theta\to\infty} g_\omega(\theta) = 0. \tag{59}$$

Поскольку $\omega \in S^2$ произвольно, а $\theta(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, мы доказали утверждение 1) Теоремы 2: $\lim_{t\to\infty} \ddot{q}(t) = 0$.

Замечания. 1) В случае точечного заряда $\rho(x) = \delta(x)$ из формулы (58) формула (59) следует непосредственно.

2) Из равенства Парсеваля и формул (57) и (49) получаем

$$\int_{S^2} d^2\omega \int d\xi\, |\hat{\rho}_a(\xi)\hat{g}_\omega(\xi)|^2 < \infty.$$

Если $|\hat{\rho}_a(\xi)| \geqslant C > 0$, то $\int d^2\omega \int d\theta\, |g_\omega(\theta)|^2 < \infty$, и (59) следовало бы из липшицевости g_ω. Таким образом, главной причиной трудностей является быстрое убывание фурье-образа («символа») $\hat{\rho}_a$, ввиду гладкости ядра ρ_a.

3) Условие (34) является необходимым. Действительно, если (34) не выполнено, то $\hat{\rho}_a(\xi) = 0$ для некоторого $\xi \in \mathbb{R}$, и выбрав $g(\theta) = \exp(i\xi\theta)$, получим $\rho_a * g(t) = 0$, в то время как g не стремится к нулю.

4.3. Орбитальная устойчивость солитонов

Каноническое преобразование и редуцированная система

Система (1) является гамильтоновой с гамильтонианом, заданным формулой (3). Определим *полный импульс* системы:

$$P(\varphi, \pi, q, p) = p - \int d^3x\, \pi(x)\, \nabla\varphi(x). \tag{60}$$

Полный импульс P сохраняется вдоль траекторий. Формально это легко проверить дифференцированием в силу системы (1), строгое доказательство см. в [10, Предложение 1.1]. Поэтому естественно выбрать полный импульс в качестве новой координаты и перейти к более простой гамильтоновой системе.

Определение 3. Пусть $T : \dot{\mathcal{E}} \to \dot{\mathcal{E}}$ определено следующим образом:

$$T : y = (\varphi, \pi, q, p) \mapsto Y = (\Phi(x), \Pi(x), Q, P) = (\varphi(q + x), \pi(q + x), q, P(\varphi, \pi, q, p)),$$

где $P(\varphi, \pi, q, p)$ — полный импульс (60).

Замечания. 1) Отображение T непрерывно на $\dot{\mathcal{E}}$ и дифференцируемо по Фреше в точках $y = (\varphi, \pi, q, p)$ с достаточно гладкими $\varphi(x), \pi(x)$, но не всюду дифференцируемо.

2) Фактически, мы перешли в систему координат, «движущуюся вместе с частицей». Поэтому в T-координатах солитоны (14), (15) стационарны, кроме компоненты Q,

$$Ty_v(t) = (\varphi_v(x), \pi_v(x), vt + q, P(v)),$$

где $P(v)$ — полный момент солитона:

$$P(v) = p_v - \int d^3x\, \pi_v \nabla\varphi_v(x)\,,\ \pi_v(x) = -v\cdot\nabla\varphi_v(x)\,,\ p_v = v/\sqrt{1-v^2}\,.$$

Положим $H(Y) = \mathcal{H}(T^{-1}Y)$ для $Y = (\Phi, \Pi, Q, P) \in \mathcal{E}$. Тогда

$$H(\Phi, \Pi, Q, P) = H_P(\Phi, \Pi) = \mathcal{H}(\Phi(x-Q), \Pi(x-Q), Q,\ P + \int d^3x\, \Pi(x)\nabla\Phi(x)) =$$

$$= \int d^3x \left(\frac{1}{2}|\Pi(x)|^2 + \frac{1}{2}|\nabla\Phi(x)|^2 + \Phi(x)\rho(x)\right) + \left(1 + \left(P + \int d^3x\, \Pi(x)\nabla\Phi(x)\right)^2\right)^{1/2}.$$

Функционалы $H(Y)$ и $\mathcal{H}(y)$ дифференцируемы по Фреше на фазовом пространстве $\dot{\mathcal{E}}$. Далее, как показывает следующее предложение, преобразование T является *каноническим*, т.е. сохраняет гамильтонову структуру системы.

Предложение 3. Пусть $y(t) \in C(\mathbb{R}, \dot{\mathcal{E}})$ — решение системы (1). Тогда $Y(t) = Ty(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ — решение гамильтоновой системы

$$\dot\Phi = \frac{\delta H}{\delta\Pi}\,,\ \dot\Pi = -\frac{\delta H}{\delta\Phi}\,,$$
$$\dot Q = \frac{\partial H}{\partial P}\,,\ \dot P = -\frac{\partial H}{\partial Q}\,, \qquad (61)$$

понимаемой в смысле распределений.

Доказательство. Уравнения для $\dot\Phi$, $\dot\Pi$ и $\dot Q$ проверяются прямым вычислением, а уравнение для $\dot P$ следует из закона сохранения полного импульса. Таким образом, сохранение гамильтоновой структуры проверяется явным вычислением.

С другой стороны, можно проверить сохранение симплектической структуры под действием преобразования T, не прибегая к пересчету уравнений. Для удобства читателя рассуждение приведено в Приложении 2. □

Координата Q является циклической. Поэтому система (61) равносильна редуцированной гамильтоновой системе только для переменных Φ и Π, с постоянным импульсом в качестве параметра. Систему можно записать в виде

$$\dot\Phi = \frac{\delta H_P}{\delta\Pi}\,, \quad \dot\Pi = -\frac{\delta H_P}{\delta\Phi}\,.$$

Для любого $P \in \mathbb{R}^3$ функционал H_P дифференцируем по Фреше на гильбертовом пространстве $\dot{\mathcal{F}} = \dot H^1 \oplus L^2$; энергия H_P сохраняется вдоль решений редуцированной системы.

Предложение 4. Для любого $v \in V$ функционал $H_{P(v)}$ оценивается снизу:

$$H_{P(v)}(\Phi, \Pi) - H_{P(v)}(\varphi_v, \pi_v) \geq \frac{1-|v|}{2}\left(\|\Phi - \varphi_v\|^2 + |\Pi - \pi_v|^2\right) \qquad (62)$$

на пространстве $\mathcal{F}$.

Доказательство. Обозначим $\Phi - \varphi_v = \varphi$ и $\Pi - \pi_v = \pi$; имеем:

$$H_{P(v)}(\varphi_v + \varphi, \pi_v + \pi) - H_{P(v)}(\varphi_v, \pi_v) = \int d^3x(\pi_v(x)\pi(x) + \nabla\varphi_v(x)\cdot\nabla\varphi(x) + \rho(x)\varphi(x)) +$$
$$+\frac{1}{2}\int d^3x\,(|\pi(x)|^2 + |\nabla\varphi(x)|^2) + (1 + (p_v + m)^2)^{1/2} - (1 + p_v^2)^{1/2}\,, \qquad (63)$$

где $p_v = P(v) + \int d^3x\, \pi_v(x)\nabla\varphi_v(x)$ и

$$m = \int d^3x\,(\pi(x)\nabla\varphi_v(x) + \pi_v(x)\nabla\varphi(x) + \pi(x)\nabla\varphi(x))\,.$$

Солитонное решение (15) удовлетворяет уравнению

$$-v\cdot\nabla\varphi_v(x)=\pi_v(x)\,,\quad -v\cdot\nabla\pi_v(x)=\Delta\varphi_v(x)-\rho(x).$$

Положим $v=(1+p_v^2)^{-1/2}p_v$, подставим в первый интеграл из (63), получим

$$\begin{aligned}&H_{P(v)}(\varphi_v+\varphi,\pi_v+\pi)-H_{P(v)}(\varphi_v,\pi_v)=\\&=\frac{1}{2}\int d^3x\,(|\pi(x)|^2+|\nabla\varphi(x)|^2)+(1+p_v^2)^{-1/2}\int d^3x\,\pi(x)\,p_v\cdot\nabla\varphi(x)-\\&-(1+p_v^2)^{-1/2}p_v\cdot m+(1+(p_v+m)^2)^{1/2}-(1+p_v^2)^{1/2}\,.\end{aligned}$$

Поскольку выражение в третьей строке неотрицательно, получаем оценку снизу (62) с учетом того, что $|(1+p_v^2)^{-1/2}p_v|=|v|\,.$ □

Вывод орбитальной устойчивости солитонов

Мы выведем орбитальную устойчивость из сохранения H_P и из оценки (62), следуя методологии [22].

Предложение 5. Зафиксируем некоторое $v\in V$. Пусть $y(t)=(\varphi(t),\pi(t),q(t),p(t))\in C(\mathbb{R},\mathcal{E})$ — решение системы (1) с начальным состоянием $y(0)=y^0=(\varphi^0,\pi^0,q^0,p^0)\in\mathcal{E}$; обозначим

$$\delta=\|\varphi^0(x)-\varphi_v(x-q^0)\|+|\pi^0(x)-\pi_v(x-q^0)|+|p^0-p_v|\,. \tag{64}$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что

$$\|\varphi(q(t)+x,t)-\varphi_v(x)\|+|\pi(q(t)+x,t)-\pi_v(x)|+|p(t)-p_v|\le\varepsilon\quad t\in\mathbb{R}, \tag{65}$$

если $\delta\le\delta(\varepsilon)$.

Доказательство. Обозначим через P^0 полный импульс рассматриваемого решения $y(t)$. Существует солитонное решение (15) с некоторым $\tilde v\in V$ с тем же самым импульсом $P(\tilde v)=P^0$. Тогда из (64) следует $|P^0-P(v)|=|P(\tilde v)-P(v)|=\mathcal{O}(\delta)$, поэтому также $|\tilde v-v|=\mathcal{O}(\delta)$ и

$$\|\varphi^0(x)-\varphi_{\tilde v}(x-q^0)\|+|\pi^0(x)-\pi_{\tilde v}(x-q^0)|+|p^0-p_{\tilde v}|=\mathcal{O}(\delta)\,.$$

Тогда, обозначая $(\Phi^0,\Pi^0,Q^0,P^0)=Ty^0$, имеем

$$H_{P(\tilde v)}(\Phi^0\,,\Pi^0)-H_{P(\tilde v)}(\varphi_{\tilde v}\,,p_{\tilde v})=\mathcal{O}(\delta^2)\,. \tag{66}$$

Из законов сохранения полного импульса и энергии получаем для $(\Phi(t),\Pi(t),Q(t),P(t))=Ty(t)$:

$$H_{P(\tilde v)}(\Phi(t),\Pi(t))=H(Ty(t))=H_{P(\tilde v)}(\Phi^0\,,\Pi^0)\quad t\in\mathbb{R}\,.$$

Тогда из (66) и (62) с $\tilde v$ вместо v следует:

$$\|\Phi(t)-\varphi_{\tilde v}\|+|\Pi(t)-\pi_{\tilde v}|=\mathcal{O}(\delta) \tag{67}$$

равномерно по $t\in\mathbb{R}$. С другой стороны, сохранение полного импульса дает

$$p(t)=P(\tilde v)+\langle\Pi(t),\nabla\Phi(t)\rangle,\quad t\in\mathbb{R}\,.$$

Поэтому из (100) получаем

$$|p(t)-p_{\tilde v}|=\mathcal{O}(\delta) \tag{68}$$

равномерно по $t\in\mathbb{R}$. Наконец, (100), (68) вместе приводят к (99), поскольку $|\tilde v-v|=\mathcal{O}(\delta)\,.$
□

4.4. Солитонная асимптотика

Теперь скомбинируем орбитальную устойчивость и убывание ускорения для доказательства утверждения 2) теоремы 2.

Предложение 6. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют $t_* = t_*(\delta)$ и решение $Y_*(t) = (\varphi_*(x,t), \pi_*(x,t), q_*(t), p_*(t)) \in C([t_*, \infty), \mathcal{E})$ системы (1), такие что

1) $Y_*(t)$ совпадает с $y(t)$ в «конусе будущего»:

$$q_*(t) = \quad q(t) \qquad \text{при } \ t \geq t_*\,, \tag{69}$$

$$\varphi_*(x,t) = \quad \varphi(x,t) \qquad \text{при } \ |x - q(t_*)| < t - t_*\,. \tag{70}$$

2) $Y_*(t_*)$ близко к $Y_{q,v}(0)$ с $q = q(t_*)$ и некоторым $v = v(\delta) \in V$,

$$\|Y_*(t_*) - Y_{q,v}(0)\|_{\dot{\mathcal{E}}} \leq \delta\,. \tag{71}$$

Из этого предложения нетрудно получить

Доказательство теоремы 2. 2) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из (71), ввиду предложения 5, следует

$$\|\varphi_*(q_*(t)+x,t) - \varphi_v(x)\| + |\pi_*(q_*(t)+x,t) - \pi_v(x)| + |\dot{q}_*(t) - v| \leq \varepsilon \text{ при } t > t_*\,.$$

Поэтому из (69) и (70) получаем, что для любого $R > 0$ и для $t > t_* + \dfrac{R}{1-q_1}$ с q_1 из (12),

$$\begin{aligned} &\|\varphi(q(t)+x,\,t) - \varphi_v(x)\|_R + |\pi(q(t)+x,\,t) - \pi_v(x)|_R + |\dot{q}(t) - v| = \\ = \ &\|\varphi_*(q_*(t)+x,t) - \varphi_v(x)\|_R + |\pi_*(q_*(t)+x,t) - \pi_v(x)|_R + |\dot{q}_*(t) - v| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, получаем (36). □

Доказательство предложения 6. Напомним, что

$$\varphi(x,t) = \varphi_r(x,t) + \varphi_0(x,t) \qquad \text{при } \ x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \tag{72}$$

где $\varphi_r(x,t)$ — запаздывающий потенциал (38), а $\varphi_0(x,t)$ — интеграл Кирхгофа (39).

Замечания. 1)

$$\varphi_r(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{B_t(x)} \frac{d^3y}{|x-y|}\rho(y - q(t - |x-y|)), \tag{73}$$

где $B_t(x)$ обозначает шар $\{y: \ |y-x| \leqslant t\}$.

2) Для $|x - q^0| < t - R_\rho$ имеем

$$\varphi_r(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{d^3y}{|x-y|}\rho(y - q(t - |x-y|)).$$

Ввиду (35) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое t_ε, что

$$|\ddot{q}(t)| \leqslant \varepsilon \ \text{ при } t \geq t_\varepsilon \quad t_\varepsilon \to \infty \text{ при } \varepsilon \to 0\,. \tag{74}$$

Определим

$$t_{1,\varepsilon} = t_\varepsilon + 1, \quad t_{2,\varepsilon} = t_{1,\varepsilon} + \frac{R_\rho}{1-\overline{v}}\,, \quad t_{3,\varepsilon} = t_{2,\varepsilon} + \frac{R_\rho}{1-\overline{v}}\,, \tag{75}$$

$$q_\varepsilon = q(t_{3,\varepsilon})\,, \ \ v_\varepsilon = \dot{q}(t_{3,\varepsilon}).$$

Тогда из (74) следует, что существует такое $q_\varepsilon(t) \in C^2(\mathbb{R})$, что

$$q_\varepsilon(t) = \begin{cases} q(t) & \text{при} \quad t \in (t_{1,\varepsilon}, +\infty)\,, \\ q_\varepsilon + v_\varepsilon(t - t_{3,\varepsilon}) & \text{при} \quad t \in (-\infty, t_\varepsilon)\,, \end{cases} \tag{76}$$

и

$$|\ddot{q}_\varepsilon(t)| \le C\varepsilon \text{ для всех } t \in \mathbb{R} \tag{77}$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от $\varepsilon \in (0,1)$.

Модифицируем начальные данные $\varphi^0(x) \in \dot{H}^1$, $\pi^0(x) \in L^2$, вырезав большой шар с центром в точке $q(t_{1,\varepsilon})$.

Лемма 4. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\varphi^0_\varepsilon(x) \in \dot{H}^1$, $\pi^0_\varepsilon(x) \in L^2$, такое что*

$$\varphi^0_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varphi^0(x), \\ 0\,, \end{cases} \quad \pi^0_\varepsilon(x) = \begin{cases} \pi^0(x) & \text{при} \quad |x - q(t_{1,\varepsilon})| > t_{1,\varepsilon}\,, \\ 0 & \text{при} \quad |x - q(t_{1,\varepsilon})| < t_\varepsilon, \end{cases} \tag{78}$$

более того,

$$\|\varphi^0_\varepsilon\| + |\pi^0_\varepsilon| \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{79}$$

Доказательство. Поскольку $\varphi^0 \in \dot{H}^1$, $\pi^0 \in L^2$, имеем

$$\int_{|x-q(t_{1,\varepsilon})|>t_\varepsilon} d^3x\, (|\nabla\varphi^0(x)|^2 + |\pi^0(x)|^2) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

так как $t_{1,\varepsilon} \to \infty$ и $|q(t_{1,\varepsilon})| = \mathcal{O}(\overline{v} \cdot t_{1,\varepsilon})$, где $0 < \overline{v} < 1$. □

Далее, определим соответствующую модификацию $\varphi_\varepsilon(x,t)$ для решения (72),

$$\varphi_\varepsilon(x,t) = \varphi_{r,\varepsilon}(x,t) + \varphi_{0,\varepsilon}(x,t) \text{ при } x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \tag{80}$$

где

$$\varphi_{r,\varepsilon}(x,t) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3y}{|x-y|} \rho(y - q_\varepsilon(t - |x-y|))\,, \tag{81}$$

$$\varphi_{0,\varepsilon}(x,t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} d^2y\, \pi^0_\varepsilon(y) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi t} \int_{S_t(x)} d^2y\, \varphi^0_\varepsilon(y) \right). \tag{82}$$

Тогда $\varphi_\varepsilon(x,t)$ — решение волнового уравнения

$$\ddot{\varphi}_\varepsilon(x,t) = \Delta\varphi_\varepsilon(x,t) - \rho(x - q_\varepsilon(t)) \text{ при } x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0\,. \tag{83}$$

Замечание. Обратим внимание, что $\varphi_\varepsilon(x,0) \ne \varphi^0_\varepsilon(x)$, $\dot{\varphi}_\varepsilon(x,0) \ne \pi^0_\varepsilon(x)$.

Из (82), (38) и (78) получаем

$$\varphi_{0,\varepsilon}(x,t) = \varphi_0(x,t) \text{ при } |x - q(t_{1,\varepsilon})| < t - t_{1,\varepsilon}\,. \tag{84}$$

Далее, $\varphi_{0,\varepsilon}(x,t)$ — решение свободного волнового уравнения. Поэтому из (79) и сохранения энергии для $\varphi_{0,\varepsilon}(x,t)$ следует

$$\sup_{t>0} \Big(\|\varphi_{0,\varepsilon}(\cdot,t)\| + |\dot{\varphi}_{0,\varepsilon}(\cdot,t)| \Big) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0\,. \tag{85}$$

Наконец, из (81), (73), (75) и (76) имеем

$$\varphi_{r,\varepsilon}(x,t) = \varphi_r(x,t) \text{ при } |x - q(t_{2,\varepsilon})| < t - t_{2,\varepsilon}\,. \tag{86}$$

Лемма 5.

$$\varphi_{r,\varepsilon}(x,t) = \varphi_{v_\varepsilon}(x - v_\varepsilon(t - t_{3,\varepsilon}) - q_\varepsilon) \text{ при } |x - q_\varepsilon(t_\varepsilon)| > t - t_\varepsilon + R_\rho\,. \tag{87}$$

Доказательство. Имеем

$$\varphi_{v_\varepsilon}(x - v_\varepsilon(t - t_{3,\varepsilon}) - q_\varepsilon) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{d^3y}{|x-y|}\rho(y - (q_\varepsilon + v_\varepsilon(t - t_{3,\varepsilon}) - v_\varepsilon|x-y|)) \qquad (88)$$

и

$$\varphi_{r,\varepsilon}(x,t) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{d^3y}{|x-y|}\rho(y - q_\varepsilon(t - |x-y|)).$$

Рассмотрим траекторию $\tilde q(t)$ с $|\dot{\tilde q}(t)| \leqslant \overline{v} < 1$ и интеграл

$$\int \frac{d^3y}{|x-y|}\rho(y - \tilde q(t - |x-y|)).$$

Чтобы вычислить значение этого интеграла в точке (x,t), надо

1) рассмотреть конус $K(x,t) := \{(x',\tau) : \tau \leqslant t, |x'-x| = t-\tau\}$;

2) рассмотреть пересечение $U(x,t,\tilde q)$ конуса $K(x,t)$ и трубки $\{(x,t) : |x - \tilde q(t)| \leqslant R_\rho\}$;

3) выделить область $\{x \in \mathbb{R}^3 : (x,t) \in U(x,t,\tilde q)\}$ и проинтегрировать по y по этой области.

Ясно, что эта процедура даст те же самые значения для $\varphi_{v_\varepsilon}(x - v_\varepsilon(t - t_{3,\varepsilon}) - q_\varepsilon)$ и $\varphi_{r,\varepsilon}(x,t)$ в случае $|x - q_\varepsilon(t_\varepsilon)| > t - t_\varepsilon + R_\rho$. □

Лемма 6. *Обозначим* $\varphi_\varepsilon(x,t) := \varphi_{v_\varepsilon}(x - v_\varepsilon(t - t_{3,\varepsilon}) - q_\varepsilon)$, $B_\varepsilon := \{x : |x - q_\varepsilon(t_\varepsilon)| \leqslant 2R_\rho/(1-\overline{v}) + 1 + R_\rho\}$. *Тогда*

$$|\dot\varphi_{r,\varepsilon}(\cdot, t_{3,\varepsilon}) - \dot\varphi_\varepsilon(\cdot, t_{3,\varepsilon})|_{B_\varepsilon} + +\|\nabla\varphi_{r,\varepsilon}(\cdot, t_{3,\varepsilon}) - \nabla\varphi_\varepsilon(\cdot, t_{3,\varepsilon})\|_{B_\varepsilon} +$$

$$+|\varphi_{r,\varepsilon}(\cdot, t_{3,\varepsilon}) - \varphi_\varepsilon(\cdot, t_{3,\varepsilon})|_{B_\varepsilon} = \mathcal{O}(\varepsilon)\,. \qquad (89)$$

Доказательство. Следует из (81), (88), (76) и (77). □

Лемма 7. *Положим*

$$Y_*(t) = (\varphi_\varepsilon(\cdot,t), \dot\varphi_\varepsilon(\cdot,t), q(t), p(t)) \ \text{ при } \ t > t_* = t_{2,\varepsilon}\,. \qquad (90)$$

Тогда момент t_* *и функция* $Y_*(t)$ *при* $t \geq t_*$ *удовлетворяют всем условиям Предложения* 6 *с* $v(\delta) = v_\varepsilon$, *если выбрать* $\varepsilon > 0$ *достаточно малым.*

Доказательство. а) $Y_*(t) \in C([t_*,\infty), \mathcal{E})$ — решение системы (1) при $t > t_*$. Действительно, из (86), (84) и (80), (72) следует

$$\varphi_\varepsilon(x,t) = \varphi(x,t) \ \text{ при } \ |x - q(t_{2,\varepsilon})| < t - t_{2,\varepsilon}\,. \qquad (91)$$

Кроме того,

$$\rho(x - q(t)) = 0 \text{ и } q_\varepsilon(t) = q(t) \text{ в области } |x - q(t_{2,\varepsilon})| > t - t_{2,\varepsilon},\ t > t_{3,\varepsilon}. \qquad (92)$$

Поэтому из (76) вытекает, что $Y_*(t)$ вместе с $y(t)$ — решение системы (1) в области $|x - q(t_{2,\varepsilon})| < t - t_{2,\varepsilon}$, а из (83) получаем, что $Y_*(t)$ — также решение системы (1) в области (92). □

Завершим доказательство предложения 6: (70) и (69) следуют из (91) и (76); (71) следует из (90) и (80) ввиду (87), (89) и (85). □

5. Солитонные асимптотики при винеровском условии на плотность заряда. Случай уравнения Максвелла

5.1. Убывание ускорения

Идейно доказательство убывания ускорения очень близко к случаю волнового уравнения, однако усложняется алгебраическая структура задачи. Мы ограничимся кратким изложением основных моментов доказательства.

Определим пространство начальных данных, достаточно быстро убывающих на бесконечности: $\mathcal{M}^\sigma$ при $0 \le \sigma \le 1$ — пространство состояний $Y = (E, B, q, p) \in \mathcal{M}$, для которых ∇E,∇B принадлежат L^∞_{loc} вне шара B_{R^0} с некоторым $R^0 = R^0(Y) > 0$, причем

$$|E(x)| + |B(x)| + |x|\Big(|\nabla E(x)| + |\nabla B(x)|\Big) \leqslant C^0|x|^{-1-\sigma} \quad |x| > R^0.$$

Как и прежде, S^2 — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $d^2\omega$ — ее элемент площади поверхности. Для $\omega \in S^2$ и $z \in \mathbb{R}^3$ положим $z = \omega z_\| + z_\perp$, где $z_\| = \omega \cdot z$, $z_\perp \perp \omega$, $\overline{\tau} = t + y_\|$ и

$$\overline{E}_{(r)}(\omega, t) = -\frac{1}{4\pi}\int d^3y\, \rho(y - q(\overline{\tau}))\frac{(1 - \dot{q}_\|(\overline{\tau}))\ddot{q}_\perp(\overline{\tau}) + \ddot{q}_\|(\overline{\tau})\dot{q}_\perp(\overline{\tau})}{(1 - \dot{q}_\|(\overline{\tau}))^2}\,. \tag{93}$$

Замечание. $\overline{E}_{(r)}(\omega, t) \perp \omega$ для любого $\omega \in S^2$ и $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 7. Пусть выполнено условие (2) и пусть $Y(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ — решение (5) – (6) с начальными данными $Y^0 = Y(0) \in \mathcal{M}^\sigma$, $\sigma > 1/2$. Тогда

$$\int_0^\infty dt\int_{S^2} d^2\omega|\overline{E}_{(r)}(\omega, t)|^2 < \infty. \tag{94}$$

Доказательство этого предложения опирается на интегральное представление решения и две леммы. В [8] получено следующее представление решения:

$$E(x, t) = E_{(r)}(x, t) + E_{(0)}(x, t),\;\; B(x, t) = B_{(r)}(x, t) + B_{(0)}(x, t), \tag{95}$$

где

$$\begin{pmatrix} E_{(r)}(x, t) \\ B_{(r)}(x, t) \end{pmatrix} = \int_0^t g_{t-s}(x) * \begin{pmatrix} \rho(x - q(s)) \\ \rho(x - q(s))\dot{q}(s) \end{pmatrix} ds, \tag{96}$$

$$\begin{pmatrix} E_{(0)}(x, t) \\ B_{(0)}(x, t) \end{pmatrix} = m_t(x) * \begin{pmatrix} E^0 \\ B^0 \end{pmatrix}; \tag{97}$$

m_t и g_t — распределения с матричными значениями размеров соответственно 6×6 и 6×4:

$$m_t = \begin{pmatrix} \dot{K}_t & \nabla \wedge K_t \\ -\nabla \wedge K_t & \dot{K}_t \end{pmatrix},\;\; g_t = \begin{pmatrix} -\nabla K_t & -\dot{K}_t \\ 0 & \nabla \wedge K_t \end{pmatrix},$$

а K_t — ядро Кирхгофа:

$$K_t(x) = \frac{1}{4\pi t}\delta(|x| - |t|).$$

Существенно, что распределения m_t и g_t сосредоточены на сфере $\{|x| = |t|\}$, — это строгий принцип Гюйгенса для системы Максвелла–Лоренца:

$$m_t(x) = 0,\;\; g_t(x) = 0 \quad |x| \neq |t|. \tag{98}$$

Лемма 8. *Найдется такое $T_r > 0$, что следующая асимптотика выполняется равномерно по $t \in [T_r, T]$ для любого фиксированного $T > T_r$:*

$$\begin{aligned} E_{(r)}(x, |x| + t) &= \overline{E}_{(r)}(\omega(x), t)|x|^{-1} + \mathcal{O}(|x|^{-2}), \\ B_{(r)}(x, |x| + t) &= \omega(x) \wedge \overline{E}_{(r)}(\omega(x), t)|x|^{-1} + \mathcal{O}(|x|^{-2}) \end{aligned}$$

при $|x| \to \infty$.

Лемма 9. *Пусть* $(E^0, B^0, q^0, p^0) \in \mathcal{M}^\sigma$, *где* $\sigma > 1/2$. *Тогда найдутся такие* $I_0 < \infty$ *и* $T_0 > 0$, *что для любых* $R > 0$ *и* $T > T_0$

$$\int_{R+T_0}^{R+T} dt \int_{\partial B_R} d^2x \left(|B_{(0)}(x,t)|^2 + |E_{(0)}(x,t)|^2\right) \le I_0.$$

Методика доказательств предложения 5.1 и лемм 8, 9 аналогична случаю волнового уравнения. Подробные доказательства см. в [8].

Теперь покажем, что $\ddot{q}(t) \to 0$ при $t \to \infty$, если выполнено винеровское условие (34).

Ввиду предложения 2.1, 3) и 4), выполняются оценки (12) и (13). Поэтому функция $\overline{E}_{(r)}(\omega, t)$ глобально липшицева по ω и t. Тогда из (94) следует

$$\lim_{t\to\infty} \overline{E}_{(r)}(\omega, t) = 0 \qquad (99)$$

равномерно по $\omega \in S^2$. Проанализируем структуру подынтегрального выражения в (93). Можно выполнить интегрирование по плоскостям $y_\|$ =const, поскольку $\overline{\tau} = t + y_\| = t + \omega \cdot y$ зависит только от $y_\|$. Тогда (93) можно записать в виде одномерной свертки. Пусть $r(t) = q_\|(t) \in \mathbb{R}$, $s = y_\|$ и $\rho_a(q_3) = \int dq_1 dq_2\, \rho(q_1, q_2, q_3)$. Тогда $\overline{\tau} = t + s$ и (93) принимает вид

$$\begin{aligned}
\overline{E}_{(r)}(\omega, t) &= -\frac{1}{4\pi}\int ds\, \rho_a(s - r(t+s))\, \frac{(1-\dot{q}_\|(t+s))\ddot{q}_\perp(t+s) + \ddot{q}_\|(t+s)\dot{q}_\perp(t+s)}{(1-\dot{q}_\|(t+s))^2} = \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int d\tau\, \rho_a(t - (\tau - r(\tau)))\, \frac{(1-\dot{q}_\|(\tau))\ddot{q}_\perp(\tau) + \ddot{q}_\|(\tau)\dot{q}_\perp(\tau)}{(1-\dot{q}_\|(\tau))^2} = \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int d\theta\, \rho_a(t-\theta) g_\omega(\theta) = \rho_a * g_\omega(t).
\end{aligned}$$

Здесь мы подставили $\theta = \tau - r(\tau)$, это невырожденный диффеоморфизм, поскольку $|\dot{r}| \le q_1 < 1$ ввиду (12), и положили

$$g_\omega(\theta) = -\frac{1}{4\pi}\frac{(1-\dot{q}_\|(\tau(\theta)))\ddot{q}_\perp(\tau(\theta)) + \ddot{q}_\|(\tau(\theta))\dot{q}_\perp(\tau(\theta))}{(1-\dot{q}_\|(\tau(\theta)))^2}.$$

Продолжим $q(t)$, сохраняя гладкость в нуле, на интервал $t < 0$. Тогда $\rho_a * g_\omega(t)$ определено при всех t и совпадает с $\overline{E}_{(r)}(\omega, t)$ при достаточно больших t. Поэтому (99) является пределом свертки

$$\lim_{t\to\infty} \rho_a * g_\omega(t) = 0. \qquad (100)$$

Заметим, что из (13) с $k = 2, 3$ следует, что $g'_\omega(\theta)$ ограничено. Поэтому из (100) и (34), ввиду обобщения Питта тауберовой теоремы Винера, см. [21, Теорема 9.7(b)] вытекает:

$$g_\omega(\theta) \to 0 \quad \theta \to \infty.$$

Поскольку $\theta(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, имеем

$$(1 - \dot{q}_\|(t))\ddot{q}_\perp(t) + \ddot{q}_\|(t)\dot{q}_\perp(t) \to 0 \quad t \to \infty.$$

Заменив ω на $-\omega$, получаем $(1 + \dot{q}_\|(t))\ddot{q}_\perp(t) - \ddot{q}_\|(t)\dot{q}_\perp(t) \to 0$, и для суммы $2\ddot{q}_\perp(t) \to 0$. Поскольку $\omega \in S^2$ произвольно, мы доказали следующую лемму.

Лемма 10. *Пусть выполнены все предположения Предложения* 5.1, *а также условие* (34). *Тогда для траектории* $q(t)$ *решения системы* (5) – (6) *имеем:*

$$\lim_{t\to\infty} \ddot{q}(t) = 0. \qquad (101)$$

5.2. Предварительная асимптотика

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (34). *Тогда для любого* $R > 0$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \left(|E(q(t)+\cdot,t) - E_{v(t)}(\cdot)|_R + |B(q(t)+\cdot,t) - B_{v(t)}(\cdot)|_R \right) = 0, \tag{102}$$

Доказательство. Применив интегральные представления (95) – (97) к солитонам (16), получаем для (E_v, B_v) с $v \in V$:

$$E_v(x) = \int \frac{d^3y}{4\pi|x-y|} \{ \frac{n}{|x-y|} \rho(y - v\overline{\tau}) + v\cdot\nabla\rho(y-v\overline{\tau})\,[-n+v] \},$$

$$B_v(x) = \int \frac{d^3y}{4\pi|x-y|} n \wedge \{ -\frac{1}{|x-y|} \rho(y-v\overline{\tau})v + v\cdot\nabla\rho(y-v\overline{\tau})\,v \},$$

где $n = \dfrac{x-y}{|x-y|}$ и $\overline{\tau} = -|x-y|$. Из этих представлений вместе с представлениями (95) – (97) для (E, B), ввиду (101), следует

$$|E_{(r)}(q(t)+\cdot,t) - E_{v(t)}(\cdot)|_R + |B_{(r)}(q(t)+\cdot,t)) - B_{v(t)}(\cdot))|_R \to 0 \;\; t\to\infty.$$

Поэтому (102) будет следовать из

$$|E_{(0)}(q(t)+\cdot,t)|_R + |B_{(0)}(q(t)+\cdot,t))|_R \to 0 \;\; t\to\infty.$$

Это значит, по определению, что для любого $R > 0$

$$\int_{|x|<R} d^3x \left(|E_{(0)}(q(t)+x,t)|^2 + |B_{(0)}(q(t)+x,t))|^2 \right) \to 0 \;\; t\to\infty. \tag{103}$$

Оценивая интегралы Кирхгофа из представления (97), получим

$$|E_{(0)}(q(t)+x,t)| + |B_{(0)}(q(t)+x,t))| \le C \sum_{k=0,1} \frac{t^{k-1}}{|x|} \left((t+|x|)^{1-k-\sigma} - (t-|x|)^{1-k-\sigma} \right).$$

Подставив сюда $q(t)+x$ вместо x и учитывая, что $|q(t)| \le q_1 t + \mathrm{const}$, где $0 < q_1 < 1$, получаем

$$\max_{|x|\le R} \left(|E_{(0)}(q(t)+x,t)| + |B_{(0)}(q(t)+x,t)| \right) = \mathcal{O}(t^{-1-\sigma}) \text{ при } t\to\infty,$$

Отсюда следует (103). □

5.3. Гамильтонова структура и орбитальная устойчивость солитонов

Система Максвелла–Лоренца непосредственно в виде (5)–(6) не имеет гамильтоновой формы, в отличие от случая волнового уравнения. Заметим, что *энергия*

$$H(E,B,q,p) = \sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\int \left(|E(x)|^2 + |B(x)|^2 \right) dx \tag{104}$$

и *полный импульс*

$$\mathbf{P}(E,B,q,p) = p + \int E(x)\wedge B(x)dx \tag{105}$$

сохраняются вдоль достаточно гладких решений системы.

Существует замена переменных, при которой система Максвелла–Лоренца преобразуется к гамильтоновой форме. При этом импульс становится одной из гамильтоновых переменных, а энергия в новых переменных становится гамильтонианом.

Опишем подробно это преобразование. Положим

$$E_s(x,t) = E(x,t) + \nabla\varphi_\rho(x - q(t)), \quad \nabla\varphi_\rho \in L^2(\mathbb{R}^3), \;\; \Delta\varphi_\rho(x) = -\rho(x). \tag{106}$$

Функция φ_ρ определена указанными условиями однозначно. Введем магнитный потенциал $A(x,t)$, удовлетворяющий кулоновской калибровке:

$$B(x,t) = \nabla \wedge A(x,t), \;\; \nabla \cdot A(x,t) = 0 \tag{107}$$

и импульс заряда в магнитном поле:

$$P(t) := p(t) + \int \rho(x - q(t))A(x,t)dx. \tag{108}$$

Предположим, что поля E и B достаточно гладкие, достаточно быстро убывают на бесконечности и для (E, B, q, p) выполняются уравнения (5) – (6). Тогда (E_s, A, q, P) удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\nabla \cdot E_s(x,t) = 0, \;\; \nabla \cdot A(x,t) = 0, \tag{109}$$

$$\dot{E}_s(x,t) = -\Delta A(x,t) - \Pi_s[\rho(x - q(t))v(t)], \;\; \dot{A}(x,t) = -E_s(x,t), \tag{110}$$

$$v(t) := \dot{q}(t) = \frac{P(t) - \langle\rho(x - q(t)), A(x,t)\rangle}{[1 + (P(t) - \langle\rho(x - q(t)), A(x,t)\rangle)^2]^{1/2}},$$

$$\dot{P}(t) = \sum_{k=1}^{3} v_k(t)\langle\nabla A_k(x,t), \rho(x - q(t))\rangle, \tag{111}$$

где Π_s — проектор на пространство соленоидальных (бездивергентных) полей. В представлении Фурье проектор имеет вид

$$\hat{\Pi}(k)\, a = a - \frac{a \cdot k}{k^2}k.$$

Рассмотрим функционал

$$\mathcal{H}_s(E_s, A, q, P) = \frac{1}{2}\int \Big(|E_s|^2 + |\nabla A|^2\Big)dx + \left[1 + (P - \langle\rho(x - q), A(x)\rangle)^2\right]^{1/2}. \tag{112}$$

Система (110)–(111) является гамильтоновой с гамильтонианом (112). А именно, уравнения (110) – (111) имеют вид

$$\dot{E}_s = \frac{\delta\mathcal{H}_s}{\delta A}, \;\; \dot{A} = -\frac{\delta\mathcal{H}_s}{\delta E_s}, \;\; \dot{q} = \frac{\partial\mathcal{H}_s}{\partial P}, \;\; \dot{P} = -\frac{\partial\mathcal{H}_s}{\partial q}.$$

Таким образом, переменные (E_s, A, q, P) являются гамильтоновыми. Полный импульс (105) в гамильтоновых переменных имеет вид

$$\mathcal{P}(E_s, A, q, P) = P + \int E_s(x) \wedge (\nabla \wedge A(x))dx = P + \int E_s(x) \cdot \nabla A(x)dx,$$

где мы обозначили $E \cdot \nabla A := \sum_{k=1}^{3} E_k \cdot \nabla A_k$. Легко проверить, что

$$\mathcal{P}(E_s, A, q, P) = \mathbf{P}(E, B, q, p),$$

$$\mathcal{H}_s(E_s, A, q, P) = H(E, B, q, p) - \frac{1}{2}\int |\nabla\varphi_\rho(x)|^2 dx, \tag{113}$$

если переменные (E_s, A, q, P) и (E, B, q, p) связаны соотношениями (106), (107), (108). Введем фазовое пространство для системы (109) – (111). Положим $H^0 = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $\dot{H}^1$ — замыкание пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ по норме $\|A\|_1 = |\nabla A| = \|\nabla A\|_{L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)}$. Обозначим

H^0_s, $\dot H^1_s$ подпространства, образованные соленоидальными векторными полями, а именно, замыкания в H^0, $\dot H^1$ соответственно векторных полей из C_0^∞ с нулевой дивергенцией. Определим фазовое пространство

$$\mathcal{E} = H^0_s \oplus \dot H^1_s \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^3,\ \ \|Y\|_{\mathcal{E}} = |E| + \|A\|_1 + |q| + |P|, \quad Y = (E, A, q, P).$$

Введем соответствующее пространство полей:

$$\mathcal{F} = H^0_s \oplus \dot H^1_s,\ \ \|(E, A)\|_{\mathcal{F}} = |E| + \|A\|_1.$$

Из существования динамики для системы (5) – (6) вытекает следующее утверждение.

Предложение 8. Пусть выполнено условие (C), пусть $Y^0_s = (E^0_s, A^0, q^0, P^0) \in \mathcal{E}$. Тогда

1) Существует единственное решение $Y_s(t) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{E})$ системы (109) – (111) с начальным условием $Y_s(0) = Y^0_s$.

2) Энергия и полный момент сохраняются:

$$\mathcal{H}_s(Y_s(t)) = \mathcal{H}_s(Y^0_s),\ \ \mathcal{P}(Y_s(t)) = \mathcal{P}(Y^0_s),\ \ t \in \mathbb{R}.$$

3) Рассмотрим $Y(t) = (E(t), B(t), q(t), p(t))$, где

$$E(t) = E_s(t) - \nabla\varphi_\rho(\cdot - q(t)),\ \ B(t) = \nabla \wedge A(t),\ \ p(t) = P(t) - \langle \rho(\cdot - q(t)), A(t)\rangle$$

и $(E_s(t), A(t), q(t), P(t)) = Y_s(t)$ — решение системы (109)–(111) с начальным условием $Y_s(0) = Y^0_s$. Тогда $Y(t)$ является единственным в $C(\mathbb{R}, \mathcal{M})$ решением системы (5)–(6) с начальными данными

$$E_0 = E^0_s - \nabla\varphi_\rho(\cdot - q^0),\ \ B_0 = \nabla \wedge A^0,\ \ q_0 = q^0,\ \ p_0 = P^0 - \langle \rho(\cdot - q^0), A^0\rangle.$$

Ввиду закона сохранения энергии возникает идея использовать энергию (гамильтониан) в качестве функции Ляпунова для доказательства орбитальной устойчивости. Однако гамильтониан (112) является инвариантным относительно сдвигов в $\mathbb{R}^3$, а значит, не может служить функцией Ляпунова непосредственно. Поэтому сначала мы редуцируем систему (109) – (111) при помощи канонического преобразования

$$\mathcal{T}(E_s(x), A(x), q, P) = (\mathcal{E}(x), \mathcal{A}(x), \mathcal{Q}, \mathcal{P}),$$

где

$$\mathcal{E}(x) = E_s(x + q),\ \ \mathcal{A}(x) = A(x + q),\ \ \mathcal{Q} = q,\ \ \mathcal{P} = P + \int E_s(x) \cdot \nabla A(x) dx.$$

Для случая системы Максвелла–Лоренца с нерелятивистской частицей преобразование предложено ранее в [22]; случай волнового уравнения с релятивистской частицей изложен выше. Это преобразование обратимо. Положим $\mathcal{H}(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{Q}, \mathcal{P}) = H_s(\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{Q}, \mathcal{P}))$, т.е.

$$\mathcal{H}(\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{Q}, \mathcal{P}) = \frac{1}{2}\int (|\mathcal{E}|^2 + |\nabla\mathcal{A}|^2) dx + [1 + (\mathcal{P} - \int \mathcal{E} \cdot \nabla\mathcal{A} dx - \langle \rho, \mathcal{A}\rangle)^2]^{1/2}.$$

Лемма 11. [15]. *Пусть* $Y_s(x, t) = (E_s(x, t), A(x, t), q(t), P(t)) \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_h)$ *— решение системы* (109) – (111). *Рассмотрим*

$$(\mathcal{E}(x, t), \mathcal{A}(x, t), \mathcal{Q}(t), \mathcal{P}(t)) = \mathcal{T}Y_s =$$

$$= (E_s(x + q(t), t), A(x + q(t), t), q(t), P(t) + \int E_s(x, t) \cdot \nabla A(x, t) dx).$$

Тогда 1) удовлетворяются связи

$$\nabla \cdot \mathcal{E}(x, t) = 0,\ \ \nabla \cdot \mathcal{A}(x, t) = 0.$$

2) $(\mathcal{E}(x, t), \mathcal{A}(x, t), \mathcal{Q}(t), \mathcal{P}(t))$ *— принадлежащее* $C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_h)$ *решение следующей гамильтоновой системы:*

$$\dot{\mathcal{E}} = \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathcal{A}},\ \ \dot{\mathcal{A}} = -\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mathcal{E}},\ \ \dot{\mathcal{Q}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathcal{P}},\ \ \dot{\mathcal{P}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mathcal{Q}}.$$

Поскольку $\mathcal{H}$ не зависит от $\mathcal{Q}$, можно рассматривать $\mathcal{P}$ как параметр и ввести редуцированный гамильтониан

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}}(\mathcal{E},\mathcal{A})=\frac{1}{2}\int(|\mathcal{E}|^2+|\nabla\mathcal{A}|^2)dx+[1+(\mathcal{P}-\int\mathcal{E}\cdot\nabla\mathcal{A}dx-\langle\rho,\mathcal{A}\rangle)^2]^{1/2}.$$

Тогда $\mathcal{E}$ и $\mathcal{A}$ удовлетворяют редуцированной гамильтоновой системе

$$\dot{\mathcal{E}}=\frac{\delta\mathcal{H}_{\mathcal{P}}}{\delta\mathcal{A}},\ \ \dot{\mathcal{A}}=-\frac{\delta\mathcal{H}_{\mathcal{P}}}{\delta\mathcal{E}}.$$

Аналогично случаю волнового уравнения выводится, что солитон является глобальным минимумом редуцированного гамильтониана [15]:

Лемма 12. *Для полей $(\mathcal{E},\mathcal{A})\in H^0_s\oplus\dot{H}^1_s$ выполняется оценка снизу:*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{P}(v)}(\mathcal{E},\mathcal{A})-\mathcal{H}_{\mathcal{P}(v)}(\mathcal{E}_v,\mathcal{A}_v)\geqslant\frac{1-|v|}{2}(|\mathcal{E}-\mathcal{E}_v|^2+\|\mathcal{A}-\mathcal{A}_v\|_1^2),\tag{114}$$

Далее, используя редуцированный гамильтониан в качестве функции Ляпунова и возвращаясь к исходным переменным (E,B,q,p), выводим орбитальную устойчивость солитонов:

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* (2), *пусть* $Y(t)=(E(t),B(t),q(t),p(t))\in C(\mathbb{R},\mathcal{M})$ *— решение системы* (5) *–* (6) *с начальным условием* $Y(0)=Y_0=(E_0,B_0,q_0,p_0)\in\mathcal{M}$. *Зафиксируем некоторое* $v\in\mathbb{R}^3$ *с* $|v|<1$ *и положим*

$$\delta=|E_0(\cdot)-E_v(\cdot-q_0)|+|B_0(\cdot)-B_v(\cdot-q_0)|+|p_0-p_v|.$$

Тогда для любого $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta(\varepsilon)>0$, *что*

$$|E(q(t)+\cdot,t)-E_v(\cdot)|+|B(q(t)+\cdot)-B_v(\cdot)|+|p(t)-p_v|\leqslant\varepsilon\ \ \forall\, t\in\mathbb{R}$$

при $\delta\leqslant\delta(\varepsilon)$.

Доказательство аналогично случаю волнового уравнения, см. подробности в [15].

Комбинируя убывание ускорения и орбитальную устойчивость солитонов, можно получить существование предельных скоростей и солитонную асимптотику решения в локальных энергетических полунормах.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (34). *Рассмотрим решение* $Y(t)\in C(\mathbb{R},\mathcal{M})$ *системы* (5) *–* (6) *с начальным условием* $Y^0=(E^0,B^0,q^0,p^0)\in\mathcal{M}^\sigma$, *с некоторым* $\sigma>1/2$. *Тогда существуют предельные значения скоростей*

$$v_\pm=\lim_{t\to\pm\infty}\dot{q}(t)\tag{115}$$

и для любого $R>0$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\big(|E(q(t)+\cdot,t)-E_{v_\pm}(\cdot)|_R+|B(q(t)+\cdot,t)-B_{v_\pm}(\cdot)|_R\big)=0.\tag{116}$$

В теореме 3, формула (102), получена сходимость в локальных полунормах к *переменному сопутствующему солитону*. Очевидно, что из этой сходимости и существования предельных скоростей (115) следует сходимость (116). Поэтому остается доказать существование предельных скоростей. Достаточно провести доказательство только для случая $t\to+\infty$, поскольку наша система обратима по времени. Введем величину колебания скорости на бесконечности

$$\mathrm{osc}_{[T;+\infty)}v(t):=\sup_{t_1,t_2\geqslant T}|v(t_1)-v(t_2)|.$$

Существование предельных скоростей следует из убывания колебания на бесконечности.

Предложение 9. В условиях теоремы 5

$$\mathrm{osc}_{[T;+\infty)} v(t) \to 0, \quad T \to +\infty. \tag{117}$$

Для доказательства, см. ниже п. 5.4, мы определенным образом модифицируем решение системы. Модифицированная траектория удовлетворяет новой системе уравнений, которая при больших t будет являться малым возмущением системы (5) – (6).

Далее, мы показываем, что модифицированные поля: 1) удовлетворяют некоторым неоднородным уравнениям Максвелла; 2) совпадают с солитонными полями вне некоторого светового конуса и 3) совпадают с запаздывающими полями $(E_{(r)}, B_{(r)})$ внутри некоторого меньшего светового конуса.

При достаточно большом t в шаре, где модифицированные поля не равны в точности солитонным, они все же достаточно близки к ним.

Затем получаем выражение силы Лоренца через поля — получается ее выражение через модифицированные поля плюс поправка. Выводим суммируемое убывание поправки и *приближенные законы сохранения* энергии и импульса для модифицированных решений.

Наконец, комбинируя эти соображения с орбитальной устойчивостью, приходим к убыванию колебания скоростей на бесконечности (117).

5.4. Доказательство предложения 5.3

Модификация решения

Воспользуемся интегральным представлением (95) – (97). В [8] доказано следующее убывание:

$$\begin{aligned} \left| m_t * \begin{pmatrix} E^0 \\ B^0 \end{pmatrix} \right| &\leqslant C_0 |t|^{-2} \int_{|y-x|=t} (|E^0(y)| + |B^0|(y)) dy + \\ &+ C_1 |t|^{-1} \int_{|y-x|=t} (|\nabla E^0(y)| + |\nabla B^0|(y)) dy. \end{aligned} \tag{118}$$

Напомним, что для полей E^0 и B^0 выполняются связи

$$\nabla \cdot E^0(x) = \rho(x - q^0), \;\; \nabla B^0(x) = 0, \;\; x \in \mathbb{R}^3. \tag{119}$$

Эти связи обеспечивают тот факт, что поля, определенные формулами (95)–(97), являются решениями системы (5)–(6). Далее, ввиду (101) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое t_ε, что

$$|\ddot{q}(t)| \leqslant \varepsilon \;\text{ при }\; t \geqslant t_\varepsilon \;\text{ и }\; t_\varepsilon \to +\infty \;\text{ при }\; \varepsilon \to 0.$$

Рассмотрим моменты времени

$$t_{1,\varepsilon} = t_\varepsilon + 1, \;\; t_{2,\varepsilon} = t_{1,\varepsilon} + \frac{R_\rho}{1 - \overline{v}}, \;\; t_{3,\varepsilon} = t_{2,\varepsilon} + \frac{R_\rho}{1 - \overline{v}}.$$

Положим

$$q_{3,\varepsilon} = q(t_{3,\varepsilon}), \;\; v_\varepsilon = \dot{q}(t_{3,\varepsilon}).$$

Снова из (101) следует, что существует такое $q_\varepsilon(t) \in C^2(\mathbb{R})$, что

$$q_\varepsilon(t) = \begin{cases} q(t) & \text{при} \quad t \in [t_{1,\varepsilon}, +\infty), \\ l(t) := q_{3,\varepsilon} + v_\varepsilon(t - t_{3,\varepsilon}) & \text{при} \quad t \in (-\infty, t_\varepsilon] \end{cases} \tag{120}$$

и

$$|\ddot{q}(t)| \leqslant C\varepsilon \;\; \forall\, t \in \mathbb{R}, \tag{121}$$

где C не зависит от $\varepsilon \in (0,1)$. Теперь определим модифицированные поля

$$\begin{pmatrix} E_\varepsilon(x,t) \\ B_\varepsilon(x,t) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{t} g_{t-s}(x) * \begin{pmatrix} \rho(x-q_\varepsilon(s)) \\ \rho(x-q_\varepsilon(s))\dot{q}_\varepsilon(s) \end{pmatrix} ds, \ \ x \in \mathbb{R}^3, \ \ t>0. \tag{122}$$

Здесь подынтегральное выражение при фиксированном s является сверткой двух распределений умеренного роста. Одно из распределений, $g_{t-s}(\cdot)$, имеет компактный носитель ввиду (98). Поэтому подынтегральное выражение также является распределением умеренного роста, непрерывно зависящим от s. Тем самым интеграл понимается в смысле интеграла Римана непрерывной функции со значениями в пространстве распределений умеренного роста.

Модифицированное решение — решение возмущенной системы

Покажем, что модифицированные поля удовлетворяют некоторым неоднородным уравнениям Максвелла, совпадают с солитонными полями вне некоторого светового конуса и совпадают с запаздывающими полями $(E_{(r)}, B_{(r)})$ внутри некоторого меньшего светового конуса.

Лемма 13. 1) *Поля E_ε, B_ε совпадают с солитонными полями вне указанного ниже светового конуса:*

$$E_\varepsilon(x,t) = E_{v_\varepsilon}(x-l(t)), \ \ B_\varepsilon(x,t) = B_{v_\varepsilon}(x-l(t)) \tag{123}$$

при

$$|x-q_\varepsilon(t_\varepsilon)| > t - t_\varepsilon + R_\rho. \tag{124}$$

2) *E_ε, B_ε, q_ε удовлетворяют системе уравнений*

$$\dot{E}_\varepsilon(x,t) = \nabla \wedge B_\varepsilon(x,t) - \rho(x-q_\varepsilon(t))\dot{q}_\varepsilon(t), \ \ \nabla \cdot E_\varepsilon(x,t) = \rho(x-q_\varepsilon(t)),$$

$$\dot{B}_\varepsilon(x,t) = -\nabla \wedge E_\varepsilon(x,t), \ \ \nabla \cdot B_\varepsilon(x,t) = 0 \tag{125}$$

при $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$.

3) *Поля E_ε, B_ε совпадают с полями $E_{(r)}$, $B_{(r)}$ в световом конусе*

$$K = \{|x-q(t_{2,\varepsilon})| < t - t_{2,\varepsilon}\}.$$

Доказательство. 1) Рассмотрим солитонные поля $(E_{v_\varepsilon}(x-l(t)), B_{v_\varepsilon}(x-l(t)))$ как решение задачи Коши для системы (125) с начальными данными, заданными в момент $-T$, $T>0$. Эти начальные данные равны $(E^{-T}, B^{-T}) = (E_{v_\varepsilon}(x-l(-T)), B_{v_\varepsilon}(x-l(-T)))$. Применим к этому случаю соответствующие формулы типа (95) – (97), учитывая, что данные Коши заданы не в нуле, а в момент $-T$. Получим

$$\begin{pmatrix} E_{v_\varepsilon}(x-l(t)) \\ B_{v_\varepsilon}(x-l(t)) \end{pmatrix} = \int_{-T}^{t} g_{t-s}(x) * \begin{pmatrix} \rho(x-l(s)) \\ \rho(x-l(s))v_\varepsilon \end{pmatrix} + m_{t+T} * \begin{pmatrix} E^{-T} \\ B^{-T} \end{pmatrix}, \tag{126}$$

поскольку для начальных условий (E^{-T}, B^{-T}) выполнены связи (119) с $l(-T)$ вместо q^0. Последнее слагаемое в (126) стремится к нулю в пространстве $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3) \oplus L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ (а значит, и в прямой сумме пространств распределений умеренного роста) при $T \to +\infty$. Это следует из оценок (118), формул для солитонов и ограничения скорости $|v_\varepsilon| < 1$. Поэтому, переходя к пределу при $T \to +\infty$, получим следующее тождественное равенство распределений:

$$\begin{pmatrix} E_{v_\varepsilon}(x-l(t)) \\ B_{v_\varepsilon}(x-l(t)) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{t} g_{t-s}(x) * \begin{pmatrix} \rho(x-l(s)) \\ \rho(x-l(s))v_\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{127}$$

Наконец, в области (124) правая часть (127) совпадает с (122) в силу (120) и (98).

2) Из строгого принципа Гюйгенса (98) следует, что при

$$(x,t) \in K_0 = \{|x - q_\varepsilon(t_\varepsilon)| < t - t_\varepsilon + R_\rho\}$$

и для достаточно больших t_ε справедливо представление

$$\begin{pmatrix} E_\varepsilon(x,t) \\ B_\varepsilon(x,t) \end{pmatrix} = \int_{-T}^{t} g_{t-s}(x) * \begin{pmatrix} \rho(x - q_\varepsilon(s)) \\ \rho(x - q_\varepsilon(s))\dot q_\varepsilon(s) \end{pmatrix},$$

$x \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$ при достаточно большом T, не зависящем от $(x,t) \in K_0$. Введем поля

$$\begin{pmatrix} \tilde E_T \\ \tilde B_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\varepsilon \\ B_\varepsilon \end{pmatrix} + m_{t+T}(x) * \begin{pmatrix} E^{-T} \\ B^{-T} \end{pmatrix} \tag{128}$$

с теми же (E^{-T}, B^{-T}), что в (126). При помощи тех же рассуждений, что при доказательстве 1), получим, что поля $(\tilde E_T, \tilde B_T)$ удовлетворяют всем уравнениям (125) при $t > -T$ (для начальных данных выполняются связи типа (119)). Наконец, второе слагаемое в правой части (128) стремится к нулю при $T \to +\infty$, как и в (126). Поэтому $(E_\varepsilon, B_\varepsilon)$ удовлетворяют (125) при всех $t \in \mathbb{R}$.

Утверждение 3) следует из (96), (120), (122) и (98). □

Модифицированные поля близки к солитонным

Покажем, что при $t = t_{3,\varepsilon}$ в шаре, где модифицированные поля не равны в точности солитонным, они все же достаточно близки к ним. Действительно, имеем

$$\begin{pmatrix} E_\varepsilon(x, t_{3,\varepsilon}) - E_{v_\varepsilon}(x - q_\varepsilon) \\ B_\varepsilon(x, t_{3,\varepsilon}) - B_{v_\varepsilon}(x - q_\varepsilon) \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{t_\varepsilon}^{t_{3,\varepsilon}} g_{t_{3,\varepsilon}-s}(x) \begin{pmatrix} \rho(x - q_\varepsilon(s)) - \rho(x - l(s)) \\ \rho(x - q_\varepsilon(s))\dot q_\varepsilon(s) - \rho(x - l(s))v_\varepsilon \end{pmatrix} ds.$$

Поэтому в силу (120), (121) получаем

$$|E_\varepsilon(\cdot, t_{3,\varepsilon}) - E_{v_\varepsilon}(\cdot - q_\varepsilon)|_{L^2(B^\varepsilon)} + |B_\varepsilon(\cdot, t_{3,\varepsilon}) - B_{v_\varepsilon}(\cdot - q_\varepsilon)|_{L^2(B^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon), \tag{129}$$

где

$$B^\varepsilon = \{x : |x - q_\varepsilon(t_\varepsilon)| < \frac{2R_\rho}{1-\overline{v}} + 1 + R_\rho\}.$$

Выражение силы Лоренца через поля

Запишем уравнение Лоренца при $t \geqslant T := t_{3,\varepsilon}$ в терминах полей $E_\varepsilon, B_\varepsilon$. В этой области имеем $q_\varepsilon(t) = q(t)$. Поэтому в уравнениях (125) для полей $E_\varepsilon, B_\varepsilon$ можно заменить $q_\varepsilon(t)$ на $q(t)$:

$$\dot E_\varepsilon(x,t) = \nabla \wedge B_\varepsilon(x,t) - \rho(x - q(t))\dot q(t), \;\; \nabla \cdot E_\varepsilon(x,t) = \rho(x - q(t)),$$
$$\dot B_\varepsilon(x,t) = -\nabla \wedge E_\varepsilon(x,t), \;\; \nabla \cdot B_\varepsilon(x,t) = 0$$

при $t > T$. Далее, имеем $E_\varepsilon = E_{(r)}$ и $B_\varepsilon = B_{(r)}$ внутри конуса K по лемме 13, 3). Поэтому при $t > T$ на носителе $\operatorname{supp} \rho(x - q(t))$ имеем

$$E = E_\varepsilon + E_{(0)}, \;\; B = B_\varepsilon + E_{(0)},$$

а значит,

$$\dot q(t) = \frac{p(t)}{\sqrt{1 + p^2(t)}}, \;\; \dot p(t) = \int [E_\varepsilon(x,t) + \dot q(t) \wedge B_\varepsilon(x,t)]\rho(x - q(t))dx + f(t),$$

где

$$f(t) := \int [E_{(0)}(x,t) + \dot q(t) \wedge B_{(0)}(x,t)]\rho(x - q(t))dx.$$

Суммируемое убывание $f(t)$ и приближенные законы сохранения

Перейдем к гамильтоновым переменным $E_{s,\varepsilon}$, A_ε, q, P, где

$$E_{s,\varepsilon}(x,t) = \Pi_s E_\varepsilon(x,t), \quad B_\varepsilon(x,t) = \nabla \wedge A_\varepsilon(x,t), \quad \nabla \cdot A_\varepsilon(x,t) = 0,$$

$$P(t) := p(t) + \int \rho(x - q(t)) A_\varepsilon(x,t)\, dx.$$

Напомним, что полный момент имеет вид $\mathcal{P} = p + \int E_s(x) \wedge (\nabla \wedge A(x)) dx$; полный момент солитона (E_v, B_v) равен

$$\mathcal{P}(v) = p + \int E_{s,v}(x) \wedge (\nabla \wedge A_v(x)) dx. \tag{130}$$

Покажем, что $f(t)$ убывает суммируемым образом и что энергия H_s и полный момент $\mathcal{P}$ «почти сохраняются» на решении $Y_\varepsilon(t)$ (напомним, что $H_s(E_s, A, q, P)$ определен формулой (112)).

Лемма 14. *Для введенного в теореме 5 параметра* $\sigma > 1/2$

1) *Имеет место следующая асимптотика:*

$$|f(t)| = \mathcal{O}(t^{-1-\sigma}). \tag{131}$$

2) *Колебания энергии и полного момента малы при больших* T*:*

$$H_s(Y_\varepsilon(t)) = H_s(Y_\varepsilon(T)) + \mathcal{O}(T^{-\sigma}), \tag{132}$$

$$\mathcal{P}(Y_\varepsilon(t)) = \mathcal{P}(Y_\varepsilon(T)) + \mathcal{O}(T^{-\sigma}) \tag{133}$$

при всех $t > T$.

Доказательство. 1) Асимптотика для $f(t)$ следует из явных формул (97), оценки (118), оценки скорости $|\dot q| < 1$ и убывания (19) начальных полей.

2) Ввиду (113) достаточно доказать (132) для $H(Y_\varepsilon(t))$, где H определен формулой (104). Имеем

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{2}\int (E_\varepsilon^2 + B_\varepsilon^2) dx) = v \cdot \dot p + \langle E_v e, \dot E_\varepsilon \rangle + \langle B_\varepsilon, \dot B_\varepsilon \rangle =$$

$$= v \cdot (\int (E_\varepsilon + \dot q \wedge B_\varepsilon)\rho(x-q) dx + f) + \langle E_v e, \nabla \wedge B_\varepsilon - \rho(x-q)\dot q \rangle + \langle B_\varepsilon, -\nabla \wedge E_\varepsilon \rangle = v \cdot f,$$

поскольку $\langle E_\varepsilon, \nabla \wedge B_\varepsilon \rangle - \langle B_\varepsilon, \nabla \wedge E_\varepsilon \rangle = 0$, аналогично доказательству предложения А.5 в [8].

Для полного момента аналогичными рассуждениями получаем

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}(Y_\varepsilon(t)) = f(t).$$

Тогда (132), (133) следуют из (131). □

Комбинирование с орбитальной устойчивостью

Для завершения доказательства используем оценку (114). При $t \geqslant T := t_{3,\varepsilon}$ имеем $\mathcal{P}(Y_\varepsilon(t)) = \mathcal{P}(\tilde v(t))$, где $\mathcal{P}(\tilde v(t))$ — полный момент солитона со скоростью $\tilde v(t)$. Из (133) и дифференцируемости отображения $\mathcal{P}(v) \mapsto v$ — обратного к отображению (130) — следует, что

$$\operatorname{osc}_{[T,+\infty)} \tilde v(t) \to 0 \ \text{ при } \ T \to +\infty. \tag{134}$$

Из утверждения 1) леммы 13 и из (129) получаем $\tilde v(t_{3,\varepsilon}) - v_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$. Отсюда и из (134) вытекает оценка $|\tilde v(t)| \leqslant \overline{v_1} < 1$ при $t \geqslant T$. Теперь применим оценку (114) и получим

$$\begin{aligned} &\frac{1-|\tilde v(t)|}{2}\left(\left| E_{s,\varepsilon}(\cdot + q(t),t) - E_{s,\tilde v(t)} \right|^2 + \| A_{s,\varepsilon}(\cdot + q(t),t) - A_{\tilde v(t)} \|_1^2 \right) \leqslant \\ &\leqslant \ \mathcal{H}_{\mathcal{P}(\tilde v(t))}(E_{s,\varepsilon}(\cdot + q(t),t), B_{s,\varepsilon}(\cdot + q(t),t)) - \mathcal{H}_{\mathcal{P}(\tilde v(t))}(E_{s,\tilde v(t)}, A_{\tilde v(t)}). \end{aligned} \tag{135}$$

Лемма 15. *Правая часть* (135) *произвольно мала равномерно по* $t \geqslant T$ *при достаточно малом* ε *и достаточно большом* T.

Из этой леммы следует, что

$$\mathrm{osc}_{[T,+\infty)}|E_{s,\varepsilon}(\cdot + q(t),t)| \to 0 \quad \mathrm{osc}_{[T,+\infty)}\|A_\varepsilon(\cdot + q(t),t)\|_1 \to 0$$

при $T \to +\infty$. Действительно,

$$E_{s,\varepsilon}(\cdot + q(t_2),t_2) - E_{s,\varepsilon}(\cdot + q(t_1),t_1) =$$

$$= (E_{s,\varepsilon}(\cdot + q(t_2),t_2) - E_{s,\tilde{v}(t_2)}) - (E_{s,\varepsilon}(\cdot + q(t_1),t_1) - E_{s,\tilde{v}(t_1)}) + (E_{s,\tilde{v}(t_2)} - E_{s,\tilde{v}(t_2)}).$$

При $t_1, t_2 > T$ первые два слагаемые малы ввиду (135) и в силу леммы, а третье мало ввиду (134), поскольку поле E_v солитона непрерывно зависит от v в L^2. Для поля A рассуждения аналогичны. Отсюда с учетом (133) следует $\mathrm{osc}_{\,[T,+\infty)}p(t) \to 0$ при $T \to +\infty$, а значит, и (117). Предложение 5.3 доказано. □

Доказательство леммы 15. Обозначим

$$\tilde{\mathcal{P}}(t) = \mathcal{P}(\tilde{v}(t)), \;\; \Phi(t) = (E_{s,\varepsilon}(\cdot + q(t),t), A_\varepsilon(\cdot + q(t),t)), \;\; \tilde{\Phi}(t) = (E_{s,\tilde{v}(t)}, A_{\tilde{v}(t)}).$$

Мы утверждаем, что $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(t)}(\Phi(t)) - \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(t)}(\tilde{\Phi}(t))$ близко к $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(T)}(\Phi(T)) - \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(T)}(\tilde{\Phi}(T))$, а последнее выражение мало ввиду (123) и (129). Итак, остается доказать, что $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(t)}(\Phi(t))$ близко к $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(T)}(\Phi(T))$, а $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(t)}(\tilde{\Phi}(t))$ близко к $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(T)}(\tilde{\Phi}(T))$. Имеем

$$\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(t)}(\Phi(t)) - \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(T)}(\Phi(T)) =$$

$$= \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(t)}(\Phi(t)) - \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(T)}(\Phi(t)) + \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(T)}(\Phi(t)) - \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(T)}(\Phi(T)),$$

а это выражение мало ввиду (132), (133). Для $\mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(t)}(\tilde{\Phi}(t)) - \mathcal{H}_{\tilde{\mathcal{P}}(T)}(\tilde{\Phi}(T))$ рассуждения аналогичны. □

Теорема 5 доказана. □

Приложение 1: Плотности, удовлетворяющие условию Винера

Чтобы построить пример плотности (общего положения), удовлетворяющей одновременно условиям (2) и (34), зафиксируем вещественную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, причем $\varphi(s) \not\equiv 0$. Тогда $\hat{\varphi}$ можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость и существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\hat{\varphi}(\xi + i\alpha) \neq 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Заменив $\varphi(s)$ на $\varphi(s)\exp(\alpha s)$, можем считать, что $\alpha = 0$. Ясно, что функция $\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)$ удовлетворяет условиям (2) и (34), кроме инвариантности относительно вращений. При сферическом усреднении этой функции мы можем приобрести ноль, поэтому сначала положим $\rho_1 = \varphi * \varphi$, где $\varphi(s) = \varphi(-s)$. Тогда опять $\rho_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\hat{\rho}_1(\xi) = |\hat{\varphi}(\xi)|^2 > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Пусть ρ — сферическое усреднение функции $\rho_1(x_1)\rho_1(x_2)\rho_1(x_3)$. Тогда ρ удовлетворяет обоим условиям (2) и (34).

Приложение 2: Инвариантность симплектической структуры

Каноническую эквивалентность систем (1) и (61) можно обосновать с лагранжевой точки зрения.

По определению, имеем $H(\Phi, \Pi, Q, P) = h(\varphi, \pi, q, p)$, где аргументы связаны каноническим преобразованием T. С каждым гамильтонианом при помощи преобразований Лежандра ассоциируется лагранжиан:

$$\begin{aligned} l(\varphi, q, \dot{\varphi}, \dot{q}) &= \langle \pi, \dot{\varphi}\rangle + p\cdot\dot{q} - h(\varphi, q, \pi, p)\,, \qquad \dot{\varphi} = \frac{\delta h}{\delta \pi}\,,\;\; \dot{q} = \frac{\partial h}{\partial p}\,, \\ L(\Phi, Q, \dot{\Phi}, \dot{Q}) &= \langle \Pi, \dot{\Phi}\rangle + P\cdot\dot{Q} - H(\Phi, \Pi, Q, P)\,, \quad \dot{\Phi} = \frac{\delta H}{\delta \Pi}\,,\;\; \dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P}\,. \end{aligned}$$

Эти преобразования Лежандра корректно определены, поскольку гамильтонианы выпуклы по импульсам. Мы утверждаем, что выполнено тождество $L(\Phi, Q, \dot{\Phi}, \dot{Q}) = l(\varphi, q, \dot{\varphi}, \dot{q})$. Для этого надо проверить инвариантность канонической 1-формы,

$$\langle \Pi, \dot{\Phi} \rangle + P \cdot \dot{Q} = \langle \pi, \dot{\varphi} \rangle + p \cdot \dot{q} \,. \tag{136}$$

Подставим

$$\begin{aligned} \Pi(x) &= \pi(q+x)\,, & \dot{\Phi}(x) &= \dot{\varphi}(q+x) + \dot{q} \cdot \nabla\varphi(q+x)\,, \\ P &= p - \int d^3x\, \dot{\varphi} \cdot \nabla\varphi\,, & \dot{Q} &= \dot{q}\,. \end{aligned}$$

Тогда левая часть (136) становится

$$\langle \pi(q+x), \dot{\varphi}(q+x) + \dot{q} \cdot \nabla\varphi(q+x) \rangle + (p - \langle \pi(x), \nabla\varphi(x) \rangle) \cdot \dot{q} = \langle \pi, \dot{\varphi} \rangle + p \cdot \dot{q}\,.$$

Поскольку $L = l$, соответствующие функционалы действия тождественны при преобразовании посредством T. Динамические траектории являются стационарными точками соответствующих функционалов действия. Поэтому две гамильтоновы системы оказываются эквивалентными.

Литература

1. *Lorentz H.A.* Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Leiden: E.J. Brill, 1895.
2. *Lorentz H.A.* Theory of Electrons. 2nd edition 1915. New York: reprinted by Dover, 1952.
3. *Maxwell J.C.* A dynamical theory of the electromagnetic field // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1865. V. 155. P. 459–512.
4. *Wiechert E.* Arch. neerl., livre jubilaire dedie a H.A. Lorentz. 1900.
5. *Abraham M.* Theorie der Elektrizitat. Band 2: Elektromagnetische Theorie der Strahlung. Leipzig: Teubner, 1905.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Краткий курс теоретической физики. Книга 1. Механика. Электродинамика. М.: Наука, 1969.
7. *Komech A., Kunze M., Spohn H.* Long-time asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field // Comm. Partial Differential Equations. 1997. V. 22. P. 307–335.
8. *Komech A., Spohn H.* Long time asymptotics for the coupled Maxwell–Lorentz equations // Comm. Partial Diff. Eqs. 2000. V. 25, N 3/4. P. 559–584.
9. *Komech A., Kunze M., Spohn H.* Effective dynamics for a mechanical particle coupled to a wave field // Comm. Math. Phys. 1999. V. 203. P. 1–19.
10. *Komech A., Spohn H.* Soliton-like asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field // Nonlin. Analysis. 1998. V. 33. P. 13–24.
11. *Imaikin V., Komech A., Spohn H.* Soliton-like asymptotics and scattering for coupled Maxwell–Lorenz equations // Mathematical and numeric aspects of waves propagation / Ed. by Bermuder A. et al. Philadelfia, PA: SIAM, 2000. P. 329–333.
12. *Imaikin V., Komech A., Spohn H.* Soliton-like asymptotics and scattering for a particle coupled to Maxwell field // Russian Journal of Mathematical Physics. 2002. V. 9, N 4. P. 428–436.
13. *Imaikin V., Komech A., Spohn H.* Scattering theory for a particle coupled to a scalar field // Journal of Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2003. V. 10, N 1/2. P. 387–396.
14. *Imaikin V., Komech A., Markowich P.* Scattering of solitons of the Klein–Gordon equation coupled to a classical particle // Journal of Mathematical Physics. 2003. V. 44, N 3. P. 1202–1217.

15. *Imaikin V., Komech A., Mauser N.* Soliton-type asymptotics for the coupled Maxwell–Lorentz equations // Ann. Inst. Poincaré, Phys. Theor. 2004. V. 5. P. 1117–1135.

16. *Imaikin V., Komech A., Spohn H.* Rotating charge coupled to the Maxwell field: scattering theory and adiabatic limit // Monatshefte für Mathematik. 2004. V. 42, N 1–2. P. 143–156.

17. *Имайкин В.М.* Солитонные асимптотики для систем типа «поле-частица» // УМН. 2013. Т. 68, вып. 2(410). С. 33–90.

18. *Spohn H.* Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

19. *Lions J.L.* Problèmes aux Limites dans les Équations aux Dérivées Partielles. Montréal: Presses de l'Univ. de Montréal, 1962.

20. *Scharf G.* From Electrostatics to Optics. Berlin: Springer, 1994.

21. *Rudin W.* Functional Analysis. New York: McGraw Hill, 1977.

22. *Bambusi D., Galgani L.* Some rigorous results on the Pauli-Fierz model of classical electrodynamics // Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor. 1993. V. 58. P. 155–171.

References

1. *Lorentz H.A.*, Version of a theory of electrical and optical phenomena in moving bodies. Leiden: E.J. Brill, 1895.

2. *Lorentz H.A.* Theory of Electrons. 2nd edition 1915. New York: reprinted by Dover, 1952.

3. *Maxwell J.C.* A dynamical theory of the electromagnetic field. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1865. V. 155. P. 459–512.

4. *Wiechert E.* Arch. neerl. anniversary book devoted to H.A. Lorentz, 1900.

5. *Abraham M.* Theory of electricity. Volume 2: Electromagnetic theory of radiation. Leipzig: Teubner, 1905.

6. Landau L.D., Lifshitz E.M. Short Course of Theoretical Physics. Book 1. Mechanics. Electrodynamics. Moscow: Nauka, 1969.

7. *Komech A., Kunze M., Spohn H.* Long-time asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field. Comm. Partial Differential Equations. 1997. V. 22. P. 307–335.

8. *Komech A., Spohn H.* Long time asymptotics for the coupled Maxwell–Lorentz equations. Comm. Partial Diff. Eqs. 2000. V. 25, N 3/4. P. 559–584.

9. *Komech A., Kunze M., Spohn H.* Effective dynamics for a mechanical particle coupled to a wave field. Comm. Math. Phys. 1999. V. 203. P. 1–19.

10. *Komech A., Spohn H.* Soliton-like asymptotics for a classical particle interacting with a scalar wave field. Nonlin. Analysis. 1998. V. 33. P. 13–24.

11. *Imaikin V., Komech A., Spohn H.* Soliton-like asymptotics and scattering for coupled Maxwell-Lorenz equations. Mathematical and numeric aspects of waves propagation / Ed. by Bermuder A. [et al.]. Philadelfia, PA: SIAM, 2000. P. 329–333.

12. *Imaikin V., Komech A., Spohn H.* Soliton-like asymptotics and scattering for a particle coupled to Maxwell field. Russian Journal of Mathematical Physics. 2002. V. 9, N 4. P. 428–436.

13. *Imaikin V., Komech A., Spohn H.* Scattering theory for a particle coupled to a scalar field. Journal of Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2003. V. 10, N 1/2. P. 387–396.

14. *Imaikin V., Komech A., Markowich P.* Scattering of solitons of the Klein–Gordon equation coupled to a classical particle. Journal of Mathematical Physics. 2003. V. 44, N 3. P. 1202–1217.

15. *Imaikin V., Komech A., Mauser N.* Soliton-type asymptotics for the coupled Maxwell–Lorentz equations. Ann. Inst. Poincaré, Phys. Theor. 2004. V. 5. P. 1117–1135.

16. *Imaikin V., Komech A., Spohn H.* Rotating charge coupled to the Maxwell field: scattering theory and adiabatic limit. Monatshefte für Mathematik. 2004. V. 42, N 1–2. P. 143–156.

17. *Imaykin V.* Soliton asymptotics for systems of «field-particle» type. Russ. Math. Surv. 2013. V. 68, N 2. P. 33–90.

18. *Spohn H.* Dynamics of Charged Particles and Their Radiation Field. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

19. *Lions J.L.* Boundary value problems for partial differential equations. Montreal: Montreal University Press, 1962.

20. *Scharf G.* From Electrostatics to Optics. Berlin: Springer, 1994.

21. *Rudin W.* Functional Analysis. New York: McGraw Hill, 1977.

22. *Bambusi D., Galgani L.* Some rigorous results on the Pauli-Fierz model of classical electrodynamics. Ann. Inst. H. Poincaré, Phys. Theor. 1993. V. 58. P. 155–171.

Поступила в редакцию 06.09.2016